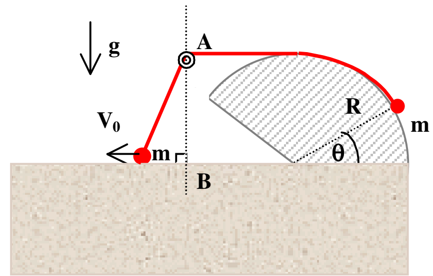
CONTROL N°1

20 de Agosto de 2003
Tiempo: 3 horas

Problema 1



Un caballo tira un objeto de masa m a través de una cuerda ideal, que pasa por una polea en el punto A como se muestra en la figura.

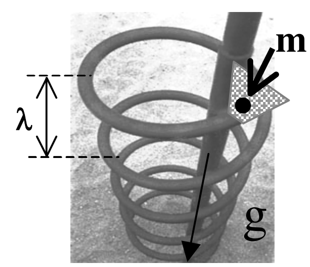
El caballo se mueve por una superficie horizontal con velocidad constante V_0 ejerciendo una fuerza horizontal desconocida F.

El objeto se mueve por una superficie circular de radio R que está en el plano vertical. Cuando $\theta = 0$ el caballo pasa por el punto B.

Calcular para $0 \leq \theta \leq \pi/2$, en función de θ:

a) La velocidad del objeto
b) La aceleración del objeto
c) La tensión de la cuerda
d) Las reacciones normales
e) La fuerza F que ejerce el caballo para que ocurra este movimiento

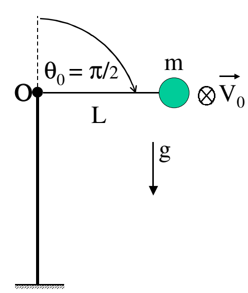
Problema 2



Una niña de masa m se lanza desde el reposo a una piscina en la parte superior de un tobogán en forma de espiral. Si la altura del tobogán es H y el paso es λ, calcular:

a) El tiempo que demora en caer a la piscina
b) La velocidad con que sale del tobogán
c) La reacción que le ejerce el tobogán a la niña durante todo el tiempo que se desliza por él.

Problema 3



Una partícula de masa m está sujeta al extremo de una barra rígida de largo L y masa despreciable cuyo otro extremo está fijo en O. En el punto O la barra puede girar libremente en cualquier sentido, partiendo desde una posición que forma un ángulo $\theta_0 = \pi/2$ con la vertical.

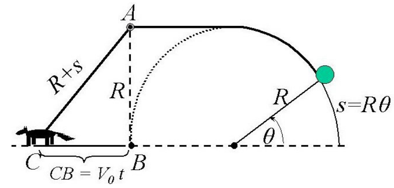
La velocidad inicial de la partícula es $\vec{V}(0) = V_0\ \hat{\phi}$

Determine:

a) las ecuaciones del movimiento
b) la velocidad y aceleración de la partícula en función de θ
c) la tensión de la barra

<u>Solución Problema 1</u>

i) Relaciones geométricas: Por Pitágoras:



$$R^2 + CB^2 = (R+s)^2 \Rightarrow R^2 + V_0^2 t^2 = R^2(1+\theta)^2 \Rightarrow (1+\theta)^2 = 1 + \frac{V_0^2\, t^2}{R^2} \qquad (1)$$

Sea $K = \frac{V_0}{R} \Rightarrow (1+\theta)^2 = 1 + K^2 t^2 = 1 + 2\theta + \theta^2 - 1 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2\theta+\theta^2}}{K}$ (2)

a) la velocidad: $\vec{V}(\theta) = R\,\dot{\theta}(\theta)\,\hat{\theta}$

de (1) $\theta(t) = \sqrt{1+K^2 t^2} - 1 \Rightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{2K^2 t}{2\sqrt{1+K^2 t^2}} \Rightarrow \dot{\theta}(\theta) = \frac{2K^2 \frac{\sqrt{2\theta+\theta^2}}{K}}{2(1+\theta)} = \frac{K\sqrt{2\theta+\theta^2}}{1+\theta}$ (3)

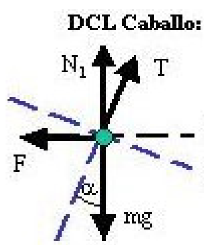
multiplicando (3) por R y reemplazando el valor de K $\Rightarrow \boxed{\vec{V}(\theta) = V_0 \frac{\sqrt{2\theta+\theta^2}}{1+\theta}\,\hat{\theta}}$

b) la aceleración: $\vec{a}(\theta) = -R\,\dot{\theta}^2(\theta)\,\hat{r} + R\ddot{\theta}(\theta)\,\hat{\theta}$

$$\ddot{\theta}(\theta) = \dot{\theta}\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\theta} = \frac{K\sqrt{2\theta+\theta^2}}{1+\theta}\, K\, \frac{1+\theta\,\frac{2+2\theta}{2\sqrt{2\theta+\theta^2}} - \sqrt{2+\theta^2}}{(1+\theta)^2} = \frac{K^2}{1+\theta}\,\frac{(1+\theta)^2 - (2\theta+\theta^2)}{(1+\theta)^2} = \frac{K^2}{(1+\theta)^3}$$

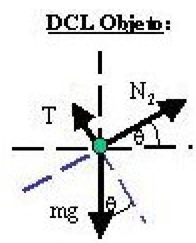
Reemplazando $\dot{\theta}^2(\theta)$, $\ddot{\theta}(\theta)$ y K $\Rightarrow \boxed{\vec{a}(\theta) = \frac{V_0^2}{R}\left[-\frac{(2\theta+\theta^2)}{(1+\theta)^2}\,\hat{r} + \frac{1}{(1+\theta)^3}\,\hat{\theta}\right]}$

ii) determinación de las fuerzas:



$T\cos\alpha + N_1 = mg$ (4)

$T\,sen\alpha - F = m\ddot{x} = 0$ (5)



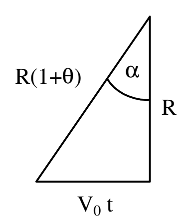
$N_2 - mg\,sen\theta = m\,a_r = -m\,R\dot{\theta}^2$ (6)

$T - mg\cos\theta = m\,a_\theta = m\,R\ddot{\theta}$ (7)

Relación geométrica entre α y θ:

$$\cos\alpha = \frac{R}{R(1+\theta)} = \frac{1}{(1+\theta)}$$

$$sen\alpha = \frac{V_0\,t}{R(1+\theta)} = \frac{K\,t}{(1+\theta)} = \frac{\sqrt{2\theta+\theta^2}}{(1+\theta)}$$



Reemplazando *K*:

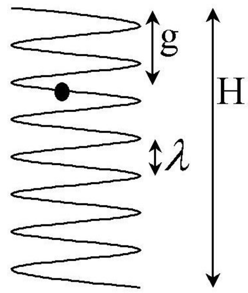
c) la tensión: de (7) $\boxed{\vec{T}(\theta) = mg\cos\theta + \frac{m\,V_0^2}{R\,(1+\theta)^3}\,\hat{\theta}}$

d) las normales:

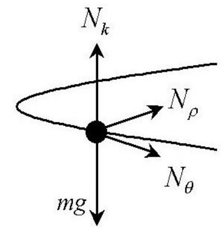
de (4) $N_1 = mg - T\cos\alpha \Rightarrow \boxed{\vec{N}_1(\theta) = m\left[g - \frac{g\cos\theta}{(1+\theta)} - \frac{V_0^2}{R\,(1+\theta)^4}\right]\hat{j}}$; de (6) $\boxed{\vec{N}_2(\theta) = \left[mg\;sen\theta - \frac{m\,V_0^2(2\theta+\theta^2)}{R\,(1+\theta^2)}\right]\hat{r}}$

e) la fuerza: de (5) $F = T\;sen\alpha \Rightarrow \boxed{\vec{F}(\theta) = -m\left[g\cos\theta + \frac{V_0^2}{R\,(1+\theta)^3}\right]\frac{2\theta+\theta^2}{(1+\theta)}\,\hat{i}}$

Solución Problema 2



D.C.L. niña:



Utilizaremos coordenadas cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{k})$. En el DCL vemos las fuerzas que actúan sobre la niña.

$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$, por componentes:

según $\hat{\rho}$: $\quad m \cdot (\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\theta}^2) = -N_\rho \qquad (1)$

según $\hat{\theta}$: $\quad m \cdot (2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}) = N_\theta \qquad (2)$

según $\hat{k}$: $\quad m \cdot \ddot{z} = N_k - mg \qquad (3)$

pero $\rho = R = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, entonces:

$$(1) \qquad -mR\dot{\theta}^2 = -N_\rho \quad \Rightarrow \quad mR\dot{\theta}^2 = N_\rho$$
$$(2) \qquad m\rho\ddot{\theta} = N_\theta$$

a la vez notemos que cuando θ da una vuelta (2π), z ha disminuido λ

$$\Rightarrow z(\theta) = (H - \frac{\lambda}{2\pi}\theta) \qquad (4.0) \qquad \Rightarrow \quad \dot{z} = -\frac{\lambda}{2\pi}\dot{\theta} \qquad (4.1) \qquad \Rightarrow \quad \ddot{z} = -\frac{\lambda}{2\pi}\ddot{\theta} \qquad (4.2)$$

y también notemos que $\vec{N} \cdot \vec{v} = 0$

donde $\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} = R\dot{\theta}\hat{\theta} - \frac{\lambda}{2\pi}\dot{\theta}\hat{k} \quad (*) \quad \Rightarrow \quad N_\theta \cdot R\dot{\theta} - N_k \cdot \frac{\lambda}{2\pi}\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_\theta = \frac{\lambda}{2\pi \cdot R} N_k \qquad (5)$

Reemplazando (5) en (2), (4.2) en (3) y luego despejando N_k de ambas ecuaciones e igualando:

$$\ddot{\theta} = g \cdot \left(\frac{\frac{\lambda}{2\pi \cdot R}}{R + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 R}} \right) = \kappa \cdot g \qquad (6)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}(t) = \kappa g t + \dot{\theta}_0 \text{ pero } \dot{\theta}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}(t) = \kappa g t \qquad (7)$$

$$\Rightarrow \quad \theta(t) = kg\frac{t^2}{2} + \theta_0 \text{ pero } \theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \kappa g \frac{t^2}{2} \qquad (8)$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = H - \frac{\lambda}{2\pi}\kappa g \frac{t^2}{2} \qquad (9)$$

Entonces para saber cuanto tiempo demoró en caer, basta con imponer en (9) que en $t = t^*, z(t^*) = 0$

$$\Rightarrow \quad z(t^*) = H - \frac{\lambda}{2\pi}\kappa g \frac{t^{*2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \sqrt{\frac{4\pi \cdot H}{\lambda \kappa g}}$$

y para saber la velocidad en t^* basta con reemplazar t^* en (*) $\quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t^*) = R\kappa \cdot g\sqrt{\frac{4\pi \cdot H}{\lambda \kappa g}}\hat{\theta} - \frac{\lambda}{2\pi}\kappa g\sqrt{\frac{4\pi \cdot H}{\lambda \kappa g}}\hat{k}$

es decir, $\boxed{v_{FINAL} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot \kappa g \cdot H}{\lambda}}\left[R\hat{\theta} - \frac{\lambda}{2\pi}\hat{k}\right]}$

si calculamos la rapidez reemplazando el valor de κ resulta $v(t^*) = \sqrt{2gH}$, valor que, como se verá más adelante, se podría verificar por energía.

y para conocer las componentes de la Normal basta con reemplazar los valores ya conocidos de $\dot{\theta}, \ddot{\theta}$ y $\ddot{z}$.

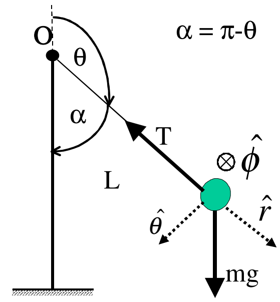
$$\Rightarrow \quad N_\rho = mR(\kappa \cdot gt)^2$$

$$\Rightarrow \quad N_\theta = mR\kappa \cdot g$$

$$\Rightarrow \quad N_k = -\frac{\lambda}{2\pi}mg\kappa + mg$$

Solución Problema 3:

D.C.L.



a) las ecuaciones del movimiento: Escribimos $\vec F = m\vec a$ en coordenadas esféricas. La expresión de la aceleración en estas coordenadas es:

$$\vec a(t) = (\ddot r - r\dot\phi^2\, sen^2\phi - r\dot\theta^2)\,\hat r + (r\ddot\theta - r\dot\phi^2\, sen^2\phi\cos^2\phi + 2\dot r\dot\theta)\,\hat\theta + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial t}\left(r^2 sen^2\theta\,\dot\phi\right)\hat\phi$$

(como $r = L \Rightarrow \dot r = \ddot r = 0$)

El DCL muestra las fuerzas externas: $\vec F = -T\,\hat r + mg\cos(\alpha)\,\hat r + mgsen(\alpha)\,\hat\theta$

Entonces, las ecuaciones escalares del movimiento son:

según $\hat r$) $\quad -T + mg\cos(\pi-\theta) = -mL\dot\phi^2 sen^2\theta - mL\dot\theta^2 \qquad (1)$

según $\hat\theta$) $\quad mgsen(\pi-\theta) = mL\ddot\theta - mL\dot\phi^2 sen\theta\cos\theta \qquad (2)$

según $\hat\phi$) $\quad 0 = \dfrac{1}{Lsen\theta}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(L^2 sen^2\theta\,\dot\phi\right) \qquad (3)$

b) velocidad y aceleración en función de θ: Necesitamos $\dot\theta, \ddot\theta\ y\, \dot\phi$ en función de θ.

De (3) => $L^2 sen^2\theta\,\dot\phi$ $=cte$ => obtenemos $\dot\phi$ (θ). En efecto, esta expresión es constante para todo instante de tiempo, y en particular para el instante inicial. De aquí se obtiene:

$$L^2 sen^2(\pi/2)\dot\phi_0 = C \;\Rightarrow\; L^2\dot\phi_0^2 = C$$

además $\vec V(t) = L\dot\theta\,\hat r + L\dot\phi sen\theta\,\hat\phi$; con $V(0) = 0\,\hat r + V_0\,\hat\phi = L\dot\theta_0\,\hat r + L\dot\phi_0 sen(\pi/2)\hat\phi \Rightarrow \dot\theta_0 = 0 \quad y \quad \dot\phi_0 = \dfrac{V_0}{L}$

$$\Rightarrow C = LV_0 = L^2 sen^2(\theta)\dot\phi \quad \text{para todo el movimiento} \;\Rightarrow\; \dot\phi(\theta) = \frac{V_0}{Lsen^2\theta} \Rightarrow \dot\phi^2(\theta) = \frac{V_0^2}{L^2 sen^4\theta} \qquad (4)$$

Reemplazando el valor obtenido, en la ecuación (2) se obtiene $\ddot\theta$

$$mgsen\theta = mL\ddot\theta - mL\frac{V_0^2}{L^2 sen^4\theta}sen\theta\cos\theta \;\Rightarrow\; \ddot\theta = \frac{g}{L}sen\theta + \frac{V_0^2}{L^2 sen^3\theta}\cos\theta \qquad (5)$$

Integrando la ecuación (4) se obtiene $\dot\theta$

$$\dot\theta\, d\dot\theta = \frac{g}{L}sen\theta\, d\theta + \frac{V_0^2}{L^2 sen^3\theta}\cos\theta\, d\theta \;\Rightarrow\; \int_{\dot\theta(0)=0}^{\dot\theta(t)}\dot\theta\, d\dot\theta = \int_{\theta(0)=\frac{\pi}{2}}^{\theta(t)}\frac{g}{L}sen\theta\, d\theta + \frac{V_0^2}{L^2}\int_{\theta(0)=\frac{\pi}{2}}^{\theta(t)}\frac{\cos\theta}{sen^3\theta}d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\dot\theta^2}{2} = -\frac{g}{L}\cos\theta + \frac{V_0^2}{L^2}\left[-\frac{1}{2sen^2\theta}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}$$

$$\dot\theta^2 = -\frac{2g}{L}\cos\theta + \frac{V_0^2}{L^2}\left[1 - \frac{1}{sen^2\theta}\right] = -\frac{2g}{L}\cos\theta + \frac{V_0^2}{L^2}\left[\frac{sen^2\theta - 1}{sen^2\theta}\right] = -\frac{2g}{L}\cos\theta - \frac{V_0^2}{L^2}\left[\frac{\cos^2\theta}{sen^2\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \dot\theta = \frac{1}{L}\sqrt{-2gL\cos\theta - V_0^2\cot an^2\theta} \qquad (6)$$

<u>El análisis que se plantea a continuación no formaba parte del control</u>.

Detengámonos en el valor obtenido en (6) para $\dot\theta$. Observemos que para que este valor exista, el término que está dentro de la raíz debe ser no negativo.
Se debe cumplir que:

$$\frac{2g}{L}\cos\theta + \frac{V_0^2}{L^2}\left[\frac{\cos^2\theta}{sen^2\theta}\right] \le 0 \quad \text{es decir :} \quad \frac{V_0^2}{L}\left[\frac{\cos^2\theta}{sen^2\theta}\right] \le -2g\cos\theta$$

la primera condición que vemos es que cosθ ≤ $(\cos\theta)_{MÁX}$ = 0, lo que significa que los valores de θ deben ser mayores o iguales que π/2 (o sea la barra no sube).

la segunda condición, la obtenemos de la desigualdad. Dividiendo por cosθ (recordando que cada vez que dividamos por un número negativo nos cambia la desigualdad a ≥ o a ≤) , y sustituyendo $sen^2\theta$ por $(1 - \cos^2\theta)$, nos resulta la siguiente inecuación para la variable cosθ.

$$\cos^2\theta - \frac{V_0^2}{2gL}\cos\theta - 1 \leq 0$$

La que se resuelve usando la fórmula de la ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son:

$$x_1 = \frac{V_0^2}{4gL} + \sqrt{\left(\frac{V_0^2}{4gL}\right)^2 + 1} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{V_0^2}{4gL} - \sqrt{\left(\frac{V_0^2}{4gL}\right)^2 + 1}$$

Entonces, la inecuación en la variable cosθ la podemos expresar como $(\cos\theta - x_1)(\cos\theta - x_2) \leq 0$.
De las raíces obtenidas vemos que x_1 es positiva y x_2 es negativa. Como además $\cos\theta \leq 0$, entonces el término $(\cos\theta - x_1)$ es negativo. Por lo tanto, para que el producto $(\cos\theta - x_1)(\cos\theta - x_2)$ sea negativo, el término $(\cos\theta - x_2)$ debe ser positivo.

Entonces la segunda condición es: $(\cos\theta - x_2) \geq 0$, es decir: $\cos\theta \geq (\cos\theta)_{MÍN} = \frac{V_0^2}{4gL} - \sqrt{\left(\frac{V_0^2}{4gL}\right)^2 + 1}$

Por lo tanto hay un valor máximo que puede bajar la barra.

- Supongamos que el valor de g creciera mucho en comparación con los demás parámetros ($g \to \infty$). Entonces $(\cos\theta)_{MÍN} \to -1$, es decir el movimiento de la barra tiende a la posición vertical.
- Supongamos que el valor de V_0 es muy grande en comparación con los demás parámetros ($V_0 \to \infty$). Entonces $(\cos\theta)_{MÍN} \to 0$, es decir el movimiento de la barra tiende a quedarse en el plano donde $\theta = \pi/2$.

<u>Volviendo al Control:</u>

Reemplazando (4) y (6) en las expresiones de velocidad y aceleración en coordenadas esféricas, se tiene:

$$\vec{v}(t) = L\dot{\theta}\hat{\theta} + L\dot{\phi}sen\theta\,\hat{\phi} = L\frac{1}{L}\sqrt{-V_0^2\cot an^2\theta - 2gL\cos\theta}\,\hat{\theta} + L\frac{V_0}{Lsen^2\theta}sen\theta\,\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \sqrt{-V_0^2\cot an^2\theta - 2gL\cos\theta}\;\hat{\theta} + \frac{V_0}{sen\theta}\hat{\phi}}$$

$$\vec{a}(t) = -\left(L\dot{\phi}^2 sen^2\theta + L\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(L\ddot{\theta} - L\dot{\phi}^2 sen\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + 0\,\hat{\phi}$$

$$\vec{a}(t) = -\left(L\frac{V_0^2 sen^2\theta}{L^2 sen^4\theta} + L\left(-\frac{2g}{L}\cos\theta - \frac{V_0^2}{L^2}\frac{\cos^2\theta}{sen^2\theta}\right)\right)\hat{r} + \left(L\left(\frac{g}{L}sen\theta + \frac{V_0^2}{L^2 sen^3\theta}\cos\theta\right) - L\frac{V_0^2}{L^2 sen^4\theta}sen\theta\cos\theta\right)\hat{\theta}$$

$$\vec{a}(t) = -\left(\frac{V_0^2 sen^2\theta}{Lsen^4\theta} - \frac{V_0^2\, sen^2\theta\cos^2\theta}{L\,sen^4\theta} - 2g\cos\theta\right)\hat{r} + (gsen\theta)\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}(t) = \left[-\frac{V_0^2}{L} + 2g\cos\theta\right]\hat{r} + gsen\theta\,\hat{\theta}}$$

c) La tensión de la barra: Despejando T de (1) y reemplazando los valores para $\dot{\theta}^2$ y $\dot{\phi}^2$ se obtiene:

$$-T + mg\cos(\pi - \theta) = -T - mg\cos\theta = m\,a_r \quad \Rightarrow \quad T = -m\,a_r - mg\cos\theta$$

Reemplazando la expresión de a_r => $\boxed{\vec{T} = m\left[\frac{V_0^2}{L} - 3\,mg\cos(\theta)\right]\hat{r}}$