EJERCICIO N° 1

FI2001-2 Mecánica	**Tiempo: 0:45 hrs**
Departamento de Física	**21 Marzo de 2011**
Escuela de Ingeniería y Ciencias	**Prof. Patricia Sotomayor C.**
Universidad de Chile.	

Una partícula P se mueve en un plano con rapidez proporcional a su distancia ρ medida con respecto a un punto O del plano, es decir: $\left\|\vec{V}\right\| = K\,\rho$, donde K es constante.

Si la rapidez angular de P es $\omega_0 = \dfrac{K}{\sqrt{10}}$ e inicialmente su distancia a O es $\rho_0 > 0$, determine:

a) La aceleración de P en función de ρ en coordenadas polares.

b) El radio de curvatura ρ_C de la trayectoria de P.

c) Los vectores tangente y normal, expresados según vectores unitarios de coordenadas polares.

d) La posición de P con respecto a O, en función del tiempo., suponiendo que en $t = 0$ la partícula se acercaba a O y suponiendo que en $t = 0$ P se alejaba de O. Bosqueje la trayectoria en ambos casos para el intervalo de tiempo $[0,\infty)$.

Solución:

$\|\vec{v}\| = K\rho \Rightarrow \dot{\rho}^2 + \rho^2\omega_0^2 = K^2\rho^2 = 10\omega_0^2\rho^2 \Rightarrow \dot{\rho}^2 = 9\omega_0^2\rho^2 \Rightarrow \dot{\rho} = \pm 3\,\omega_0\rho$ (1)
$(\rho(t)$ puede ser creciente o decreciente)

a) La aceleración:

Si P se aleja de O: $\dot{\rho} = 3\omega_0\rho$; $\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{d\rho}\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho}\frac{d\dot{\rho}}{d\rho} = 3\omega_0\rho\,3\omega_0 = 9\omega_0^2\rho$

Si P se acerca a O: $\dot{\rho} = -3\omega_0\rho$; $\frac{d\dot{\rho}}{d\rho} = -3\omega_0$ => $\ddot{\rho} = 9\omega_0^2\rho$

Luego, $\vec{a}(\rho) = (9\omega_0^2\rho - \rho\omega_0^2)\hat{\rho} \pm 2\cdot 3\omega_0\rho\,\omega_0\,\hat{\phi}$ => $\boxed{\vec{a}(\rho) = \omega_0^2\rho\,(8\hat{\rho} \pm 6\,\hat{\phi})}$ (2)

Nota: el signo + indica la solución en que P se aleja de O y – cuando se acerca.

b) Expresamos $\vec{a}$ en coordenadas intrínsecas, para igualar $\|\vec{a}\|$ con el que se desprende de (a)

$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = K\dot{\rho} = \pm 3\sqrt{10}\,\rho\,\omega_0^2$; $\dot{s}^2 = \|\vec{v}\|^2 = 10\omega_0^2\rho^2$

$$\left.\begin{aligned} \|\vec{a}\|^2 &= 90\,\rho^2\omega_0^4 + \frac{100\omega_0^4\rho^4}{\rho_C^2} \\ (2) &=> \|\vec{a}\|^2 = 100\,\rho^2\omega_0^4 \end{aligned}\right\} => \frac{100\omega_0^4\rho^4}{\rho_C^2} = 10\,\rho^2\omega_0^4 \quad => \rho_C^2 = 10\rho^2 \qquad (3)$$

c) Sabemos que $\hat{t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. En este caso: $\hat{t} = \frac{\pm 3\,\omega_0\rho\,\hat{\rho} + \rho\omega_0\hat{\phi}}{\sqrt{10}\,\omega_0\,\rho} = \frac{\pm 3\,\hat{\rho} + \hat{\phi}}{\sqrt{10}}$ (4)

$$\|\vec{a}\|^2 = 90\,\rho^2\omega_0^4 + \frac{100\omega_0^4\rho^4}{\rho_c^2}$$
$$(3) => \|\vec{a}\|^2 = 100\,\rho^2\omega_0^4$$

Para obtener $\hat{n}$, igualamos $\vec{a}(\rho)$ de (2) con la que obtenemos de (b), y reemplazamos $\hat{t}$ de (4)

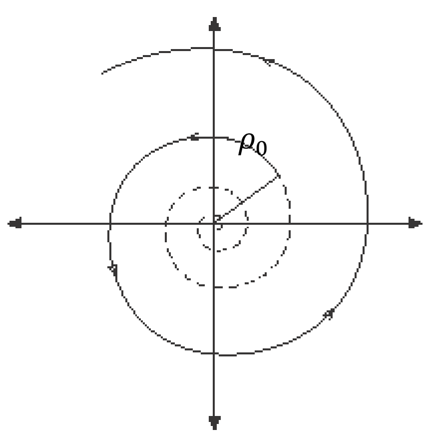
$\vec{a}(\rho) = \pm 3\sqrt{10}\rho\,\omega_0^2\,\hat{t} + \sqrt{10}\,\omega_0^2\,\rho\,\hat{n} = \omega_0^2\rho\,(8\hat{\rho} \pm 6\hat{\phi}) => \pm 3\sqrt{10}\,\hat{t} + \sqrt{10}\,\hat{n} = (8\hat{\rho} \pm 6\hat{\phi})$

reemplazamos $\hat{t}$ de (4): $\pm 9\,(\hat{\rho} + \hat{\phi}) + \sqrt{10}\,\hat{n} = (8\hat{\rho} \pm 6\hat{\phi}) => \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}\Big((8 \mp 9)\hat{\rho} \mp (6-9)\hat{\phi})\Big)$

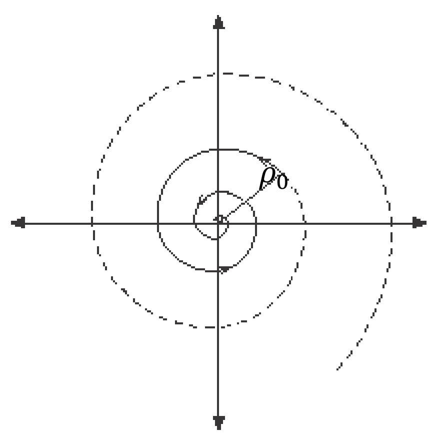
Nota: acá el signo de arriba es el que corresponde con el alejamiento y el de abajo, con el acercamiento.

d) De *(1)* $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \pm 3\,\omega_0\rho$ => $\frac{d\rho}{\rho} = \pm 3\,\omega_0 dt$ => $\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} = \pm 3\,\omega_0\int_0^t dt$

=> $\rho(t) = \rho_0\,e^{\pm 3\omega_0 t}$. Signo (+) si se aleja de *O*, y signo (-) si se acerca a *O*.



Se aleja



Se acerca