

# Capítulo 5

## Equilibrio y Oscilaciones

### 5.1. Energía potencial y equilibrio

#### 5.1.1. Punto de equilibrio

La energía mecánica total de un cuerpo cuya fuerza total es conservativa es

$$E_{\text{mec total}} = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) \quad (5.1.1)$$

y esta cantidad es fija durante toda la evolución del sistema, es decir, si se la calcula en cualquier momento de su historia se obtiene el mismo valor. En ese sentido puede decirse que queda determinada por las condiciones iniciales.

En general el movimiento no puede extenderse en cualquier dirección arbitrariamente. Al despejar la magnitud de la velocidad:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E_{\text{mec total}} - U(\vec{r})} \quad (5.1.2)$$

que obviamente es real y positiva—se observa que en ningún momento la energía potencial  $U$  puede ser mayor que la energía total  $E$ . Si la partícula alcanza un punto en el cual se cumple que  $E = U$ , este es un punto con velocidad nula pero normalmente la fuerza

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) \quad (5.1.3)$$

no lo es. El movimiento entonces se reinicia hacia puntos donde  $E > U$ .

» El gradiente de una función escalar cualquiera  $h(\vec{r})$  siempre apunta en la dirección en que la función  $h$  crece más rápido, esto es, en la dirección en que su derivada es más grande y positiva. Por ejemplo si  $h(x, y)$  es la función altura sobre el nivel del mar de la descripción de una zona de nuestra geografía en un mapa (plano  $XY$ ), entonces  $\nabla h$  apunta en la dirección en que la altura crece más rápido.

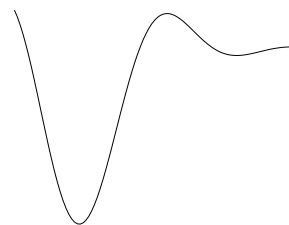
El gradiente de la función energía potencial apunta en la dirección en que el potencial crece con mayor derivada, pero como en (5.1.3) hay un signo menos, se concluye que la fuerza apunta en la dirección opuesta, en la dirección en que  $U$  decrece con mayor derivada.

Se llama punto de equilibrio a una posición  $\vec{r}_e$  en la cual la fuerza total es cero:  $\nabla U(\vec{r}_e) = 0$ . Para que el equilibrio sea *estable* se debe cumplir que al colocar en reposo a la partícula en un punto suficientemente cercano a  $\vec{r}_e$ , la partícula adquiera un movimiento oscilatorio en torno a ese punto.

### 5.1.2. Análisis unidimensional

En un caso unidimensional la energía potencial es una simple función  $U(x)$  y la fuerza es  $F = -dU/dx$ . La fuerza apunta hacia la izquierda en los puntos en que  $U$  es creciente y apunta hacia la derecha en los puntos donde es decreciente.

En particular, en la vecindad de un mínimo  $x_e$  la fuerza que hay a la izquierda de este punto apunta hacia la derecha (también hacia  $x_e$ ) y la fuerza que hay a la derecha de  $x_e$  apunta hacia la izquierda (o sea hacia  $x_e$ ). Esto permite entender porqué un mínimo de  $U$  es un punto de equilibrio.



Si una partícula está sometida a una fuerza total conservativa, se llama *punto de equilibrio estable* a un punto  $\vec{r}_e$  para el cual se cumple que:

(i) si la partícula es dejada en reposo en ese punto permanece en reposo en él; (ii) si se la deja en  $\vec{r}_e$  con una velocidad suficientemente pequeña, la partícula oscila en torno a ese punto.

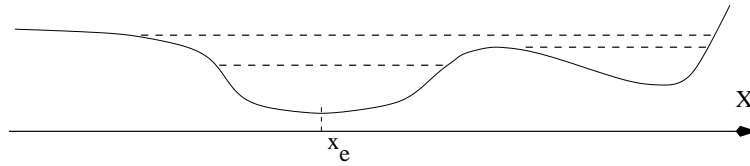
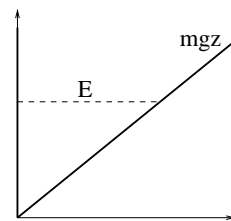


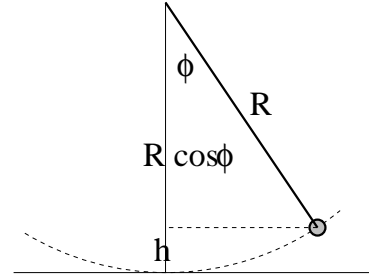
Figura 5.1: Ejemplo de función  $U(x)$  con dos mínimos. Las líneas a trazos representan algunos valores posibles de la energía mecánica total. Puesto que (5.1.1) asegura que esta energía es siempre mayor, a lo sumo igual, a  $U$  entonces para los valores indicados de  $E$  el movimiento no puede extenderse indefinidamente en el eje  $x$ .

Como la fuerza total es conservativa, existe un potencial  $U(x)$  y la fuerza total es  $F = -dU/dx$ . En las zonas donde  $U$  es creciente  $F$  es negativo (es decir, la fuerza apunta hacia la izquierda) y en las zonas donde  $U$  es decreciente,  $F$  es positivo. Esto muestra que si  $x_e$  es un mínimo de  $U$  la fuerza en una zona en torno a  $x_e$  apunta hacia  $x_e$  y es nula justo en  $x_e$ . Esto quiere decir que si se da como condición inicial  $x(0) = x_e$  y una velocidad suficientemente pequeña, entonces la partícula va a ser frenada por la fuerza hasta que invierta el sentido de su movimiento. Debido a (5.1.1), en el punto  $x_1$  en el cual la velocidad se hace cero se cumple que  $E = U(x_1)$ . En la figura 5.1 se puede ver gráficamente en qué puntos la partícula soltada desde  $x_e$  con la energía total indicada por línea de trazos, llega un punto en que su velocidad se hace cero—los *puntos de retorno*—y se devuelve. Para los tres valores de  $E$  indicados en la figura el movimiento ocurre en una zona limitada del eje  $X$ . También se puede adivinar que si la energía es suficientemente alta el movimiento puede ser no acotado.

EJEMPLO: La energía potencial debida a la fuerza peso es  $mgz$ . Una pelota ideal rebotando *ad infinitum* contra el suelo está sometida a esta energía potencial más la que representa el suelo:  $U(z > 0) = mgz$  y  $U(0) = \infty$ . Dada una energía cinética inicial, la partícula tiene una energía total  $E$  fija para siempre y, como se ve en el diagrama, el movimiento es acotado entre el suelo ( $z = 0$ ) y una altura máxima.



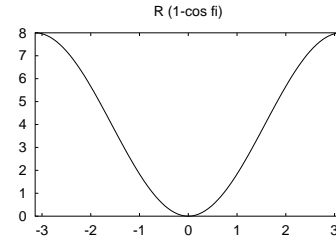
OTRO EJEMPLO: Un caso muy ilustrativo es el del péndulo plano formado por una vara rígida sin masa de largo  $R$  en cuyo extremo hay una masa puntual  $m$ . La energía cinética como siempre es  $K = \frac{1}{2}mv^2$  pero en este caso  $v = R\dot{\phi}$ . La energía potencial esencialmente es  $mgh$  y, como se ve de la figura,  $h = R(1 - \cos\phi)$ . El cero de energía potencial se ha escogido en el punto más bajo que tiene el recorrido de la masa  $m$ .



De aquí que la ecuación para la energía total conservada sea

$$E_{MT} = \frac{m}{2} R^2 \dot{\phi}^2 + mgR(1 - \cos\phi) \quad (5.1.4)$$

que muestra que el potencial en este caso es  $mgR(1 - \cos\phi)$  y cuya forma se puede apreciar en la segunda figura adjunta.



Se puede comprobar que derivando (5.1.4) una vez con respecto al tiempo, se obtiene la conocida ecuación para el péndulo.

Y OTRO EJEMPLO MÁS: Consideremos un caso con energía potencial  $U$  dado por

$$U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \quad (5.1.5)$$

y  $x$  siempre positivo. Este potencial, representado en la figura 5.2 es divergente en el origen, tiene un único mínimo en  $x_e = 2b/a$  y tiende a cero cuando  $x$  crece indefinidamente. Para cualquier valor negativo de la energía total el movimiento está acotado entre dos valores  $x_{\min}$  y  $x_{\max}$ , (puntos de retorno)

$$x_{\min} = \frac{a}{2|E|} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4|E|b}{a^2}} \right), \quad x_{\max} = \frac{a}{2|E|} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4|E|b}{a^2}} \right) \quad (5.1.6)$$

Cuando la partícula alcanza uno de estos valores extremos la velocidad se hace cero pero  $dU/dx \neq 0$ , es decir, la fuerza es no nula y la partícula tiene una aceleración que apunta alejándose del valor extremo. En una

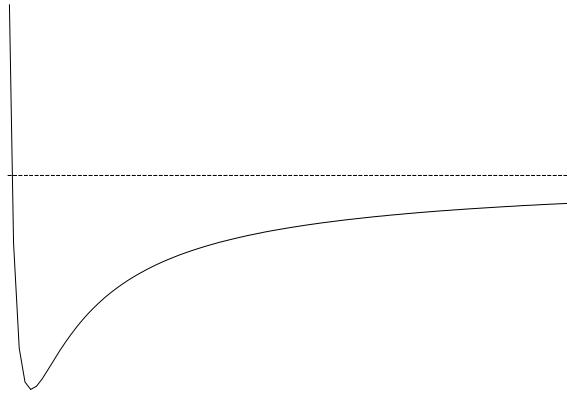


Figura 5.2: El potencial  $-\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$  tiene un solo mínimo, en  $x = x_e = 2b/a$ , y tiende a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ .

situación así, el movimiento consiste en ir y volver entre estos dos valores extremos de  $x$ . El movimiento es periódico pero en general es diferente a un movimiento armónico simple.

En cambio, para cualquier valor positivo de la energía el movimiento tiene una cota inferior  $x_{\min}$  pero no tiene cota superior: una vez que la partícula adquiere velocidad hacia la derecha no cambiará más la dirección de su movimiento.

Si se escoge un punto cualquiera  $x = x_0$  como posición inicial, ¿cuál es la mínima velocidad inicial para que la partícula logre tener un movimiento no acotado hacia la derecha? La respuesta se obtiene exigiendo que en el momento inicial (y siempre) la energía sea no negativa, es decir,  $\frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) \geq 0$ , es decir,

$$v_0^2 \geq -\frac{2}{m}U(x_0). \quad (5.1.7)$$

En las zona en que  $U(x_0)$  es positivo esta relación no es restricción alguna y la partícula escapa a infinito siempre; en cambio en la gran zona en que  $U(x_0)$  es negativo (5.1.7) da una cota a la rapidez inicial. Esta cota inferior se denomina *velocidad de escape*. ◀

» Completamente en general la *velocidad de escape*—que depende

de la posición inicial  $\vec{r}_0$ —es la velocidad mínima necesaria para que la partícula pueda tener movimiento no acotado.

Para una función de energía potencial arbitraria  $U(x)$  que tiende a un valor constante  $U_\infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$  la velocidad de escape en un punto  $x$  cualquiera está dada por

$$v_{\text{esc}}(x) = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{U_\infty - U(x)} \quad (5.1.8)$$

♣ *Determine el valor en metros por segundo de la velocidad para escapar de la atracción gravitacional de la Tierra partiendo desde el nivel del mar.*

### Integración de caso conservativo unidimensional

La ecuación (5.1.2) unidimensional en un rango en que la velocidad es

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}$$

la cual puede escribirse en la forma integral

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (5.1.9)$$

válida, como se ha dicho, mientras la velocidad no cambie de signo. Esta es una solución formal de todos los problemas unidimensionales.

### Caso sencillo en que la energía no se conserve

En lo anterior se ha explotado el análisis en el que las fuerzas son todas conservativas. Sin embargo si se toma el caso en que se agrega una fuerza constante no conservativa como es el caso del roce dinámico, también se tiene un gráfico de energía suficientemente sencillo para poder hacer un análisis fácil de interpretar.

Considérese el caso de un oscilador sobre un plano horizontal:  $m\ddot{x} = -kx$  al que se agrega la fuerza de roce dinámico. Este roce apunta hacia la

izquierda cuando es el movimiento es hacia la derecha ( $\dot{x} > 0$ ) y viceversa, es decir,  $F_{\text{roce}} = -\varepsilon \mu mg$  donde  $\varepsilon$  es el signo de  $\dot{x}$ . Mientras el desplazamiento es hacia la derecha, la fuerza es negativa y el trabajo que esta fuerza no conservativa efectúa es proporcional a  $x$ . En efecto, de la ecuación de movimiento completa:  $m\ddot{x} = -kx - \varepsilon \mu mg$  se puede integrar una vez para obtener

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = -\frac{k}{2}x^2 - \varepsilon \mu mg x$$

que se puede escribir como

$$E_{MT}(t) = E_{MT}^{(0)} - \varepsilon \mu mg x(t)$$

Esta última relación describe la forma como la energía mecánica total inicial  $E_{MT}^{(0)}$  va disminuyendo a medida que el sistema evoluciona.

♣ *Resuelva un caso específico para el cual pueda hacer un gráfico que ilustre la evolución  $E_{MT}(t)$ .*

### 5.1.3. Discusión avanzada: Tiempos de frenado en puntos de retorno

*Estas notas no son necesarias para la comprensión de los capítulos posteriores, pero pueden aportar a la comprensión de ciertos temas avanzados de este capítulo.*

Cuando se analiza la dinámica de una partícula usando diagramas de energía en casos unidimensionales o en tres dimensiones con conservación de momentum angular, surge el concepto de *punto de retorno*. Si la partícula tiene una energía constante  $E$ , los puntos de retorno son aquellos donde el potencial (o el potencial efectivo) se iguala a la energía  $U(x^*) = E$ . Al acercarse a un punto de retorno, la rapidez de la partícula se hace cada vez más pequeña hasta anularse en  $x^*$ . Una pregunta que surge es cuánto tiempo tarda la partícula en frenarse para luego rebotar y si ese tiempo es finito o infinito. La respuesta depende de las propiedades del punto de retorno.

#### Primer caso: El punto de retorno no corresponde a un máximo del potencial

Se considera el caso representado en la figura, donde la partícula viaja hacia la derecha. Si  $x_0$  es la posición inicial de la partícula, se puede determinar el tiempo que tarda en llegar a  $x^*$  utilizando la ecuación de la energía, donde se despeja la velocidad

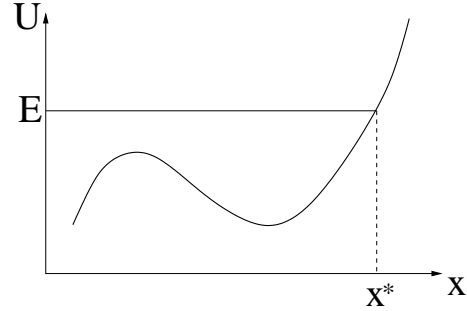
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

que también se puede escribir como

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \frac{dx}{dt} = 1$$

Integrando la última expresión entre  $t = 0$  y  $t^*$ , el instante de detención, y usando el teorema del cambio de variable, se tiene

$$\int_{x_0}^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = t^*$$



Para calcular esta última integral se necesita conocer la forma explícita del potencial. Sin embargo, es posible decir si es finita o no. Como  $x^*$  no corresponde a un máximo del potencial, localmente  $U(x)$  se puede aproximar por una línea recta  $U(x) \approx E + U'(x^*)(x - x^*)$ . Luego, si se considera una distancia  $\delta$  pequeña, se tiene que

$$t^* = \int_{x_0}^{x^*-\delta} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} + \int_{x^*-\delta}^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[-U'(x^*)(x - x^*)]}}$$

Haciendo el cambio de variable  $y = x^* - x$  en la segunda integral se obtiene

$$\begin{aligned} t^* &= \int_{x_0}^{x^*-\delta} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} + \int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}U'(x^*)y}} dy \\ &= \int_{x_0}^{x^*-\delta} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} + \sqrt{\frac{2m\delta}{U'(x^*)}}, \end{aligned}$$

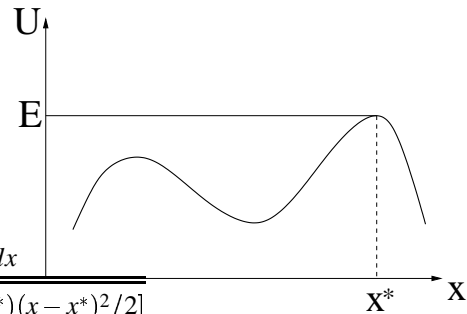
que es un valor finito.

Luego, en el caso analizado, el tiempo que tarda la partícula en frenarse es finito.

### Segundo caso: El punto de retorno es un máximo del potencial

Al igual que en el caso anterior, hacemos una aproximación para el potencial cerca del punto de retorno. Como es un máximo, la aproximación correspondiente (serie de Taylor) da una parábola:  $U(x) \approx E + U''(x^*)(x - x^*)^2/2$ , con  $U''(x^*) < 0$ . De esta forma se tiene

$$t^* = \int_{x_0}^{x^*-\delta} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} + \int_{x^*-\delta}^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[-U''(x^*)(x - x^*)^2/2]}}$$





$$= \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} + \sqrt{\frac{m}{-U''(x^*)}} \int_0^\delta \frac{dy}{y}$$

La última integral diverge, lo que muestra que en esta condición la partícula tarda un tiempo infinitamente grande en detenerse completamente.

Un ejemplo de esta última situación corresponde a un péndulo (barra rígida y masa en el extremo) que es soltado desde el reposo, con la partícula en la altura máxima. Demuestre que la partícula tarda un tiempo infinito en volver a la posición vertical. También tarda un tiempo infinito en despegarse de la cúspide.

## 5.2. Oscilaciones en torno a un punto de equilibrio.

### 5.2.1. Oscilaciones 1D.

Consideremos el caso de un potencial  $U(x)$  que tiene un mínimo en  $x = x_e$ . No tendrá importancia si  $U$  tiene además otros mínimos. Puesto que se trata de un mínimo, está garantizado que  $(dU/dx)_{x=x_e} = 0$ . Supondremos que el movimiento tiene una energía total levemente superior a  $U(x_e)$ , es decir, la energía cinética es siempre muy pequeña y la partícula permanece todo el tiempo muy cerca de  $x = x_e$ . El punto  $x_e$  tiene a ambos lados puntos de retorno muy cercanos. En tal caso, la expansión de  $U(x)$  en torno a  $x_e$  que solo llega hasta la segunda derivada de la función puede ser una excelente aproximación para  $U$ ,

$$U(x) \approx U(x_e) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=x_e} (x - x_e)^2 \quad (5.2.1)$$

Este potencial aproximado da como fuerza aproximada

$$F(x) = -k(x - x_e) \quad \text{con} \quad k = \left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=x_e} \quad (5.2.2)$$

que es la fuerza de un resorte de largo natural  $x_e$  y constante elástica dada por la segunda derivada de  $U$  evaluada en el mínimo.

Se ha obtenido que un sistema mecánico cualquiera, cuando está cerca de una posición de equilibrio puede ser descrito como el movimiento

de una masa unida a un resorte ideal. Esta aproximación es válida cuando el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio es pequeño. El estudio en detalle del movimiento de una partícula unida a un resorte describe, entonces, el movimiento de cualquier sistema mecánico cerca del equilibrio.

La ecuación de movimiento de la partícula cerca del punto de equilibrio es entonces

$$m\ddot{x} = -k[x(t) - x_e], \quad (5.2.3)$$

ecuación que fue estudiada en el capítulo 3, donde se obtuvo que el movimiento que resulta es una oscilación armónica en torno a  $x_e$  con una frecuencia característica dada por  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Luego, cuando una partícula se mueve en las cercanías de un punto de equilibrio, la fuerza puede ser aproximada por un resorte ideal y el movimiento que resulta es armónico simple. La frecuencia angular de oscilación en torno al punto de equilibrio estable está dada por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_e)}{m}} \quad (5.2.4)$$

que se llama la frecuencia de las pequeñas oscilaciones. Hay que notar que como  $x_e$  es un mínimo del potencial (equilibrio estable), la segunda derivada es positiva de  $U$ , lo que garantiza que la raíz existe.

En algunas situaciones la derivada  $U''$  en el punto de equilibrio es nula, resultando en oscilaciones no armónicas; por ejemplo, en el movimiento en torno al origen en el caso  $U = ax^4$ . Este caso, sin embargo, no se estudiará en este curso.

» Cuando una partícula se mueve muy cerca del punto en que  $U$  tiene un mínimo,  $U = U_{\min}$ , y la energía total es levemente superior a este valor  $U_{\min}$ , el movimiento de la partícula es aproximadamente un movimiento armónico simple en torno al punto de equilibrio.

El movimiento oscilatorio que ocurre en estas circunstancias se denomina pequeñas oscilaciones en torno a un punto de equilibrio.

**Cuando la coordenada relevante no es una longitud:** Si la energía de un sistema se expresa en términos de una coordenada que no es una longitud, como en,

$$E = \frac{\alpha}{2} \dot{\phi}^2 + U(\phi) \quad (5.2.5)$$

la ecuación dinámica,  $dE/dt = 0$ , aquí resulta ser  $\ddot{\phi} = -\frac{1}{\alpha} U'$ . Si  $\phi = \phi_e$  es un punto de equilibrio estable, se cumple que  $U'(\phi_e) = 0$  y  $U''(\phi_e) > 0$  (condición de mínimo). La ecuación dinámica en una pequeña vecindad del mínimo en  $\phi_e$  aproximadamente es  $\ddot{\phi} \approx -\frac{1}{\alpha} U''(\phi_e) (\phi - \phi_e)$ , que se reconoce como una ecuación de movimiento armónico simple con frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(\phi_e)}{\alpha}} \quad (5.2.6)$$

En este caso la prima indica  $d/d\phi$ .

### 5.2.2. Oscilador forzado

En variadas ocasiones una partícula que se encuentra cerca de un punto de equilibrio estable es forzada externamente. El movimiento que resulta es en general complejo, dependiendo del tipo de fuerza externa que actúa y de la amplitud de ésta. Si la amplitud de la fuerza no es muy grande, entonces la partícula se alejará poco del punto de equilibrio estable, pudiéndose aplicar la teoría de las pequeñas oscilaciones. La fuerza externa puede ser de muchos tipos, pero un caso particularmente interesante corresponde a cuando esta depende explícitamente del tiempo. Un ejemplo cotidiano es cuando un temblor hace vibrar a los edificios en torno a sus posiciones de equilibrio vertical.

Consideremos una partícula de masa  $m$  en una dimensión que se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa que viene de un potencial  $U$  el cual tiene un punto de equilibrio estable en  $x_e$ , más una fuerza que depende del tiempo pero no de la posición  $F_e(t)$ . Cerca del punto de equilibrio estable, la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} = -k(x - x_e) + F_e(t)$$

donde

$$k = \left( \frac{d^2 U}{dx^2} \right)_{x=x_e}$$

Como el movimiento natural (sin forzamiento) de la partícula es armónico, resulta natural estudiar el caso en que la fuerza externa también es armónica (sinusoidal). Diremos que la fuerza externa se puede escribir como  $F_e(t) = kQ \sin(\omega t)$ , donde  $Q$  mide la amplitud de la fuerza y  $\omega$  es la frecuencia angular de la misma, que no necesariamente coincide con la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones.

La ecuación de movimiento que resulta es

$$m\ddot{x} = -k[x(t) - Q \sin(\omega t)] \quad (5.2.7)$$

donde por simplicidad se puso  $x_e = 0$ . Si  $x_e \neq 0$ , entonces basta con hacer el cambio de variables  $y(t) = x(t) - x_e$  y se obtiene la misma ecuación.

Este tipo de ecuación lineal inhomogénea tiene la siguiente propiedad. Si dos funciones  $\bar{x}(t)$  y  $x(t)$  la satisfacen, entonces su diferencia,

$$y(t) \equiv x(t) - \bar{x}(t) \quad (5.2.8)$$

satisface la correspondiente ecuación homogénea

$$m\ddot{y}(t) = -ky(t) \quad (5.2.9)$$

cuya solución, como ya sabemos, es de la forma  $y(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$ .

A continuación se verá que existe una solución de (5.2.7), que se denominará  $\bar{x}(t)$ , que tiene la forma

$$\bar{x}(t) = D \sin \omega t \quad (5.2.10)$$

siempre y cuando  $D$  tenga un valor muy preciso. Puesto que  $\ddot{\bar{x}} = -\omega^2 D \sin \omega t$ , entonces al exigir que se satisfaga (5.2.7) se deduce que

$$D = \frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (5.2.11)$$

y la solución  $x(t)$  general es  $x = y + \bar{x}$ ,

$$x(t) = \frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t + A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \quad (5.2.12)$$

El primer término de la solución tiene frecuencia angular  $\omega$  asociada a la *forzante* y tiene coeficiente totalmente fijo, mientras que el resto tiene la

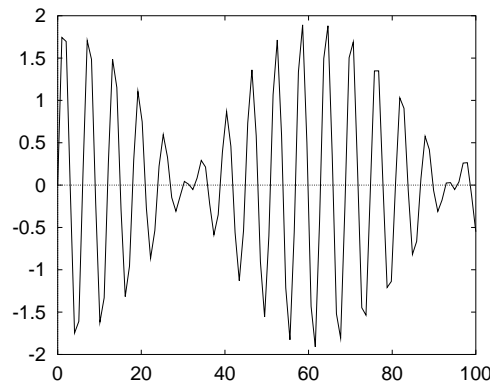


Figura 5.3: Un oscilador de frecuencia natural  $\omega_0$  forzado por una fuerza periódica con frecuencia  $\omega$  cercana a la frecuencia  $\omega_0$  muestra un comportamiento temporal en paquetes como se aprecia en la figura. Si dos cuerdas de guitarra se afinan a notas muy cercanas el sonido que resulta al tocarlas simultáneamente tiene esta propiedad que se llama de *batido*, claramente audible. Esta es una propiedad de la solución (5.2.12).

frecuencia  $\omega_0$  asociada al sistema masa-resorte  $(m, k)$ . La superposición de dos dependencias temporales con distinta frecuencia puede producir el fenómeno de *batido* que se ilustra en la figura 5.3: las funciones se suman y restan sucesivamente, produciendo una función con una envolvente de período mucho más largo que las funciones que lo componen.

Esta solución tiene una propiedad muy especial. El punto oscilante puede llegar a alejarse bastante de su posición de reposo debido al primer término en (5.2.12). Si se comienza a variar lentamente la frecuencia angular  $\omega$  de la *forzante* acercando  $\omega$  a  $\omega_0$ , el coeficiente  $\frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0^2 - \omega^2}$  crece indefinidamente, permitiendo que la amplitud de las oscilaciones también crezca sin límite. La amplitud  $\frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0^2 - \omega^2}$  del término resonante cambia de signo cuando se pasa de  $\omega < \omega_0$  a  $\omega > \omega_0$ .

En un sistema real este proceso tiene un límite porque, si bien para pequeñas oscilaciones (amplitud pequeña) un sistema puede comportarse como aquel que hemos estado describiendo, para amplitudes más grandes la ley de fuerza se hace notoriamente diferente y el sistema deja de comportarse en forma puramente elástica.

El movimiento descrito por (5.2.12) es una primera forma de ver un fenómeno de enorme importancia práctica llamado *resonancia*. Cuando la frecuencia de una forzante  $\omega$  coincide (o es muy parecida) a la frecuencia natural  $\omega_0$  del sistema, se produce una *resonancia*. Desde el punto de vista meramente matemático (5.2.12) es divergente si  $\omega \rightarrow \omega_0$ . En la práctica, como se discutirá más adelante, el sistema oscila mucho más fuertemente.

Este fenómeno se puede ver en numerosos ejemplos de la vida cotidiana.

- Cuando el ruido de un motor acelerando llega a una ventana, el vidrio suele, en un determinado momento, vibrar fuertemente. Esto se debe a que el panel de vidrio de esa ventana tiene una frecuencia natural de vibración y el ruido que llega a través del aire (ondas de compresión) actúa como forzante. La frecuencia del motor va variando, porque está acelerando, y en algún momento coincide con la frecuencia del panel.
- El movimiento de cabeceo de un barco tiene una frecuencia natural de oscilación. Si el barco se ve enfrentado a un oleaje suave que tiene la misma frecuencia, puede llegar a cabecear tan fuerte que podría hundirse. Hundimiento en día claro y tranquilo.
- Por lo compleja que es la estructura de un edificio, estos tienen varias frecuencias naturales de vibración. Si ocurriera que la frecuencia de un temblor coincide con alguna de las frecuencias naturales del edificio este se puede llegar a romper. Técnicas actuales permiten que esto no ocurra.
- En un camino irregular no muy duro las ruedas de los automóviles rebotan y luego golpean fuertemente al camino. La repetición de este proceso termina haciendo una superficie ondulada bastante regular que se conoce como *calamina*. Los vehículos que transitan sobre un camino calaminado pueden entrar en resonancia y deben cambiar de velocidad para evitarlo.

Un ejemplo mecánico simple que presenta forzamiento ocurre cuando se considera el caso de un resorte unidimensional de largo natural nulo y en ausencia de gravedad, cuyo extremo  $A$  extremo oscila en torno al origen:

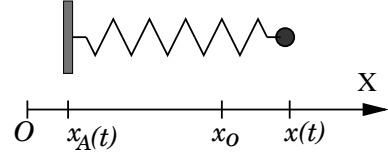
$x_A(t) = Q \sin(\omega t)$  con frecuencia angular  $\omega$ , en general, distinta a  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

El resultado efectivo es que aparece un nuevo término de fuerza en la ecuación de movimiento, y es una fuerza oscilante que llamaremos *forzante*.

La ecuación de movimiento es  $m\ddot{x} = -k(x(t) - x_A(t))$ . Al reemplazar el movimiento del extremo se obtiene

$$m\ddot{x} = -k(x(t) - Q \sin(\omega t))$$

que es la ecuación ya vista del oscilador armónico forzado.



El punto A se mueve oscilando en torno al origen:  $x_A = Q \sin(\omega t)$ .

### 5.2.3. Oscilador amortiguado

Como se vio en las secciones anteriores, cualquier partícula cerca de un punto de equilibrio estable presenta oscilaciones armónicas con una frecuencia bien característica. En muchas ocasiones, además de las fuerzas conservativas que dan lugar al potencial que presenta el punto de equilibrio estable, hay roce viscoso. Como sabemos, el roce viscoso tiende a frenar a las partículas y por lo tanto a disminuirles su energía. Si una partícula comienza su movimiento cerca de un punto de equilibrio estable  $x_e$  y además hay roce viscoso, parece natural esperar que haya oscilaciones en torno a  $x_e$  y al mismo tiempo que disminuya su energía, manteniéndose siempre cerca del punto de equilibrio. La situación real es más compleja pudiendo no haber oscilaciones del todo, pero como se verá, la partícula se mantiene cerca del punto de equilibrio.

De esta forma, la ecuación de movimiento que describe a una partícula cerca de un punto de equilibrio estable en presencia de roce viscoso es

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t) \quad (5.2.13)$$

o equivalentemente

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (5.2.14)$$

donde

$$k = \left( \frac{d^2 U}{dx^2} \right)_{x=x_e=0}$$

y se ha escogido el origen en la posición de equilibrio ( $x_e = 0$ ). Nuevamente, si no fuese así, un cambio de variable permite obtener la ecuación anterior.

Para resolver este tipo de ecuaciones primero se plantea la ecuación algebraica  $z^2 + \frac{c}{m}z + \omega_0^2$ , cuyas raíces son  $-\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$ , que pueden ser complejas. En efecto, la naturaleza de las soluciones de (5.2.14) depende del signo de

$$\Delta = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2 \quad (5.2.15)$$

Caso  $\Delta > 0$ : Este caso, denominado *caso sobreamortiguado*, la solución se puede escribir en general en la forma

$$x(t) = \left( A_1 e^{t\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}} + A_2 e^{-t\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-\frac{c}{2m}t} \quad (5.2.16)$$

El factor exponencial que está fuera del paréntesis domina y la función  $x(t)$  decrece exponencialmente cuando el tiempo crece. Las constantes  $A_1$  y  $A_2$  se determinan cuando se conoce las condiciones iniciales. Compruebe que se cumple que

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{x_0}{2} + \frac{cx_0}{4m\sqrt{\Delta}} + \frac{v_0}{2\sqrt{\Delta}} \\ A_2 &= \frac{x_0}{2} - \frac{cx_0}{4m\sqrt{\Delta}} - \frac{v_0}{2\sqrt{\Delta}} \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

A pesar de su nombre, este sistema no oscila porque el efecto de la amortiguación es muy fuerte.

Caso  $\Delta < 0$ : En este caso los efectos de la amortiguación son menos intensos y el sistema oscila. La solución podría escribirse prácticamente en la misma forma que antes

$$x(t) = \left( A_1 e^{it\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} + A_2 e^{-it\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} \right) e^{-\frac{c}{2m}t}$$

pero como la solución debe ser real para que tenga sentido, entonces las constantes  $A_1$  y  $A_2$  deben ser complejas. Al exigir que  $x = x^*$  para todo  $t$  se deduce que  $A_1 = A_2^*$ . Para hacer explícita esta propiedad se cambia de notación,

$$A_1 = \frac{D}{2} e^{i\beta} \quad A_2 = \frac{D}{2} e^{-i\beta}$$



y entonces

$$x(t) = D e^{-\frac{c}{2m}t} \cos \left( t \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} + \beta \right) \quad (5.2.18)$$

solución que está representada en la figura adjunta.

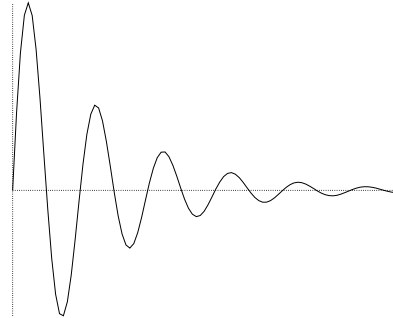
Se aprecia que la frecuencia angular de oscilación en este sistema es

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (5.2.19)$$

que es una frecuencia menor que  $\omega_0$ . Si el coeficiente de viscosidad

$c$  aumenta la frecuencia  $\omega_c$  disminuye aun más, es decir el período de oscilación  $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$  aumenta si  $c$  aumenta.

En este caso las dos constantes que deben ser fijadas una vez que se tiene las condiciones iniciales son  $D$  y  $\beta$ .



Las oscilaciones de un oscilador amortiguado van decreciendo con el tiempo, manteniendo su frecuencia tal como se describe en (5.2.18).

#### 5.2.4. Oscilador forzado y amortiguado

Finalmente, consideramos el caso general de una partícula que se mueve en proximidad de un punto de equilibrio estable, donde además hay roce viscoso y una fuerza externa periódica. La ecuación que describe este movimiento es

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t) + kQ \sin \omega t$$

que se escribe equivalentemente como

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 Q \sin \omega t \quad (5.2.20)$$

El último término es el que describe a la *forzante* periódica.

Tal como se comentó en la sección 5.2.2 estas ecuaciones lineales inhomogéneas tiene una solución general que se obtiene de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea (en este caso la del oscilador amortiguado sin forzar) más una solución particular de la ecuación inhomogénea.

Puesto que ya se conoce la solución general del oscilador amortiguado sin forzar solo resta calcular una solución de la ecuación inhomogénea (5.2.20). Ésta será obtenida a partir de suponer que existe solución  $x(t)$  de la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t - \delta) \\ &= A (\sin \omega t \cos \delta - \cos \omega t \sin \delta) \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

De donde es directo obtener que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \omega (\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta) \\ \ddot{x}(t) &= -A \omega^2 (\sin \omega t \cos \delta - \cos \omega t \sin \delta) \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

En lo que sigue se va a usar un parámetro  $q$  para describir el amortiguamiento, en lugar de  $c$ . La relación, por definición es

$$q = \frac{c \omega}{m}$$

Al reemplazar estas expresiones en (5.2.20) se obtiene una ecuación que se factoriza en dos partes, una proporsional a  $\cos \omega t$  y otra proporsional a  $\sin \omega t$ . Puesto que esta ecuación debe ser válida para todo tiempo, cada una de estas dos partes debe ser nula independientemente y se obtiene

$$q \cos \delta = (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta \quad (5.2.23)$$

$$\omega_0^2 Q = A [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + q \sin \delta] \quad (5.2.24)$$

De la primera de estas ecuaciones se despeja inmediatamente que

$$\tan \delta = \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (5.2.25)$$

y entonces

$$\sin \delta = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + q^2}}, \quad \cos \delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + q^2}} \quad (5.2.26)$$

Si el coeficiente de roce viscoso  $c$  se anula, es decir,  $q = 0$ , entonces el seno se anula y el coseno vale 1.

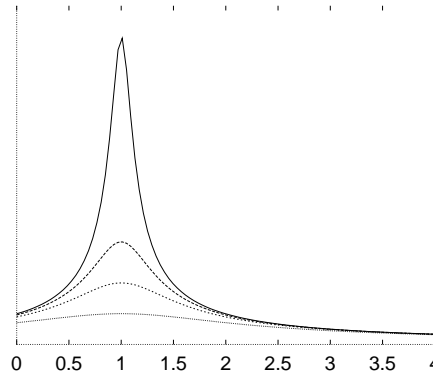


Figura 5.4: La amplitud  $A(\omega)$ , dada en (5.2.27), de un oscilador de frecuencia natural  $\omega_0$ , amortiguado y forzado por una fuerza periódica con frecuencia  $\omega$  (la *forzante*) muestra para diversos valores del parámetro de amortiguación  $q$  un máximo en  $\omega = \omega_r$  (definido en (5.2.28)). Mientras menor el amortiguamiento mayor es la amplitud  $A$

De (5.2.24) resulta (comparar con (5.2.11))

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega_0^2 Q}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + q \sin \delta} \\ &= \frac{\omega_0^2 Q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + q^2}} \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

y ahora se ve que el primer término en el denominador es siempre positivo tal como el segundo término. Entonces la amplitud  $A$  nunca es divergente. Su forma, como función de  $\omega$ , se muestra en la figura 5.4. La función  $A$  tiene un máximo cuando

$$\omega^2 = \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2 \left( \frac{c}{2m} \right)^2 \quad (5.2.28)$$

Esto contrasta con lo que ocurre con el oscilador forzado sin amortiguación donde la amplitud que resulta matemáticamente es divergente en la resonancia.

El valor de  $A$  en el punto  $\omega = \omega_r$  es

$$A = \frac{\omega_0 Q}{c} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{c^2}{4m^2}}} \quad (5.2.29)$$

que diverge en el caso de un oscilador forzado y no amortiguado, es decir, cuando  $c \rightarrow 0$ .

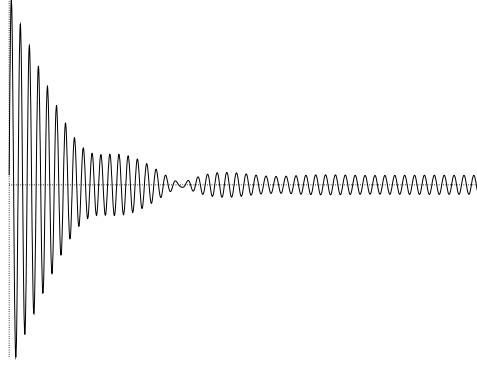


Figura 5.5: La función  $x(t)$  de un oscilador de frecuencia natural  $\omega_0$ , amortiguado y forzado por una fuerza periódica con frecuencia  $\omega$  (la *forzante*) muestra un comportamiento inicial transitorio donde las dos frecuencias compiten, pudiendo haber batido en esta etapa. A tiempos largos el comportamiento es oscilatorio simple con la frecuencia  $\omega$  de la forzante como se desprende de (5.2.30).

La solución general de la ecuación del oscilador forzado y amortiguado se expresa como la solución general de la ecuación homogénea más la solución particular recién obtenida. Suponiendo que no hay sobreamortiguación esta solución es

$$x(t) = D \cos \left( t \sqrt{\omega_0^2 - \left( \frac{c}{2m} \right)^2} + \beta \right) \exp \left[ -\frac{c}{2m} t \right] + \frac{\omega_0^2 Q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left( \frac{\omega c}{m} \right)^2}} \sin(\omega t - \delta) \quad (5.2.30)$$

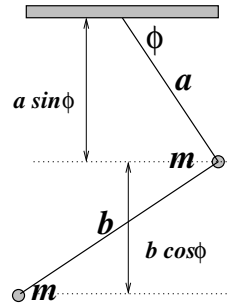
La primera parte de esta expresión, que proviene de la ecuación lineal homogénea (oscilador no forzado), decrece con el tiempo en forma exponencial. A tiempos largos, entonces, la solución que domina sin competencia es la parte proporcional a  $\sin(\omega t - \delta)$ . A largo plazo la forzante impone totalmente la frecuencia de oscilación.

### 5.2.5. Ejemplo de energía y pequeñas oscilaciones

Para ilustrar varios de los conceptos recientes se analizará el caso de un péndulo que tiene dos masas en varas que forman un ángulo recto, como muestra la figura. Veremos cuál es el ángulo máximo si el sistema se suelta del reposo con  $\phi = 0$ . Veremos cuánto vale la velocidad angular cuando  $\phi = \pi/2$  y finalmente veremos la frecuencia en el caso de pequeñas oscilaciones en torno al ángulo  $\phi_e$  de equilibrio estático.

La energía del sistema es la suma  $K$  de las energías cinéticas más la suma  $U$  de las energías potenciales:

$$E = \frac{m}{2} (a\dot{\phi})^2 + \frac{m}{2} \left( \sqrt{a^2 + b^2} \dot{\phi} \right)^2 - mga \sin \phi - mg(a \sin \phi + b \cos \phi)$$



- Si se suelta desde el reposo (esto es,  $\dot{\phi} = 0$ ) con  $\phi = 0$  la energía inicial es

$$E_{\text{ini}} = -mgb$$

y este es el valor que tendrá durante todo el movimiento.

El ángulo máximo lo alcanza en otro punto en el cual  $\dot{\phi} = 0$ . Se debe exigir que la energía en ese momento sea

$$-mg(2a \sin \phi + b \cos \phi) = -mgb$$

que tiene dos soluciones, una es la condición inicial  $\phi = 0$  y la otra es para el máximo valor posible  $\phi_M$  para el ángulo

$$\sin \phi_M = \frac{4ab}{4a^2 + b^2}$$

Para saber la velocidad angular cuando  $\phi = \pi/2$  se vuelve a aplicar conservación de energía:

$$\frac{m}{2} (2a^2 + b^2) \dot{\phi}^2 - mg2a = -mgb$$

que implica

$$\dot{\phi}(\phi = \frac{\pi}{2}) = \sqrt{\frac{2g(2a - b)}{2a^2 + b^2}}$$

Este resultado no tiene sentido salvo cuando  $2a \geq b$ . Esto se debe a que si tal desigualdad no se obedece el péndulo no llega nunca a tener  $\phi = \pi/2$  con la condición inicial escogida.

• Veamos ahora cuánto vale la energía si el sistema está en equilibrio estable. En tal situación  $\dot{\phi} = 0$  y el sistema está en un mínimo de energía potencial. La derivada de la energía potencial con respecto a  $\phi$  es

$$U' = -mg(2a \cos \phi - b \sin \phi)$$

que se anula cuando

$$\tan \phi_e = \frac{2a}{b}$$

y se comprueba que para este valor del ángulo la energía potencial, que es la energía total en el caso estático, vale

$$E_{\min} = -mg\sqrt{4a^2 + b^2}$$

Con lo visto en (5.2.6) resulta muy fácil determinar que en el presente ejemplo la frecuencia al cuadrado es

$$\omega^2 = \frac{g\sqrt{4a^2 + b^2}}{2a^2 + b^2}$$

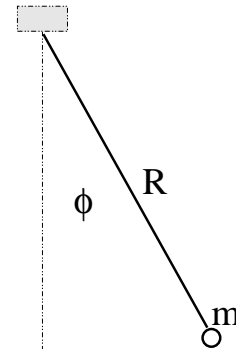
### 5.2.6. Otra vez el péndulo simple

Ya se obtuvo en (2.3.13) que la ecuación del péndulo simple, como en la figura adjunta, es

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{R} \sin \phi \quad (5.2.31)$$

Si esta ecuación se multiplica por  $\dot{\phi}$ , ambos lados de la ecuación son derivadas perfectas y se puede integrar desde un tiempo inicial  $t = 0$  hasta  $t$  arbitrario. Si se escoge  $\phi(0) = \phi_0$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0$  se obtiene

$$\dot{\phi}^2(t) = \frac{2g}{R} (\cos \phi(t) - \cos \phi_0) \quad (5.2.32)$$



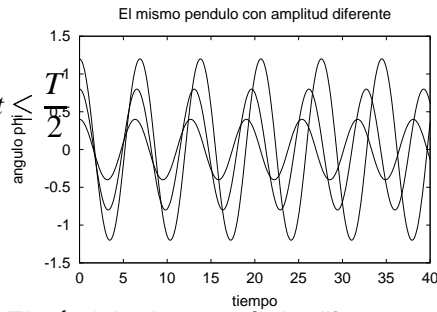
Se ha obtenido la velocidad angular  $\dot{\phi}$  como función del ángulo  $\phi$ . El péndulo comienza desde el reposo con amplitud  $\phi = \phi_0$  (ver figura adjunta) y se mueve disminuyendo  $\phi$ , pasando por el punto más bajo que corresponde a  $\phi = 0$  y luego llega a  $\phi = -\phi_0$ . En ese recorrido se cumple la mitad del período  $T$ .

En ese lapso  $\frac{T}{2}$  la velocidad angular  $\dot{\phi}$  es negativa por lo que se debe escribir

$$\dot{\phi} = -\sqrt{\frac{2g}{R}} \sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0} \quad \text{con } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (5.2.33)$$

Para obtener la dependencia de  $\phi$  en  $t$  es necesario integrar una vez más. Se integra desde  $t = 0$  hasta un valor  $t$  menor a  $\frac{T}{2}$  en el que  $\phi$  toma el valor  $\phi(t)$

$$\int_{\phi_0}^{\phi(t)} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} = \sqrt{\frac{2g}{R}} t$$



*El péndulo tiene período diferente para diferentes amplitudes. La figura da  $\phi(t)$  del mismo péndulo lanzado tres veces con velocidad inicial nula desde ángulos iniciales  $\phi(0) = \phi_0$  diferentes.*

La integral al lado izquierdo pertenece a una clase de integrales llamadas *elípticas* y el resultado no puede expresarse en términos de funciones elementales.

Si en la expresión anterior se escoge  $t = \frac{T}{2}$ , la integral angular es desde  $-\phi_0$  hasta  $\phi_0$  y se tiene una relación entre el período  $T$  y la amplitud de la oscilación.

En la figura anterior se muestra gráficamente el resultado de integrar numéricamente la ecuación del péndulo en tres casos que tienen el mismo valor para  $\sqrt{\frac{g}{R}}$ , y que parten del reposo. Difieren en el valor de  $\phi(0)$ .

\* \* \*

En general  $\sin \phi = \phi - \frac{1}{3!}\phi^3 \pm \dots$ , pero si el péndulo tiene oscilaciones de amplitud pequeña, el lado derecho de (5.2.31) puede aproximarse por  $\sin \phi \approx \phi$  y la ecuación aproximada de movimiento es

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{R} \phi \quad (5.2.34)$$

que es la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia angular  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{k}}$ . La solución de esta ecuación entonces es muy fácil de escribir.

### 5.2.7. Equilibrio y pequeñas oscilaciones en 2D y 3D

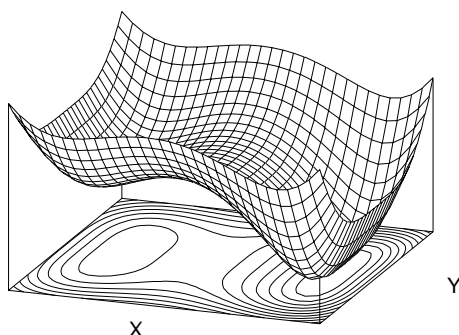


Figura 5.6: Ejemplo de la forma de un potencial  $U(x,y)$  con dos puntos de equilibrio estable.

En dos o tres dimensiones la situación es más compleja que en una dimensión pues hay más casos posibles. En la figura 5.6 se representa un potencial  $U(x,y)$  que tiene dos mínimos, es decir, dos puntos de equilibrio estable, un mínimo más profundo que el otro. Si esta superficie se cortara por un plano horizontal a alguna altura  $E$  se tendría la zona en la cual el movimiento puede darse ( $E \geq U$ ). En la base de esta figura se puede ver las curvas de nivel las cuales representan precisamente curvas  $U = \text{constante}$ . Considérese, por ejemplo, la curva cerrada en torno al mínimo izquierdo que aparece en la base de la figura. Ella corresponde a un cierto valor  $U = E_0$ . La zona interior a esa curva cumple con  $E_0 \geq U(\vec{r})$ . Es decir, si la partícula tiene energía total  $E_0$  y su posición inicial fue dada dentro de esta zona, el movimiento será todo el tiempo dentro de esta zona.



Hay otro punto interesante de este potencial: es un punto entre los dos mínimos y él es un máximo en la dirección  $X$  y un mínimo en la dirección  $Y$ . A tales puntos se les llama *punto silla* y son puntos de equilibrio inestables aunque la fuerza en ellos es nula.

No veremos en general la forma del movimiento armónico simple en el caso de un potencial  $U(x, y)$  y tan solo se dice a modo de complementación cultural que es necesario considerar la matriz de valores  $M_{ab} = \partial^2 U / \partial x_a \partial x_b$ , se debe diagonalizar y estudiar sus autovalores.

Sin embargo, un caso simple ocurre en el movimiento en dos o tres dimensiones de una partícula unida a un resorte ideal. En este caso, la energía potencial tiene un sólo mínimo que es igual en todas las direcciones. Se tiene, entonces el llamado **oscilador armónico tridimensional**.

La ecuación para un oscilador armónico tridimensional de largo natural nulo ubicado en el origen es

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -k\vec{r}(t) \quad (5.2.35)$$

Se trata de un problema con fuerza central, por tanto, como el momento angular respecto al centro de fuerza se conserva, el movimiento es plano, como se discutió en la sección 2.3.5. Todo el movimiento, entonces, ocurre en un plano, el que queda determinado por las condiciones iniciales. Conviene escoger al plano  $XY$  coincidiendo con el plano del movimiento. En tal caso la ecuación anterior se separa en dos ecuaciones independientes,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -kx(t) \\ m\ddot{y}(t) &= -ky(t) \end{aligned} \quad (5.2.36)$$

Cada una de estas dos ecuaciones tiene solución del tipo (3.2.6) con constantes determinadas por las condiciones iniciales,

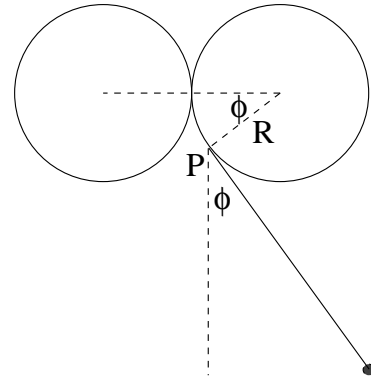
$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \sin(\omega_0 t) + B_1 \cos(\omega_0 t) \\ y(t) &= A_2 \sin(\omega_0 t) + B_2 \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (5.2.37)$$

Si se da una posición inicial  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$  y una velocidad inicial  $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ , entonces se tiene cuatro condiciones para determinar a las cuatro constantes  $A_1 \dots B_2$ .

♠ *Demuestre que (5.2.37) implica que la trayectoria en el plano  $XY$  es siempre una elipse con centro en el origen.*

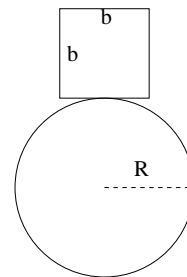
### 5.3. Problemas

5.5 Se tiene un péndulo plano que consta de un hilo de largo  $D$  que tiene una partícula puntual de masa  $m$  en su extremo inferior. Pero no es un péndulo común porque su origen superior está en el punto de contacto entre dos circunferencias de radio  $R$ , como lo muestra la figura. Cuando el péndulo oscila se enrolla un poco en forma alternada en las dos circunferencias, de modo que su largo instantáneo no es  $D$  sino  $(D - R\phi)$  y su centro instantáneo de giro es el punto  $P$  de tangencia (ver figura).



a) Obtenga las ecuaciones escalares de movimiento, una de ellas sirve para determinar la tensión del hilo y la otra es la interesante. b) Escriba la energía cinética,  $K(\phi, \dot{\phi})$  y la energía gravitacional  $U(\phi)$ . c) Demuestre que la exigencia de conservación de la energía mecánica,  $dE/dt = 0$ , conduce a la ecuación interesante de movimiento. d) Escriba la ecuación asociada a pequeñas oscilaciones.

5.5 Un cubo de arista de largo  $b$  está apoyada en la parte más alta de un cilindro horizontal fijo de radio  $R$  (ver figura). El contacto es perfectamente rugoso (no hay deslizamiento). Determinar la relación entre  $R$  y  $b$  para que el cubo esté en equilibrio estable a pequeñas oscilaciones. Considere que toda la masa del cubo está concentrada en su centro geométrico.

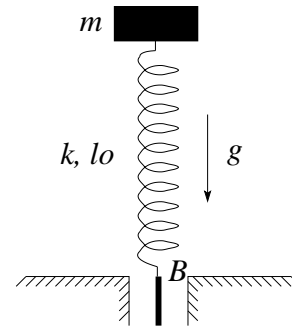


5.5 (a) Calcule el valor de la función de energía potencial  $U$  definido en (5.1.5) en el punto de equilibrio  $x_e$ ; (b) Calcule los puntos de retorno cuando la energía total es  $E = (1 - \varepsilon^2)U(x_e)$ ; haga una expansión de estos valores de las posiciones de retorno al más bajo orden

no trivial en  $\varepsilon$ . Determine el período  $T$  de estas oscilaciones en la aproximación ya usada.

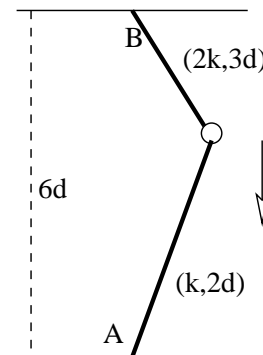
- 5.5 Considere una partícula de masa  $m$  que está apoyada sobre un resorte de constante  $k$  y largo natural  $l_0$ , bajo la acción de la gravedad. El punto  $B$  de donde se sostiene el resorte se encuentra en  $t = 0$  al nivel de la mesa.

**a)** Encuentre la altura de equilibrio de la masa. **b)** En  $t = 0$ , cuando la masa está quieta y en la posición de equilibrio, el punto  $B$  comienza a oscilar verticalmente. El movimiento de  $B$  puede ser descrito como  $\vec{r}_B(t) = A_0 \sin(\omega t) \hat{j}$ . Encuentre la ecuación que describe el movimiento de la masa. **c)** Resuelva la ecuación de movimiento para las condiciones iniciales dadas. **d)** Manteniendo la amplitud  $A_0$  fija, considere que la frecuencia  $\omega$  es menor que la frecuencia de resonancia.



¿Cuál es la frecuencia máxima para que la masa nunca choque con la mesa?

- 5.5 Una partícula  $P$  de masa  $m$  está sometida a la fuerza de dos resortes. Estos dos resortes de constantes elásticas  $k_A = 2k$  y  $k_B = k$  tienen largos naturales  $3d$  y  $2d$  respectivamente y tienen puntos fijos, como lo muestra la figura, en un punto  $A$  el primero y el segundo en un punto  $B$  verticalmente sobre él a distancia  $6d$ . Determinar las frecuencias a pequeñas oscilaciones verticales y a pequeñas oscilaciones horizontales.



- 5.5 El sistema de poleas sin roce que describe la figura tiene una masa colgante  $m_1$  a la izquierda y la masa total al centro es  $m_2$ . Dé a este sistema una geometría sencilla para la situación de equilibrio. Encuentre la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno a ese punto.

