Capítulo 6

Fuerzas Centrales y Planetas

6.1. Barrera centrífuga y potencial efectivo U^*

6.1.1. La noción

Barrera centrífuga es una noción que puede ser comprendida a partir de la conservación del momento angular que hay cuando la fuerza total es central con centro en $\mathscr{O}$. En forma poco precisa se puede decir que el momento angular $\ell_{\mathscr{O}}$ es proporcional a la distancia R de la partícula al centro $\mathscr{O}$ y también es proporcional a la velocidad angular, $\ell_{\mathscr{O}} \sim R\dot{\phi}$. Puesto que $\ell_{\mathscr{O}}$ es constante, si R comienza a decrecer, $\dot{\phi}$ tiene que crecer en la misma proporción. La aceleración centrípeta, por otro lado es $a_n \sim v^2/R \sim R\dot{\phi}^2$, es decir, a_n crece también. En otras palabras, para disminuir R se necesita cada vez una mayor fuerza hacia el centro (centrípeta), lo que se siente como si se estuviera contrarrestando una barrera que expulsa del centro (centrífuga).

Cuando la fuerza total es central, proveniente de una energía potencial $U(r)$,

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{dU}{dr}\,\hat{r} \tag{6.1.1}$$

el momento angular se conserva y el movimiento es plano. En tal caso se puede describir todo el movimiento con las coordenadas polares (r,ϕ)

$$\vec{r} \;=\; r\,\hat{r}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\,\hat{\phi} && (6.1.2)\\ \vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} \\ &= \vec{a}_r + \vec{a}_\phi && (6.1.3)\end{aligned}$$

El momento angular con respecto al centro de fuerzas, que sabemos que se conserva en el caso de fuerza central, es

$$\begin{aligned}\vec{\ell} &= m\vec{r}\times\vec{v} \\ &= mr^2\,\dot{\phi}\,\hat{k} && (6.1.4)\end{aligned}$$

Al coeficiente que multiplica a $\hat{k}$ lo denominaremos ℓ,

$$\ell = mr^2\,\dot{\phi} \tag{6.1.5}$$

Siendo central la fuerza total, la aceleración $\vec{a}_\phi$ tiene que ser cero, lo que equivale a

$$0 = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\right)$$

que es cierto porque el momento angular es constante. Usando la definición de ℓ dada más arriba se puede hacer el reemplazo

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2} \tag{6.1.6}$$

La energía mecánica total del sistema es $E = K + U$ donde $K = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$ que ahora se puede escribir, gracias a (6.1.6), en la forma

$$E_{MT} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r) \tag{6.1.7}$$

El primer término es la contribución a la energía cinética del movimiento radial y el segundo es la contribución a la energía cinética debida a la velocidad angular $\dot{\phi}$.

La ecuación de movimiento en el caso actual puede escribirse en la forma $ma_r = -dU/dr$:

$$m\left(\ddot{r} - \frac{\ell^2}{m^2 r^3}\right) = -\frac{dU}{dr} \tag{6.1.8}$$

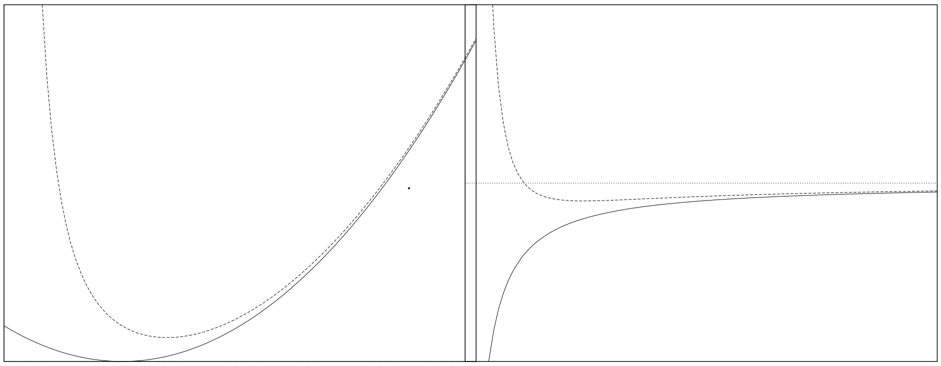


Figura 6.1: A la izquierda el potencial del oscilador armónico $U = k(r-D_0)^2/2$ que se anula en $r = D_0$ y el potencial efectivo U^* asociado. A la derecha se compara la función U con U^* en el caso del potencial gravitacional. El potencial gravitacional U es infinitamente negativo en el origen y crece asintóticamente a cero. El potencial efectivo U^* diverge a $+\infty$ en el origen, para cierto r se anula, pasa a valores negativos, llega a un mínimo y luego crece acercándose cada vez más a U.

---

que se reesrcibe como

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(U + \frac{\ell^2}{2mr^2}\right) = -\frac{d}{dr}U^*(r) \tag{6.1.9}$$

y puede ser deducida directamente de (6.1.7) sencillamente calculando $dE_{MT}/dt = 0$. Se obtiene una ecuación (6.1.9) para $r(t)$. Ya se estableció la dependencia de ϕ en r en (6.1.6).

Lo notable es que esta ecuación de movimiento es equivalente a la ecuación de movimiento de una partícula en el eje X con energía potencial $U^* = \frac{A}{x^2} + U(x)$, siempre que en ambos casos se tome la misma función U y $A = \ell^2/(2m)$.

Se ha demostrado las siguientes propiedades del movimiento de un cuerpo de masa m bajo el efecto de una fuerza total central de la forma (4.6.1):

• La fuerza es conservativa y es $-\hat{r}\,dU(r)/dr$, donde $U(r)$ es función energía potencial.

• Hay momento angular conservado implicando que el movimiento es plano. Queda ligada la velocidad angular con el radio r por medio de (6.1.6).

• La ecuación de movimiento, que es en un plano, se reduce a la ecuación tan solo para $r(t)$, es decir, se convierte en el problema unidimensional (6.1.9).

• Esta ecuación es matemáticamente equivalente a la ecuación de un movimiento unidimensional, solo que en lugar de tener a $U(r)$ como energía potencial, juega este papel la función *potencial efectivo* U^*,

$$U^*(r) = U(r) + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2}}_{\text{barrera centrífuga}} \tag{6.1.10}$$

Al último término en U^* se le conoce como *barrera centrífuga*.

Para el importante caso gravitacional definido con (4.6.7) el potencial efectivo tiene un mínimo. En efecto, si $U^* = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$ entonces U^* es mínimo en $r_0 = 2b/a$.

6.1.2. Ejemplo sencillo

Una partícula libre es un caso trivial de “fuerza central”: $\vec{F} = 0$ y puede tomarse $U = 0$. Sin embargo U^* no es nulo. Nada malo hay en ilustrar este caso con el movimiento descrito en la figura 1.1, $\vec{r} = b\,\hat{j} + \hat{\imath}\,t\,v_0$.

Este movimiento también puede ser descrito utilizando coordenadas $(r(t), \phi(t))$: $x = v_0 t = r\sin\phi$ y $y = b = r\cos\phi$. Mirando la figura 1.1 debiera resultar obvio que si la partícula inicia su movimiento desde una posición bien a la izquierda, la variable $r(t)$ irá disminuyendo con el tiempo, alcanzará un mínimo $r = b$ y luego $r(t)$ comenzará a crecer, de modo que si el movimiento es visto solamente desde el punto de la variable r pareciera que ha habido un bote a distancia b en una *barrera centrífuga* para comenzar a alejarse.

De la definición de las coordenadas usadas se deduce que

$$\dot{r} = v_0 \sin\phi \qquad \dot{\phi} = \frac{v_0 \cos\phi}{r}$$

de donde es inmediato calcular que

$$m\ddot{r} = m v_0 \dot{\phi}\cos\phi = \frac{m v_0^2 \cos^2\phi}{r} = \frac{m v_0^2 b^2}{r^3} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} = -\frac{d}{dr}\frac{\ell^2}{2mr^2}$$

Es decir, el simple movimiento con velocidad uniforme $v_0\hat{\imath}$ de una partícula libre puede ser visto como un movimiento bajo los efectos de una barrera centrífuga. ◀

6.1.3. Orbitas circunferenciales

La energía cinética expresada con las coordenadas polares (r,ϕ) es

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}v^2 &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{\ell^2}{2mr^2} \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

En el segundo paso se reemplazó la velocidad angular $\dot{\phi}$ por la expresión (6.1.6) ya encontrada en términos de ℓ.

Una órbita es circunferencial cuando su velocidad radial es constantemente nula, es decir, cuando tanto $\dot{r}=0$ como $\ddot{r}=0$. Esto último implica que debe encontrarse un radio $r=r_c$ tal que $dU^*/dr=0$

$$\frac{dU^*}{dr}=0 \tag{6.1.12}$$

Si se resuelve (6.1.12) se deduce un valor particular $r=r_c$ el que depende paramétricamente del valor ℓ. Éste es el radio de la órbita circunferencial.

La energía cinética en el caso de la órbita circunferencial se reduce a

$$K_{\text{orbita circunf}}=\frac{\ell^2}{2mr^2} \tag{6.1.13}$$

Puede verse que esta última expresión coincide con la expresión del término que se agrega a U para formar U^*, es decir, la barrera centrífuga.

Conociendo el valor de la energía cinética y de la energía potencial, la energía mecánica total es $K+U$ y está dada por

$$E=\frac{\ell^2}{2mr_c^2}+U(r_c) \tag{6.1.14}$$

Ella está totalmente determinada por el radio r_c.

EJEMPLO: Si se toma el caso gravitacional $U = -GMm/r$ la solución de (6.1.12) arroja

$$r_c = \frac{\ell^2}{GMm^2} \tag{6.1.15}$$

Aquí se puede apreciar que las órbitas planetarias circunferenciales tienen un radio que está dado por su momento angular ℓ. Pero tal vez una forma más satisfactoria de decir lo mismo se logra recordando que éste es un movimiento circunferencial con velocidad angular uniforme $\omega = \dot{\phi} = \ell/(mr_c^2)$ de donde

$$r_c = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} \tag{6.1.16}$$

que no depende de la masa m del planeta sino tan solo de su velocidad angular. Con este valor la energía total es

$$E = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2\ell^2} \tag{6.1.17}$$

Los satélites geocéntricos son satélites alrededor de la Tierra, en el plano ecuatorial, que tienen una velocidad angular igual a la velocidad angular de la Tierra. Para un observador en la Tierra el satélite paracе estar detenido. Estas son las órbitas que usan los satélites de comunicaciones. ◀

Las pequeñas oscilaciones de $r(t)$ en torno a una órbita circunferencial con un momento angular ℓ fijo se obtiene de (5.2.4) usando como potencial a U^*,

$$U^* = -\frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

Su seguna derivada con respecto a r es $U^{*\prime\prime} = -2GMm/r^3 + 3\ell^2/mr^4$. Si se reemplaza $\ell = mr^2\omega$ (donde $\omega = \dot{\phi}$ es la velocidad angular del satélite), el último término ya no depende de r. Si seguidamente se reemplaza r por su valor dado en (6.1.16), se obtiene que la frecuencia de estas pequeñas oscilaciones de r en torno al valor r_c es

$$\omega_{\text{peq. osc.}} = \omega$$

Esto significa que el tiempo que tarda el valor de r en tomar dos veces consecutivas su valor mínimo coincide con el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta, lo que implica que la órbita $r(\phi)$ es cerrada.

♣ *Calcule a qué distancia del centro de la Tierra debe estar un satélite para que sea geoestacionario. Compruebe que están a decenas de miles de kilómetros. (Los satélites más usuales están a pocos cientos de kilómetros de altura).*

♣ *Si la fuerza total sobre un cuerpo es $\vec{F} = k r^a \hat{r} + \alpha \vec{v} \times \vec{r}$, ¿Cómo varía la energía mecánica total con el tiempo? (k, a y α son constantes conocidas).*

6.1.4. Ecuación de Binet

Si se considera la ecuación genérica con fuerz central

$$m\ddot{\vec{r}} = F(r)\,\hat{h}$$

Al escribirla en cordenadas polares y reemplazando $\dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2}$ se obtiene

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{mr^3} + F(r) \tag{6.1.18}$$

El método de Binet consiste en reemplazar esta ecuación para $r(t)$ en una ecuacuón en que se considera tan solo la redendencia de r en el ángulo, $r(\phi)$. La razón para hacer esto es que es más fácil resolver la nueva ecuación que se obtiene que la ecuación original. Para pasar a la dependencia de ϕ se hace uso de la regla de la cadena ($dg/dt = d\phi/dt\, dg/d\phi = \dot{\phi}\, g'$). En lo que sigue la prima indica derivada con respecto a ϕ,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \dot{\phi}\, r' & &= \frac{\ell}{m}\frac{r'}{r^2} \\ \ddot{r} &= \frac{\ell}{m}\frac{\ell}{mr^2}\left(\frac{r'}{r^2}\right)' & &= \frac{\ell^2}{m^2 r^2}\left(\frac{r''}{r^2} - \frac{2r'^2}{r^3}\right) \end{aligned}$$

A continuación se define la función $w(\phi) \equiv \frac{1}{r(\phi)}$ de modo que

$$\begin{aligned} r' &= -\frac{w'}{w^2} \\ r'' &= -\frac{w''}{w^2} + \frac{2w'^2}{w^3} \end{aligned}$$

Si se hace estos reemplazos en (6.1.18) se obtiene

$$w'' = -w - \frac{m}{\ell^2}\frac{F(1/w)}{w^2} \tag{6.1.19}$$

que es la ecuación de Binet.

6.2. Planetas y todo eso

6.2.1. La ecuación de la órbita y su integral

Ya se sabe que la ecuación de movimiento reducida a la ecuación sólo para $r(t)$ es

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{\ell^2}{m r^3} \tag{6.2.1}$$

Esta ecuación es difícil de analizar en forma directa y lo que resulta más sencillo es resolver la ecuación de la órbita, es decir, $r(\phi)$ (y no $r(t)$). Pero más sencillo aun es la ecuación para

$$w(\phi) \equiv \frac{1}{r(\phi)} \tag{6.2.2}$$

En lo sucesivo se va a denotar con prima las derivadas con respecto a ϕ,

$$\frac{d}{d\phi} = ()' \tag{6.2.3}$$

Utilizando la regla de la cadena $\dot{r} = \dot{\phi}\, r'$ y recordando que $\dot{\phi} = \ell/(m r^2)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\ell}{m r^2} r' \\ \ddot{r} &= \frac{\ell^2}{m^2 r^4}\left(r'' - \frac{2r'^2}{r}\right) \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Los pasos anteriores y los que siguen son válidos solo si $\ell \neq 0$. Ya que $r = 1/w$ entonces

$$\begin{aligned} r' &= -\frac{w'}{w^2} \\ r'' &= -\frac{w''}{w^2} + \frac{2w'^2}{w^3} \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Al reemplazar todo esto en (6.2.1) resulta la ecuación

$$w'' + w = \frac{GMm^2}{\ell^2} \tag{6.2.6}$$

que es un tipo de ecuación que ya se conoce, como por ejemplo: $m\ddot{x} = -kx + mg$. Su solución general es,

$$w(\phi) = A\cos(\phi + \delta) + \frac{GMm^2}{\ell^2} \tag{6.2.7}$$

donde A y δ son las dos constantes de integración. Siempre se puede escoger el eje a partir del cual se mide ϕ de tal modo que $\delta = 0$ que es lo que se hace a partir de ahora. Tal elección corresponde a cónicas orientadas en forma simétrica con respecto al cambio $y \to -y$.

Puesto que el inverso de w es r, (6.2.7) implica que

$$r(\phi) = \frac{\frac{\ell^2}{GMm^2}}{1 + \frac{A\ell^2}{GMm^2}\cos\phi} \tag{6.2.8}$$

Antes de continuar se hace un repaso de la forma como se puede escribir una cónica.

6.2.2. Cónicas

A continuación se va a demostrar que $r(\phi)$ dado por

$$r(\phi) = \frac{R}{1 + e\cos\phi} \tag{6.2.9}$$

define diversas cónicas según el valor de la *excentricidad* e. El parámetro R define la escala de longitud de la cónica.

Si (6.2.9) se escribe como $r + er\cos\phi = R$ o equivalentemente como $x^2 + y^2 = (R - ex)^2$ donde se ha usado

$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi \tag{6.2.10}$$

se obtiene

$$(1 - e^2)x^2 + 2eRx + y^2 = R^2 \tag{6.2.11}$$

que es una de las formas conocidas que describe cónicas. En efecto, todo polinomio cuadrático $\texttt{Poli}(x,y) = 0$ representa una cónica en el plano XY.

Si en (6.2.11) se hace el desplazamiento (válido tan solo si $e^2 \neq 1$)

$$x = \bar{x} - \frac{eR}{1 - e^2} \tag{6.2.12}$$

la ecuación puede ser reescrita como

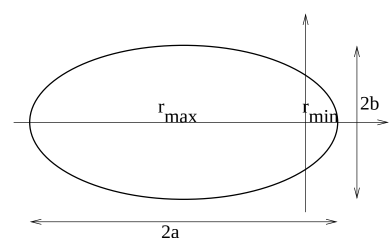
$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{R^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{R^2}{1-e^2}}=1 \tag{6.2.13}$$

Esta forma describe elipses e hipérbolas centradas en el origen. En efecto, si $e^2<1$ esta es fácilmente reconocible como la ecuación de una elipse. En particular, si $e=0$ se obtiene una circunferencia. Si $e^2>1$ lo es de una hipérbola. La ecuación (6.2.11) en cambio deja a uno de los focos de la cónica en el origen.

Elipses: $e^2<1$

Una elipse es una curva que se caracteriza porque la suma L_1+L_2 de las distancia de cualquier punto P de la elipse a dos puntos especiales llamados *focos*, vale siempre lo mismo. Estos dos focos están en el interior de la elipse sobre su eje mayor. El caso particular en que los dos focos se funden en un solo punto produce una circunferencia.

En la forma original descrita en (6.2.11) esta es una elipse con uno de sus focos en el origen y tiene sus radios mínimo y máximo sobre el eje X. Se tomará el caso $e>0$.



Para $\phi=0$ se obtiene r_{min} y para $\phi=\pi$ se tiene r_{max}

$$r_{\text{min}}=\frac{R}{1+e} \qquad r_{\text{max}}=\frac{R}{1-e} \tag{6.2.14}$$

Los semiejes mayor y menor son

$$a=\frac{R}{1-e^2} \qquad b=\frac{R}{\sqrt{1-e^2}} \tag{6.2.15}$$

Hipérbolas: $e^2>1$

Una hipérbola es una cónica disconexa, constando de dos ramas. Al igual que en el caso de una elipse, hay dos puntos especiales llamados focos.

Esta vez la diferencia de las distancias: $|L_1 - L_2|$ entre cualquier punto P de la hipérbola y los dos focos es una constante. Las hipérbolas son curvas infinitas que tienden, a grandes distancia, a coincidir con dos rectas llamadas las *asíntotas*. La distancia entre ambos focos es $2eR/(e^2-1)$. La menor distancia entre las dos ramas de una hipérbola es $2R/(e^2-1)$.

Parábola: $e^2 = 1$

Una parábola tiene un solo punto llamado foco, el cual está sobre el único eje de simetría de la curva. La distancia entre el punto de máxima curvatura y el foco es R.

Si en un punto P de la parábola se traza la recta hasta el foco y la paralela al eje de simetría, la bisectriz es perpendicular a la tangente a la parábola. Esta propiedad es la que hace tan útiles los espejos parabólicos para hacer desde focos de linterna hasta telescopios y antenas.

El caso $e^2 = 1$ debe ser analizado antes de dividir por $e^2 - 1$. Por ejemplo de (6.2.11) se tiene con $e = \pm 1$

$$y^2 = R^2 \pm 2Rx \tag{6.2.16}$$

que son ecuaciones para dos parábolas.

6.2.3. El caso planetario

Ahora que se sabe la forma de describir las cónicas se puede identificar

$$\begin{aligned} R &= \frac{\ell^2}{GMm^2} \\ e &= \frac{A\ell^2}{GMm^2} \end{aligned} \tag{6.2.17}$$

A continuación se verá cómo relacionar A con la energía total E y el momento angular ℓ.

La energía está dada por

$$E = \frac{m}{2}v^2 + U_G(r) \tag{6.2.18}$$

pero de (6.1.2) y luego de (6.2.4)

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\phi}^2 + \frac{\ell^2}{m^2\,r^4}\left(r^2 + r'^2\right) \tag{6.2.19}$$

entonces

$$\begin{aligned} E &= \frac{\ell^2}{2m\,r^4}\left(r^2 + r'^2\right) - \frac{G\,M\,m}{r} \\ &= \frac{\ell^2}{2m}\left(w^2 + w'^2\right) - G\,M\,m\,w \end{aligned} \tag{6.2.20}$$

	excentri-: cidad e	radio medio de la órbita $[10^8\times\text{Km}]$
Mercurio	0.206	0.58
Venus	0.007	1.08
Tierra	0.017	1.50
Marte	0.093	2.28
Júpiter	0.048	7.78
Saturno	0.056	14.27
Urano	0.047	28.89
Neptuno	0.008	44.98
Plutón	0.249	59.00
Sedna	0.857	1367.00
Cometa Halley	0.967	

Cuadro 6.1: Los planetas, las excentricidades de sus órbitas y el radio medio de las respectivas órbitas.

Al reemplazar la forma explícita de la función w se obtiene

$$E = \frac{\ell^2 A^2}{2m} - \frac{m}{2}\left(\frac{G\,M\,m}{\ell}\right)^2 \tag{6.2.21}$$

lo que permite establecer que A depende de E y ℓ en la forma

$$A = \pm\frac{G\,M\,m^2}{\ell^2}\sqrt{1 + \frac{2\,E\,\ell^2}{(G\,M\,m)^2\,m}} \tag{6.2.22}$$

De todo lo anterior se reconoce que

$$\boxed{R = \frac{\ell^2}{GMm^2}\,, \qquad\qquad e^2 = 1 + \frac{2E\,\ell^2}{(GM)^2\,m^3}\,.} \tag{6.2.23}$$

Si se reemplaza el valor (6.1.17) de la energía de una órbita circunferencial se comprueba que $e = 0$.

Para elipses,	$e^2 < 1$	y entonces $E < 0$.
Para parábolas,	$e^2 = 1$	y entonces $E = 0$.
Para hipérbola,	$e^2 > 1$	y entonces $E > 0$.

EJEMPLO: Desde una distancia r_0 del centro de fuerza se lanza un satélite con velocidad $\vec{v}_0$, perpendicular al vector posición inicial $\vec{r}_0$.
La energía es $E = \frac{m}{2}v_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$ y $\ell^2 = m^2 r_0^2 v_0^2$.
El caso límite es el de la parábola, es decir, el caso con $E = 0$,

$$v_0^2 = v_P^2 \equiv 2GM/r_0\,.$$

Si $v_0 < v_P$ la órbita es una elipse. Para el caso particular $v_0 = \sqrt{GM/r_0}$ se obtiene una circunferencia. Para $v_0 > v_P$ la órbita que resulta es una hipérbola. ◀

6.2.4. La tercera ley de Kepler

De la segunda ley de Kepler, (2.3.24), se desprende que el período T del movimiento planetario se relaciona al área de la elipse, $S = \pi ab$,

$$T = \frac{2mS}{\ell} = \frac{2m\pi ab}{\ell} = \frac{2m\pi}{\ell}\,\frac{R^2}{(1-e^2)^{3/2}}$$

pero se sabe que $\ell^2 = GMm^2R$. Calculando T^2 se puede reemplazar ℓ^2 por la relación recién escrita, resultando

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

que es la tercera ley de Kepler expresada con el semieje mayor, a.

6.3. Problemas

6.1 Determine la fuerza $\vec{F}$ que implica la función de energía potencial

$$U = \frac{k}{2}(r-B)\,r$$

donde B es una constante positiva. Determine en qué situación realista se puede tener una fuerza como esta.

6.2 Considere una partícula que se mueve en la región $x > 0$ bajo la influencia de la fuerza que proviene de la energía potencial $U(x) = \frac{U_0}{x}\left(1 + a x^2\right)$ con $U_0 > 0$. Encuentre puntos de equilibrio y discuta la estabilidad de ellos.

6.3 Una partícula se mueve sin roce por la superficie interior de un cono de eje vertical, vértice abajo y ángulo α entre una generatriz y la vertical. Demuestre que la energía potencial efectiva U^* es

$$\frac{\ell^2}{2m\rho^2} + m g \rho \,\mathrm{cotan}\alpha$$

donde ρ es la coordenada radial de coordenadas cilíndricas. Encuentre la frecuencia de las pequeñas oscilaciones cuando ρ oscila levemente en torno a un valor ρ_0.

6.4 Se tiene en órbira geoestacionaria una gran esfera hueca. Al centro de esa esfera flota una pequeña masa. Si se le da un pequeño impulso, ¿cuál es su frecuencia de oscilación en torno al centro de la gran esfera?

6.5 Considere el movimiento de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de la fuerza

$$\vec{F} = x\,(y^2+z^2)\,\hat{\imath} + y\,(x^2+z^2)\,\hat{j} + z\,(x^2+y^2)\,\hat{k}$$

a) Demostrar que esta fuerza es conservativa. b) Encontrar la energía potencial $U(x,y,z)$ asociada a esta fuerza, tal que sea nula en el origen. c) Si la partícula es soltada desde el origen con rapidez v_0, determine la rapidez en un punto cualquiera (x_1, y_1, z_1).

6.6 Si se considera la ecuación genérica para el radio, $r(t)$ con fuerza central proveniente de $\vec{F}=F(r)\hat{r}$, es decir, $m\ddot{r}=\frac{\ell^2}{mr^3}+F(r)$ demuestre que en lugar de (6.2.6) se obtiene

$$w''+w=-\frac{mF(1/w)}{\ell^2 w^2}\,, \quad \text{ecuación de Binet}$$

6.7 Un satélite artificial tiene una distancia máxima y mínima a la superficie terrestre de R y $3R$, siendo R el radio de la Tierra. Determine el período de rotación en función de la masa de la Tierra y de su radio. Suponga que en el momento en que el satélite está en su punto más bajo se activa su sistema de propulsión que lo deja en órbita circuferencial. ¿Cuál es el período de esta nueva órbita?

6.8 Una partícula P está sometida a la fuerza central dada por

$$\vec{F}(r)=-12\,B\left(\frac{a^6}{r^7}-\frac{a^{12}}{r^{13}}\right)\hat{r}$$

donde B y a son constantes positivas conocidas. Si ésta es la única fuerza sobre P determine, a) cuál es la rapidez mínima que debe tener P en $r=a$ para que la partícula pueda escapar sin retorno; b) cuál es la distancia máxima (o mínima) entre P y el centro de fuerzas si P se está moviendo radialmente de tal modo que pasa por $r=a$ con una rapidez que es la mitad de la encontrada en la pregunta anterior.

6.9 Un satélite está describiendo una órbita circular de radio R alrededor de la Tierra. En cierto momento los cohetes del satélite se encieden brevemente dándole una aceleración puramente tangencial. Si el período de la nueva órbita es $\frac{27}{8}$ del período que tenía antes, determine la rapidez de la nave cuando pasa por el punto en que se encuentra más alejada de la Tierra (apogeo).

6.10 Un satélite es colocado en órbita alrededor de la Tierra desde una altura de 600 Km sobre la superficie con una velocidad inicial de 30 mil kilómetros por hora, paralela a la superficie terrestre. Suponiendo que el radio de la Tierra es de 6378 kilómetros y su masa es de 5,976$\times 10^{24}$ Kg, determine la excentricidad de la órbita y la velocidad del satélite en su apogeo.

6.11 Desde muy lejos y con rapidez v_0 se dispara una partícula de masa m contra un blanco que está definido como un campo de fuerza central repulsiva de magnitud Am/r^2. La recta en la que la partícula inicia su movimiento pasa a distancia b del centro de fuerza. Calcule la distancia r^* mínima que logra tener la partícula con el centro de fuerza.

6.12 Dos satélites de la Tierra, S_1 y S_2, cada uno de masa m, están describiendo órbitas cerradas en un mismo plano y en el mismo sentido. S_1 está en una órbita circunferencial de radio R y S_2 está en una órbita elíptica caracterizada por $r_{\text{min}} = R$ y $r_{\text{max}} = 8R$. En un cierto instante ambos satélites se acoplan (la duración del proceso de acoplamiento se supone nulo) formando un satélite compuesto S_{12}. Durante el acoplamiento se conserva el momentum total pero no la energía. Determine a) el cuociente entre la suma de las energías cinéticas $K_1 + K_2$ y K_{12}. b) Determine las características de la órbita de S_{12}.

6.13 Sea R_0 el radio de la Tierra. Una nave espacial gira en torno a la Tierra en órbita elíptica de radio mínimo $8R_0$ y radio máximo $16R_0$. Para regresar a la Tierra procede como sigue: en $t = 0$ se encuentra en su apogeo ($r_A = 16R_0$). Al llegar a su perigeo ($r_B = 8R_0$) enciende sus cohetes por un instante para frenar tangencialmente quedando en una órbita elíptica con radios máximo y mínimo: $8R_0$ y $4R_0$. Tan pronto alcanza por primera vez $r = 4R_0$ nuevamente frena de igual manera quedando en una tercera órbita elíptica caracterizada por $4R_0$ y $2R_0$. Finalmente, la primera vez que se encuentra en $r = 2R_0$ frena para estar el una órbita [$2R_0$, R_0] con lo que logra terminar su misión. Obtenga las variaciones de energía cinética cada vez que frena y obtenga el tiempo que tarda en llegar a la Tierra.

6.14 Un satélite está en órbita circunferencial de radio r_0 sometida a una fuerza central que implica la función de energía potencial $U(r) = -k/r$. En un instante recibe un impacto que produce un cambio en la dirección de la velocidad, sin cambiar su magnitud. El cambio de dirección es en un ángulo $\pi/3$. Determine las distancias mínima y máxima que el satélite pasa del centro de fuerzas en su nueva órbita.