

# Capítulo 2

## Dinámica

### 2.1. Momentum lineal, fuerza y leyes de Newton

**Galileo** observó que cuerpos inicialmente en reposo, soltados desde la misma altura caen con movimiento uniformemente acelerado y esa aceleración es común a todos los cuerpos. Tal aceleración se denomina *aceleración de gravedad*. Si un cuerpo es soltado con velocidad inicial nula desde una altura  $z_0$  sobre el suelo su altura posterior, como función del tiempo, es

$$z(t) = z_0 - \frac{g}{2}t^2$$

sin importar cual sea la masa del cuerpo. De lo anterior la aceleración resulta ser  $\ddot{z} = -g$ . Deduzca que el cuerpo llega al suelo con rapidez  $\dot{z} = -\sqrt{2z_0g}$  donde el signo menos, en este caso, expresa que la velocidad es hacia abajo.

La *cantidad de movimiento* o *momentum lineal*  $\vec{p}$  de una partícula de masa  $m$  y velocidad  $\vec{v}$  es

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t) \tag{2.1.1}$$

La masa de un cuerpo es normalmente una cantidad fija y se mide en kilogramos, K y, salvo que específicamente se diga lo contrario, se supondrá que la masa de un cuerpo es constante.

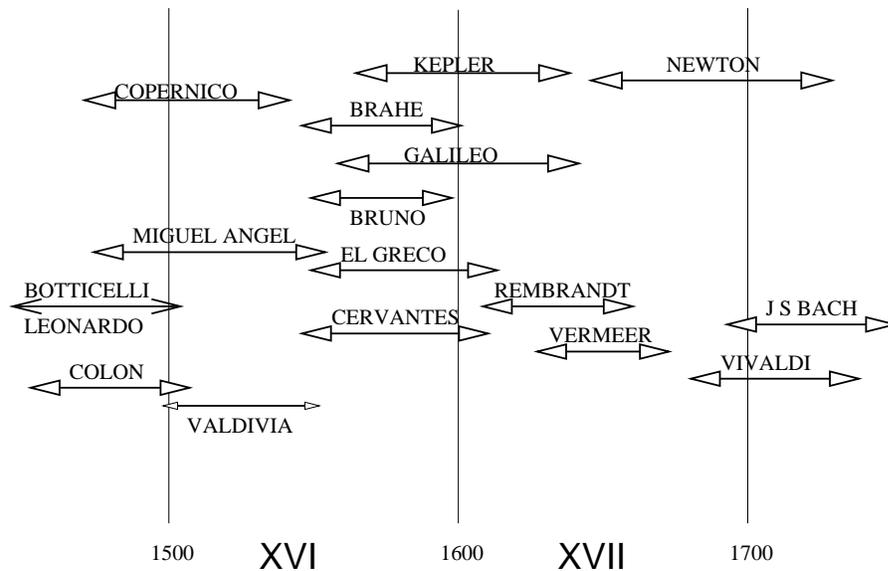


Figura 2.1: Los años en que vivieron algunos de los fundadores de la Mecánica y algunos personajes destacados en otras áreas.

» Sin embargo hay casos en que la masa varía. Un ejemplo muy típico es el de un cohete que está expulsando parte de su masa, en forma de gases, para poder impulsarse.

Para percibir la cantidad de movimiento se puede experimentar dejando caer desde el reposo dos cuerpos desde la misma altura. Al recibirlos en nuestras manos y tratar de detenerlos es necesario un “mayor esfuerzo” cuando la masa del cuerpo es mayor. La razón de este mayor esfuerzo reside en que para detener el cuerpo, es decir, para hacer variar su momentum lineal desde el valor que tiene hasta cero, es necesario aplicar una fuerza.

Newton descubrió que la relación general entre la variación del momentum (esto es  $d\vec{p}/dt$ ) y la fuerza total aplicada es

$$\boxed{\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}^{\text{total}}} \quad (2.1.2)$$

que se conoce como la II ley de Newton.

Un caso especial es que no haya fuerza alguna aplicada. En tal caso  $d\vec{p}/dt = 0$  lo que implica que el momentum permanece constante en el tiempo. Esto implica (masa constante) que la velocidad del cuerpo no cambia y por tanto la trayectoria es rectilínea. Esta es la I ley de Newton. Un caso aun más especial es el de un cuerpo en reposo.

Inversamente, si un cuerpo tiene velocidad constante, entonces la fuerza total sobre ese cuerpo necesariamente es nula.

En (2.1.2) la fuerza es la *fuerza total*. Sobre un cuerpo pueden estar actuando muchas fuerzas simultáneamente y el lado derecho en (2.1.2) debe tener la suma vectorial de todas las fuerzas que están actuando sobre el cuerpo.

» Cuando un mozo lleva un vaso sobre una bandeja hay varias fuerzas actuando sobre ese vaso: su peso,  $m\vec{g}$ ; una fuerza, llamada *normal* que la bandeja ejerce sobre el vaso y que es perpendicular a la superficie de contacto; otra fuerza, esta vez contenida en el plano de contacto, llamada *roce* que impide que el vaso deslice en la bandeja; también el aire ejerce una *fuerza viscosa* sobre el vaso, porque todo fluido (el aire, por ejemplo) tiende a frenar a un cuerpo que se mueve en él. La lista se podría continuar (la luna, el sol etc).

La III ley de Newton dice que si el cuerpo  $A$  ejerce una fuerza  $\vec{F}$  sobre un cuerpo  $B$ , entonces el cuerpo  $B$  ejerce una fuerza  $-\vec{F}$  sobre el cuerpo  $A$ .

» Un cuerpo en reposo sobre una mesa ejerce sobre ella su fuerza peso  $\vec{F} = m\vec{g}$ , la que apunta verticalmente hacia abajo, y entonces, según la III ley de Newton, la mesa ejerce sobre el cuerpo una fuerza, llamada *normal*, sobre el cuerpo, la que vale  $\vec{N} = -m\vec{g}$ , la cual apunta verticalmente hacia arriba. Puesto que sobre el cuerpo está además la atracción que le ejerce la Tierra (el peso), entonces la fuerza total sobre este cuerpo es nula, lo que permite entender porqué está en reposo.

Normalmente las leyes de Newton se asocian a sistemas de referencia llamados *sistemas de referencia inerciales*. Un ejemplo de sistema de referencia no inercial es un vehículo describiendo una curva. Un cuerpo

dejado en reposo respecto al vehículo tiende a moverse alejándose del centro de curvatura. Más adelante se dirá que en sistemas de referencia no inerciales aparecen fuerzas especiales como es la *fuerza centrífuga* y la *fuerza de Coriolis*. Pero en un sistema de referencia inercial no se presentan tales fuerzas.

### 2.1.1. Ejemplos de fuerzas

A continuación se hará mención de algunas fuerzas que se utiliza en estas notas. Las fuerzas que se describen a continuación serán explicadas con más detalle más adelante.

- o Peso. Sobre un cuerpo de masa  $m$  cerca de la superficie de la Tierra actúa una fuerza cuya magnitud es  $mg$  y apunta “hacia abajo”.
- o Gravitacional. La Ley Universal de Gravitación describe la fuerza de atracción gravitacional entre cuerpos masivos.
- o Coulomb. Cargas eléctricas se repelen o atraen, según la Ley de Coulomb, dependiendo si tienen signo igual o distinto.
- o Contacto. En cada punto en que dos cuerpos  $A$  y  $B$  están en contacto sólido-sólido aparece una fuerza  $\vec{F}_{AB}$  sobre  $A$  debido al contacto con  $B$  (y lo mismo sobre  $B$  debido a  $A$ ). Si se define el plano tangente al contacto, la fuerza  $\vec{F}_{AB}$  puede ser descompuesta en forma única en la suma de dos fuerza: una perpendicular al plano de contacto y otra paralela a él. Estas dos fuerzas se denominan *fuerza normal* y *fuerza de roce*.
  - Normal. Si un cuerpo está apoyado sobre una superficie, la superficie ejerce una fuerza sobre el cuerpo que corresponde a la reacción debido a la fuerza que el cuerpo ejerce sobre la superficie. La normal es una fuerza perpendicular a la superficie de contacto.
  - Roce. Un cuerpo apoyado sobre una superficie puede ejercer una fuerza paralela a la superficie de contacto. Si la velocidad relativa entre el cuerpo y la superficie es nula se tiene la fuerza

de roce estático y si la velocidad relativa entre el cuerpo y la superficie no es nula se tiene una fuerza de roce dinámico.

Otras fuerzas serán introducidas más adelante. Por el momento subrayamos que si un cuerpo está apoyado en una superficie y no hay roce entre ambos, entonces la única fuerza sobre el cuerpo debido a este contacto es la fuerza normal.

### 2.1.2. Ejemplo de argolla en una vara horizontal que gira

Consideremos el caso de una argolla que puede deslizar, libre de roce, a lo largo de una vara y esta vara gira barriendo un plano horizontal con velocidad angular  $\dot{\phi} = \omega$  constante. El problema será descrito con coorde-

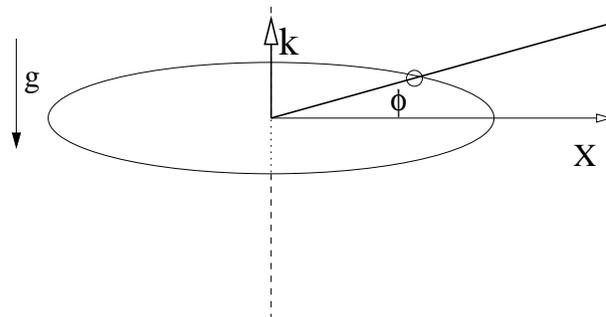


Figura 2.2: Una argolla que puede deslizar libremente, sin roce, a lo largo de una varilla y la varilla gira barriendo con velocidad angular uniforme  $\dot{\phi} = \omega$  un plano horizontal. argolla

nadas cilíndricas y los vectores base asociados son  $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$  de tal forma que  $\hat{k}$  es vertical hacia arriba.

La fuerza total de contacto sobre la argolla, igual que cualquier vector, puede expresarse con los vectores base:

$$\vec{F}_{\text{cont}} = f_1 \hat{\rho} + f_2 \hat{\phi} + f_3 \hat{k}$$

pero la componente en la dirección  $\hat{\rho}$  representaría roce—ya que es la dirección en la que puede haber movimiento—por lo cual se debe exigir que  $f_1 = 0$ . Lo que resta,  $f_2 \hat{\phi} + f_3 \hat{k}$  es normal a la vara y por lo tanto es la

fuerza llamada normal. Las fuerzas sobre la argolla son: su propio peso  $\vec{P} = -mg\hat{k}$  y la fuerza normal  $\vec{N}$  que la varilla ejerce sobre la argolla. En este caso normal quiere decir ortogonal a la varilla, por lo tanto es una fuerza que ya se ha mencionado y que puede tener componentes en la dirección vertical  $\hat{k}$  y también en la dirección  $\hat{\phi}$ . Cambiándole el nombre a las componentes de la normal, ella se puede escribir

$$\vec{N} = N_k \hat{k} + N_\phi \hat{\phi} \quad (2.1.3)$$

Puesto que la argolla no tiene movimiento horizontal, la fuerza total en esa dirección debe ser nula, es decir,  $N_k \hat{k} + \vec{P} = 0$ , que implica:  $N_k = mg$ .

Las condiciones que definen el movimiento son

$$\dot{\phi}(t) = \omega, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \dot{\rho}(0) = 0 \quad (2.1.4)$$

y, puesto que el movimiento ocurre en un plano horizontal, la aceleración tiene la forma (ver (1.2.4)),

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) \hat{\phi} \quad (2.1.5)$$

El plantear la II ley de Newton en coordenadas cilíndricas se puede separar en una componente radial y otra en la dirección de  $\hat{\phi}$  lo que da lugar a dos ecuaciones escalares

$$m(2\dot{\rho}\omega) = N_\phi \quad (2.1.6)$$

$$\ddot{\rho} - \rho\omega^2 = 0 \quad (2.1.7)$$

Al integrar la segunda ecuación se obtiene

$$\rho(t) = \rho_0 \cosh(\omega t) \quad (2.1.8)$$

que da la forma explícita del movimiento a lo largo de la vara. Este resultado implica que  $\rho$  cambia con el tiempo y su variación está relacionada a un coseno hiperbólico. Esto implica, de (2.1.6), que  $N_\phi$  no es nulo.

Al usar la forma de  $\rho(t)$ , obtenida en (2.1.8), en (2.1.6) se obtiene la expresión para  $N_\phi$ ,

$$N_\phi = 2m\omega^2 \rho_0 \sinh(\omega t) \quad (2.1.9)$$

Lo que se ha deducido es que la argolla se mueve deslizándose hacia afuera de la argolla. Su distancia al centro de giro:  $\rho(t)$ , aumenta

exponencialmente con el tiempo (en efecto, para tiempos muy grandes  $\cosh(\omega t) \sim \frac{1}{2}e^{\omega t}$ ).

Si se intenta reproducir la situación descrita en un experimento real debemos tomar una argolla y una vara tal que haya roce insignificamente pequeño entre ambos. Con un motor controlado automáticamente se mantendría uniforme la velocidad angular  $\omega$ . Descubriríamos, sin embargo, que llegaría un momento en que el motor no sería capaz de mantener constante la velocidad angular, porque la fuerza normal que debe ejercer sobre la argolla es demasiado grande ya que la componente  $N_\phi$  crece exponencialmente.

## 2.2. Muchas partículas

Se considera un sistema de  $N$  partículas puntuales de masas  $m_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, N$ , de posiciones  $\vec{r}_a$ , velocidades  $\vec{v}_a$  y aceleraciones  $\vec{a}_a$ . La suma de las masas se denotará  $M$

$$M = \sum_{k=1}^N m_a \quad (2.2.1)$$

y  $G$  será la forma para designar el *centro de masa*. La posición y la velocidad de  $G$  son

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_a \vec{r}_a \quad (2.2.2)$$

$$\vec{V}_G = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_a \vec{v}_a \quad (2.2.3)$$

Cada partícula satisface una ecuación de Newton

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}_1 \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \vec{F}_2 \\ &\dots = \dots \\ m_N \frac{d\vec{v}_N}{dt} &= \vec{F}_N \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

que, al sumarlas dan

$$M \frac{dV_G}{dt} = \vec{F}^{\text{total}} \quad \text{donde} \quad (2.2.5)$$

$$\vec{F}^{\text{total}} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \quad (2.2.6)$$

es decir, la variación del momentum total del sistema está dado por la fuerza total que actúa sobre el sistema. Vamos a ver, un poco más abajo, que esta fuerza total se debe exclusivamente a fuerzas externas al sistema.

La fuerza que ha sido llamada  $\vec{F}_a$  es la fuerza total sobre la  $a$ -partícula y puede descomponerse en la suma de las fuerzas que le ejercen las otras partículas del sistema, que llamaremos  $\vec{f}_a^{\text{int}}$  y la suma de las fuerzas externas  $\vec{f}_a^{\text{ext}}$  que actúan sobre la partícula  $a$ ,

$$\vec{F}_a = \vec{f}_a^{\text{ext}} + \vec{f}_a^{\text{int}} \quad (2.2.7)$$

A su vez  $\vec{f}_a^{\text{int}}$  está compuesta de las fuerzas  $\vec{F}_{ab}$  que cada partícula  $b$  ejerce sobre  $a$ ,

$$\vec{f}_a^{\text{int}} = \sum_{b=1, b \neq a}^N \vec{F}_{ab} \quad (2.2.8)$$

donde automáticamente la fuerza que una partícula ejerce sobre si misma es nula,

$$\vec{F}_{bb} \equiv 0 \quad (2.2.9)$$

A continuación se argumenta, a partir de (2.2.6), que las fuerzas internas no contribuyen a la fuerza total. En efecto, al calcular la contribución de las fuerzas internas se tiene

$$\sum_{a=1}^N \vec{f}_a^{\text{int}} = \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \vec{F}_{ab} \quad (2.2.10)$$

pero por cada sumando  $\vec{F}_{ab}$  hay otro que es  $\vec{F}_{ba}$  y el principio de acción y reacción establece que  $\vec{F}_{ba} = -\vec{F}_{ab}$ , lo que hace que la suma anterior sea nula. En resumen,

$$\vec{F}^{\text{total}} = \sum_a \vec{f}_a^{\text{ext}} \quad (2.2.11)$$

y por tanto la ecuación de movimiento para el centro de masa  $G$  del sistema es

$$M \frac{dV_G}{dt} = \sum_a \vec{f}_a^{\text{ext}} \equiv \vec{F}^{\text{ext}} \quad (2.2.12)$$

Corolario: si sobre un sistema de partículas no están actuando fuerzas externas, el centro de masa se mueve con velocidad uniforme.

♠ *Estudie el movimiento del centro de masa del sistema compuesto por dos partículas masivas unidas por un hilo, que rotan en torno a su centro de masa y están en vuelo libre en presencia de gravedad  $\vec{g}$ .*

## 2.3. Momento Angular y Torque

### 2.3.1. Ecuaciones generales

Así como el momentum lineal es una medida de la cantidad de movimiento de traslación, el *momento angular*,  $\vec{\ell}_O$ , es—en cierto modo—la cantidad de movimiento de rotación *en torno a un punto  $O$* . Formalmente se define como la suma de los productos cruz entre las posiciones y los respectivos momentos lineales

$$\vec{\ell}_O(t) = \sum_a \vec{r}_a(t) \times \vec{p}_a(t) \quad (2.3.1)$$

Por ejemplo, en el caso de la figura 1.1 (caso de una sola partícula),  $\vec{r} = b\hat{j} + \hat{i}v_0t$  y el momentum es  $\vec{p} = mv_0\hat{i}$ , entonces el momento angular del ejemplo es  $\vec{\ell}_O = -mbv_0\hat{k}$ .

♣ *Calcule el momento angular  $\vec{\ell}_O$  de una partícula que gira con velocidad angular uniforme en torno al punto  $O$  describiendo una circunferencia de radio  $R$ .*

Por su propia definición el momento angular de una sola partícula “1” apunta en una dirección que es perpendicular al plano que definen  $\vec{r}_1$  y  $\vec{p}_1$ . Esta dirección está relacionada al eje de giro del punto móvil con respecto al punto  $O$  en un instante determinado. En general la dirección de ese eje va cambiando con el tiempo.

» Se tiene dos ruedas de bicicleta de igual geometría —montadas sobre ejes fijos—girando a igual velocidad angular. La primera es

una rueda normal mientras que la otra tiene plomo en lugar de aire en su cámara. Al tratar de detenerlas se notará que se requiere de más esfuerzo para detener a la rueda con plomo. Esto se debe a que es más difícil llevar hasta cero el momento angular de un objeto que actualmente tiene momento angular más grande.

Si se toma la derivada con respecto al tiempo del momento angular, y se supone que las masas son contantes, se obtiene

$$\frac{d\vec{\ell}_{\mathcal{O}}}{dt} = \sum_a \frac{d(\vec{r}_a \times \vec{p}_a)}{dt} = \sum_a \frac{d\vec{r}_a}{dt} \times \vec{p}_a + \sum_a \vec{r}_a \times \frac{d\vec{p}_a}{dt} \quad (2.3.2)$$

El primer término del lado derecho es cero porque cada sumando es proporcional a  $\vec{v}_a \times \vec{v}_a$  y el último término se puede escribir sencillamente  $\vec{r}_a \times \dot{\vec{p}}_a$ , es decir,

$$\frac{d\vec{\ell}_{\mathcal{O}}(t)}{dt} = \sum_a \vec{r}_a(t) \times \vec{F}_a^{\text{total}} \quad (2.3.3)$$

Para escribir esta última expresión se hizo uso de la segunda ley de Newton, (2.1.2). El lado derecho de la expresión anterior es lo que se conoce como *torque total*  $\vec{\tau}_{\mathcal{O}}$  que producen las fuerzas  $\vec{F}_a$  sobre el sistema de partículas,

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{\text{total}} = \sum_a \vec{r}_a(t) \times \vec{F}_a^{\text{total}} \quad (2.3.4)$$

y por tanto

$$\boxed{\frac{d\vec{\ell}_{\mathcal{O}}(t)}{dt} = \vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{\text{total}}} \quad (2.3.5)$$

que quiere decir que la variación del momento angular se debe a la acción del torque total que actúa sobre el sistema.

Para estudiar la dinámica del momento angular se debe ver el valor del torque total y la forma de descomponerlo. El torque total  $\vec{\tau}_{\mathcal{O}}$  es la suma del torque de las fuerzas externas y el de las fuerzas internas. Demostremos que este último es nulo. Como la suma no depende del nombre de los índices, se la puede escribir intercambiando el papel de  $a$  y  $b$ . Luego se suma ambas sumatorias y se divide por dos,

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{\text{int}} = \sum_{a,b} \vec{r}_a \times \vec{F}_{ab}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{a,b} \vec{r}_a \times \vec{F}_{ab} + \frac{1}{2} \sum_{a,b} \vec{r}_b \times \vec{F}_{ba} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{a,b} (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \times \vec{F}_{ab} \quad (2.3.6)
 \end{aligned}$$

es decir

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \quad (2.3.7)$$

El torque total sobre un sistema depende tan solo de las fuerzas que son externas al sistema.

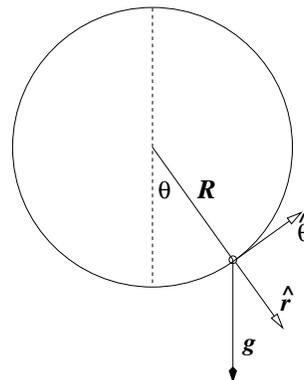
» Los frenos, en un vehículo ejercen torque sobre las ruedas, el motor también.

Si para un sistema el torque de la fuerza total es nulo, entonces el momento angular tiene derivada temporal nula, es decir, es constante.

Si para un sistema el torque no es nulo, pero una de sus componentes es nula todo el tiempo, entonces la correspondiente componente del momento angular es constante.

### 2.3.2. Ejemplo: del péndulo esférico al péndulo cónico

Si una masa puntual pende de un hilo de largo  $R$ , cuyo otro extremo está fijo se tiene, en general, un péndulo esférico. Bajo condiciones iniciales particulares puede comportarse como un péndulo plano (el hilo barre siempre un mismo plano vertical) y puede ser también un péndulo cónico cuando la masa describe una circunferencia con coordenada cilíndrica  $z$  fija o, equivalentemente, con coordenada esférica  $\theta$  fija. En la figura adjunta se ha escogido coordenadas esféricas con el polo norte abajo para lograr así que  $\theta$  describa directamente la desviación del péndulo con respecto a su posición vertical en reposo.



La fuerza total sobre la masa es la suma de su peso y de la tensión del hilo. En coordenadas esféricas  $\vec{T} = -T\hat{r}$  y la aceleración de gravedad, de acuerdo a la figura, es

$$\vec{g} = g(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$$

Se aprecia que la fuerza total no tiene componente a lo largo de  $\hat{\phi}$ , lo que quiere decir que la componente de la aceleración dada en (1.2.10) debe ser nula, esto es,

$$m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) = 0$$

que implica que existe una constante  $\ell_3$  y

$$\dot{\phi} = \frac{\ell_3}{mR^2 \sin^2 \theta} \quad (2.3.8)$$

Si  $\ell_3$  no es nulo, esta relación implica que  $\theta$  no puede anularse porque eso daría que  $\dot{\phi} \rightarrow \infty$ . Sí se puede afirmar es que la rapidez es muy grande cuando el péndulo pasa por puntos en que el ángulo  $\theta$  es muy chico. La ecuación de movimiento es reductible entonces a solo dos ecuaciones escalares: las componentes  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$ :

$$\begin{aligned} -mR(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) &= mg \cos \theta - T \\ mR(\ddot{\theta} - R\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) &= -mg \sin \theta \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

**Un péndulo cónico**, tal como se aprecia en la figura 2.3, es “cónico” cuando el punto masivo gira describiendo una circunferencia. En tal caso el ángulo  $\theta$  permanece en un valor fijo  $\theta_0$ .

Se quiere responder a la pregunta ¿bajo qué condiciones un péndulo esférico tiene movimiento cónico? De (2.3.8) se obtiene que en el caso actual  $\dot{\phi}$  es constante, y se denominará  $\omega$  porque es la velocidad angular del péndulo que gira en torno al eje vertical. Dados  $R$  y  $g$  ¿puede tenerse un péndulo cónico para cualquier valor de  $\omega$ ?

La segunda de las ecuaciones (2.3.9) se reduce a

$$R\omega^2 \cos \theta_0 = g \Rightarrow \cos \theta_0 = \frac{g}{R\omega^2} \Rightarrow \sin \theta_0 = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - \frac{g^2}{\omega^4}} \quad (2.3.10)$$

Puesto que un coseno debe tener módulo menor que la unidad, se debe cumplir que

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (2.3.11)$$

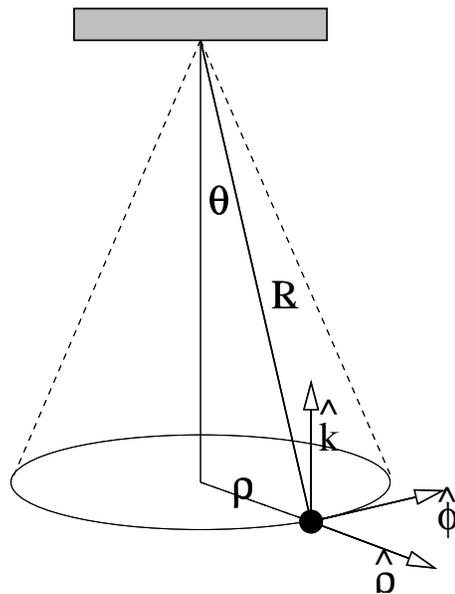


Figura 2.3: Un punto material en el extremo de un hilo de largo  $R$  gira en una trayectoria circular de radio  $\rho$ . El otro extremo del hilo está fijo. Este sistema es un péndulo cónico. pconico

No es posible un péndulo cónico con velocidad angular menor que esta cota. Dada una velocidad angular  $\omega$  superior a tal cota, el péndulo debe ser lanzado formando un ángulo con la vertical exactamente como el que se da en (2.3.10).

En resumen, el sistema descrito constituye un péndulo cónico tan solo si la velocidad angular se relaciona con el ángulo  $\theta$  que el hilo forma con la vertical por medio de (2.3.10). El radio de la circunferencia es  $\rho =$

$$\sqrt{R^2 - \frac{g^2}{\omega^4}}.$$

### 2.3.3. El péndulo simple

Consideremos un péndulo plano como el de la figura 2.4. Este consiste en una partícula puntual de masa  $m$ , unida al extremo de un hilo cuyo otro extremo está fijo en un techo que tomaremos como el punto  $\theta$ . El

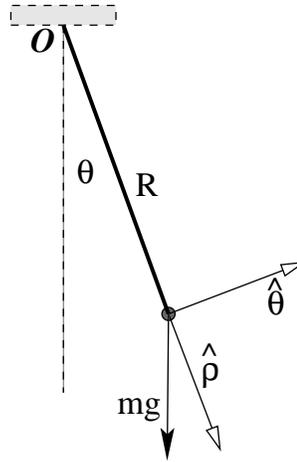


Figura 2.4: Un péndulo consta de un hilo de largo  $R$  fijo en un extremo a un punto  $\mathcal{O}$ . En el otro extremo hay una masa puntual  $m$ .

movimiento ocurre en un plano. En este ejemplo el torque se debe a la fuerza peso,  $\vec{g} = \hat{\rho} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta$  y  $\vec{r} = R \hat{\rho}$ ,

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{\mathcal{O}} &= \vec{r} \times (m\vec{g}) \\ &= -mRg \sin \theta \hat{k} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

donde  $R$  es el largo del hilo. El momento angular, por otro lado, es sencillamente  $\vec{\ell}_{\mathcal{O}} = \vec{r} \times \vec{v} = mR^2 \dot{\theta} \hat{k}$  porque  $\vec{v} = R \dot{\theta} \hat{\theta}$ . De aquí que (2.3.5) implique

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta \quad (2.3.13)$$

Esta es la ecuación de movimiento de un péndulo de largo  $R$ . El movimiento no depende de la masa de la partícula que hay en el extremo del hilo. Esta ecuación supone que el hilo está siempre tenso, lo que podría no ocurrir si el movimiento excede  $\theta = \pi/2$ .

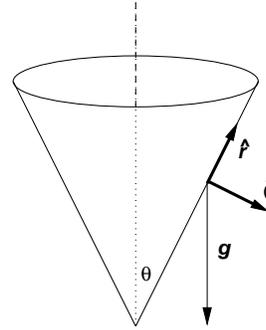
Si las oscilaciones son pequeñas,  $\theta \ll 1$ , se puede hacer la aproximación  $\sin \theta \approx \theta$  y la ecuación queda

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \theta \quad (2.3.14)$$

### 2.3.4. Uso de coordenadas esféricas: movimiento en superficie cónica

Consideremos una superficie cónica con eje vertical y vértice abajo. El vértice se escoge como origen. Una partícula  $P$  de masa  $m$  desliza sin roce por la superficie interior del cono bajo los efectos de la gravedad.

Se desea plantear las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas, las propiedades del momento angular y reducir el problema a uno para la coordenada esférica  $r(t)$ . La coordenada  $\theta$  es constante ya que ella es el ángulo entre el eje y cualquier generatriz del cono.



No hay más fuerzas que el peso y la normal:

$$\begin{aligned} m\vec{g} &= mg(-\hat{r}\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta) \\ \vec{N} &= -N\hat{\theta} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

En este caso particular la aceleración en coordenadas esféricas es

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\hat{\theta} + \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi})\sin\theta\hat{\phi} \quad (2.3.16)$$

Puesto que la fuerza total no tiene componente a lo largo de  $\hat{\phi}$ , esa componente de la aceleración debe ser nula, lo que se reduce a  $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0$ , es decir, lo que hay en el interior del paréntesis es una constante

$$r^2\dot{\phi} = \text{cte} \quad \text{o bien} \quad \dot{\phi} = \frac{\ell_0}{mr^2\sin\theta} \quad (2.3.17)$$

donde  $\ell_0$  es la magnitud del momento angular. En efecto, si se calcula el momento angular se obtiene

$$\vec{\ell} = mr\hat{r} \times (\hat{r}\dot{r} + \hat{\phi}r\dot{\phi}\sin\theta) = -mr^2\dot{\phi}\sin\theta\hat{\theta} \quad (2.3.18)$$

que, por lo que se ha dicho, es un vector de magnitud constante:

$$\vec{\ell} = \ell_0\hat{\theta}$$

La ecuación de movimiento a lo largo de  $\hat{r}$  es

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = -g \cos \theta \quad (2.3.19)$$

Reemplazando en ella la expresión para  $\dot{\phi}$  se obtiene

$$\ddot{r} = \frac{\ell_0^2}{m^2 r^3} - g \cos \theta \quad (2.3.20)$$

que es una ecuación difícil. Pero hay un caso que es interesante: existen soluciones que corresponden a circunferencias horizontales de radio  $r_H$ . Para estas soluciones  $r$  es constante y también  $\ddot{r} = 0$  y entonces el lado derecho de la última ecuación debe ser nulo, lo que implica que

$$r_H^3 = \frac{\ell_0^2}{m^2 g \cos \theta}$$

### 2.3.5. Fuerzas centrales

Una fuerza se dice central, con centro en el punto  $\mathcal{O}$ , si el valor de esta fuerza en un punto  $\vec{r}$  es

$$\vec{F} = f(\vec{r}) \hat{r} \quad (2.3.21)$$

donde  $\vec{r}$  es el vector posición desde  $\mathcal{O}$ ,  $r = \|\vec{r}\|$  y  $\hat{r} = \vec{r}/r$ . La magnitud  $f(\vec{r}) = f(r, \theta, \phi)$  de la fuerza es una función escalar cualquiera que en los casos más importantes solo depende del escalar  $r$ .

Más adelante se verá que importantes fuerzas de la naturaleza son centrales, tales como la que describe la *Ley de Gravitación* y también la *Ley de Coulomb* entre cargas eléctricas. En ambos casos  $f$  solo depende de  $r$  (no depende ni de  $\theta$  ni de  $\phi$ ), en cambio en el ejemplo del péndulo recién descrito, la tensión del hilo es una fuerza con centro en el punto fijo al techo que también depende del ángulo  $\phi$ .

Si la fuerza total sobre una partícula es una fuerza central, con centro en  $\mathcal{O}$ , entonces el torque  $\tau_{\mathcal{O}}$  es nulo, porque  $\tau_{\mathcal{O}} = \vec{r} \times (f(r) \hat{r}) = 0$  ya que se trata del producto cruz entre dos vectores paralelos. De esto y de (2.3.5) se concluye que en un caso así

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = 0 \quad (2.3.22)$$

es decir, el momento angular permanece constante,  $\vec{\ell}(t) = \vec{\ell}_0$ .

Pero si  $\vec{\ell}$  es constante, y puesto que  $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$ , entonces el plano que definen los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{p}$  permanece fijo, es decir, el movimiento transcurre en un plano fijo.

Resumen: si la fuerza total sobre una partícula es una fuerza central, con centro en  $\mathcal{O}$ , entonces el momento angular  $\vec{\ell}_{\mathcal{O}}$  es constante en el tiempo y el movimiento es plano.

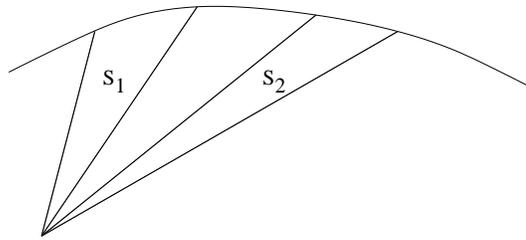


Figura 2.5: Si el momento angular se conserva, entonces áreas barridas en tiempos iguales son iguales.

### 2.3.6. Corolario: una ley de Kepler.

Veremos que si se conserva el momento angular, la línea que une al punto  $\mathcal{O}$  con el punto que define el vector posición  $\vec{r}(t)$  barre áreas iguales en tiempos iguales. Para demostrarlo hay que recordar que si se tiene dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  definidos a partir de  $\mathcal{O}$ , la magnitud del producto  $\vec{a} \times \vec{b}$  es igual al área del paralelogramo que definen  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Si la posición de la partícula en un instante  $t$  es  $\vec{r}(t)$ , en un pequeño instante posterior  $t + \varepsilon$  es  $\vec{r}(t + \varepsilon) = \vec{r}(t) + \varepsilon \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}(t) + \varepsilon \vec{v}(t)$ . El área barrida en este lapso infinitesimal  $\varepsilon$  es la mitad del área del paralelogramo (porque es el área de un triángulo), es decir, esta área infinitesimal vale  $dS = \frac{1}{2} \|\vec{r}(t) \times (\vec{r}(t) + \varepsilon \vec{v}(t))\|$  que resulta ser  $dS = \frac{\varepsilon}{2} \|\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)\|$  que es  $dS = \varepsilon \frac{\|\vec{\ell}\|}{2m}$ . El infinitesimal  $\varepsilon$  es un elemento de tiempo  $dt$ , y de aquí que la conclusión sea que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\|\vec{\ell}\|}{2m} \quad (2.3.23)$$

En palabras, la expresión anterior dice que el área barrida por  $\vec{r}(t)$ —a medida que la partícula se mueve en su órbita—no depende de  $t$  y es proporcional a la magnitud del momento angular. Si la expresión anterior se integra entre dos instantes arbitrarios  $t_1$  y  $t_2$  de la historia de la partícula, el resultado es

$$S_{12} = \frac{\|\vec{\ell}\|}{2m} (t_2 - t_1) \quad (2.3.24)$$

Es decir, en tiempos iguales  $(t_2 - t_1)$  se barren áreas iguales  $S_{12}$ .

### 2.3.7. La boleadora

Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas por un hilo de largo  $L$  son lanzadas a volar rotando para que el hilo se mantenga tenso.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{T} + m_1 \vec{g} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{T} + m_2 \vec{g} \end{aligned}$$

Al sumarlas se obtiene

$$M \ddot{\vec{R}} = M \vec{g}$$

es decir, el centro de masa describe una parábola.

Definamos  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , esto es,  $\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_2$ . Las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned} m_1 (\ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}}_2) &= \vec{T} + m_1 \vec{g} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{T} + m_2 \vec{g} \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por  $m_2/M$ , la segunda por  $-m_1/M$  y sumando se obtiene

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{T}, \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Puesto que esta es una ecuación con fuerza central, existe un momento angular conservado. En el caso actual esto implica que  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  es un vector constante, lo que quiere decir que el plano en que rota la boleadora tiene una normal que apunta siempre en la misma dirección.

Conviene resolver la ecuación anterior en coordenadas polares:

$$\vec{r} = L \hat{r}, \quad \vec{v} = L \dot{\phi} \hat{\phi}, \quad \vec{a} = -L \dot{\phi}^2 \hat{r} + L \ddot{\phi} \hat{\phi}$$

y, puesto que  $\vec{T} = -T\hat{r}$  la ecuación vectorial de movimiento se reduce a dos ecuaciones:

$$\mu L\dot{\phi}^2 = T, \quad \mu L\ddot{\phi} = 0$$

La segunda de estas ecuaciones implica que  $\dot{\phi}$  es una constante  $\omega_0$  (que depende de las condiciones iniciales) y la primera sencillamente dice cuanto vale la tensión:  $T = \mu L\omega_0^2$ .

## 2.4. Sistemas de dos partículas: masa reducida

En general las ecuaciones para un sistema de dos partículas se puede escribir

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} + \vec{f}_1 \quad (2.4.1)$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{F}_{12} + \vec{f}_2 \quad (2.4.2)$$

Ya se sabe que la suma de ambas ecuaciones da la dinámica del centro de masa, ecuación (2.2.12).

Si se define el vector de posición relativa y la *masa reducida*  $\mu$  por

$$\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.4.3)$$

entonces la ecuación (2.4.1) multiplicada por  $m_2/(m_1 + m_2)$  queda

$$\mu (\ddot{\vec{\rho}} + \ddot{\vec{r}}_2) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{F}_{12} + \vec{f}_1) \quad (2.4.4)$$

si a esta ecuación se le suma (2.4.2) multiplicada por  $-m_1/(m_1 + m_2)$  se obtiene

$$\mu \ddot{\vec{\rho}} = \vec{F}_{12} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{f}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{f}_2 \quad (2.4.5)$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación de una sola partícula de masa  $\mu$  y posición  $\vec{\rho}$ .

» El problema de dos partículas se reduce al problema del movimiento del centro de masa y a la ecuación (2.4.5) para el movimiento relativo.

En el caso usual en que  $\vec{f}_a = m_a \vec{g}$  la ecuación anterior se reduce a

$$\mu \ddot{\vec{\rho}} = \vec{F}_{12} \quad \text{caso especial} \quad (2.4.6)$$

que es una ecuación en la que no interviene sino la fuerza entre las partículas.

El momento angular con respecto a  $G$  puede también ser escrito usando  $\vec{\rho}$  y la masa reducida  $\mu$ . Para lograrlo se debe observar primero que  $\vec{\rho}$ ,  $\vec{\rho}_1$  y  $\vec{\rho}_2$  son paralelos y satisfacen

$$\vec{\rho}_1 = \frac{\mu}{m_1} \vec{\rho}, \quad -\vec{\rho}_2 = \frac{\mu}{m_2} \vec{\rho} \quad (2.4.7)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_G &= m_1 \vec{\rho}_1 \times \dot{\vec{\rho}}_1 + m_2 \vec{\rho}_2 \times \dot{\vec{\rho}}_2 \\ &= \mu \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

♠ *Estudie el movimiento de un sistema de dos partículas unidas por un resorte, lanzado en vuelo balístico. Demuestre que el movimiento relativo es descrito por la ecuación*

$$\mu \ddot{\vec{\rho}} = -k(\rho - \rho_0) \hat{\rho} \quad (2.4.9)$$

*que es un problema sencillo con fuerza central que ya se sabe resolver. El momento angular respecto a  $G$  se conserva y por tanto el movimiento es plano en el sentido que el plano que definen los vectores  $\vec{\rho}$  y  $\dot{\vec{\rho}}$  se traslada paralelo a sí mismo durante el vuelo del sistema.*

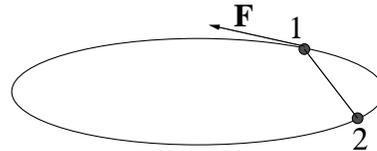
## 2.5. Problemas

- 2.1 *Considere el movimiento de un proyectil lanzado desde  $(x = 0, y = 0)$  con velocidad inicial  $\vec{v} = (\hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta) v_0$  y aceleración de gravedad  $g = -g \hat{j}$ .*  
**a)** *Determine la trayectoria  $y(x)$ , la rapidez  $v(t)$  en todo momento y el vector*

tangente unitario  $\hat{i}$ . **b)** Si el proyectil ha sido lanzado desde la base de un plano inclinado (ángulo  $\alpha$  y  $\alpha < \theta$ ), determine el ángulo  $\theta$  óptimo para que el proyectil golpee al plano lo más lejos posible.

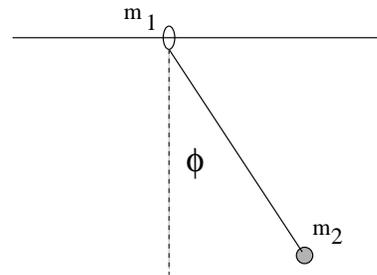
2.2 Una cuerpo comienza su movimiento (sin roce) desde la cúspide de una esfera fija de radio  $R$  con rapidez  $v_0$ . Determinar dónde el cuerpo pierde contacto con la esfera.

2.3 Por un riel circunferencial en posición horizontal de radio  $R$  avanza un cuerpo  $C_1$  de masa  $m_1$  arrastrando a un cuerpo  $C_2$  de masa  $m_2$  con un hilo de largo  $R\sqrt{2}$ . El cuerpo  $C_1$  es movido por una fuerza

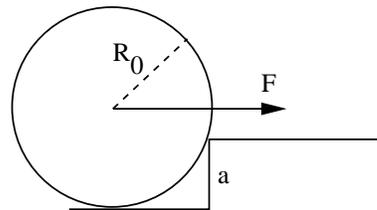


de magnitud  $F$  conocida y fija que es siempre tangencial a la circunferencia. En el instante  $t = 0$  los cuerpos parten desde el reposo y en  $t_0$  completan una vuelta. **a)** Calcule la tensión del hilo en ese intervalo. **b)** En el instante  $t_0$  se corta el hilo y sobre  $C_1$  continua actuando la misma fuerza. Obtenga el instante  $t_1$  en el cual  $C_1$  alcanza a  $C_2$ .

2.4 En una vara horizontal hay un anillo de masa  $m_1$  que puede deslizar por la vara sin roce alguno. De este anillo sale un hilo en cuyo extremo pende un punto de masa  $m_2$ , es decir, se tiene un péndulo simple que no tiene un punto fijo, sino que éste desliza en una vara horizontal. Encontrar una expresión para la tensión del hilo en función del ángulo  $\phi$  y de  $\dot{\phi}$ .

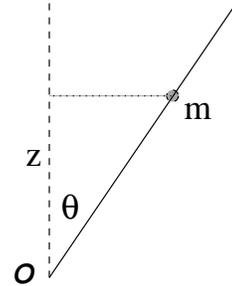


2.5 En la situación de la figura se tiene una rueda de masa total  $M$  y radio  $R_0$  enfrentando un peldaño de altura  $a$ . Determine la mínima fuerza horizontal  $\vec{F}$  que se debe aplicar para que la rueda supere al peldaño.



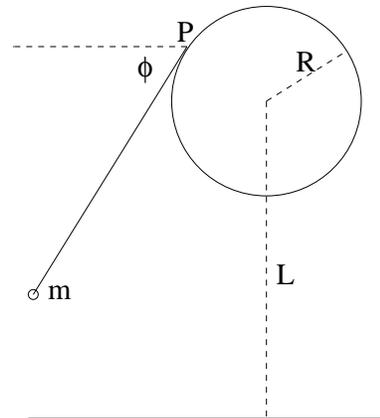
2.6 Una partícula  $P$  de masa  $m$  se mueve por la superficie interior de un cono de eje vertical, ángulo  $\theta$  y vértice abajo. Si sobre  $P$  actúa una fuerza que, expresada en coordenadas esféricas, es  $\vec{F} = -\gamma r \hat{r}$ , determine las ecuaciones de movimiento de  $P$  en coordenadas esféricas y obtenga una expresión para su velocidad. Datos iniciales:  $r(0) = R_0$ ,  $\dot{\phi}(0) = \omega$ ,  $\dot{r}(0) = 0$ .

- 2.7 Resuelva el caso de una argolla de masa  $m$  en una varilla que gira con velocidad angular uniforme:  $\dot{\phi} = \omega$  siempre formando un ángulo  $\theta$  con la vertical. No hay roce entre ambos. Tome como condiciones iniciales que  $z(0) = z_0$  y que  $\dot{z}(0) = 0$ . Si la varilla gira muy lentamente la argolla cae hacia  $\theta$ . Describa todas las situaciones posibles, desde velocidad angular muy pequeña hasta muy grande y escriba el valor de la velocidad angular crítica para decidir si cae o sube.



Indicación: usando coordenadas cilíndricas se puede ver que la varilla apunta en la dirección unitario  $\hat{t} = \hat{k} \cos \theta + \hat{\rho} \sin \theta$ . La fuerza total es la suma del peso,  $-mg\hat{k}$  y la fuerza normal, que inicialmente se debe escribir con un vector general perpendicular a  $\hat{t}$ . Demuestre que la fuerza normal entonces es de la forma:  $\vec{N} = \hat{\phi} N_{\phi} + (\hat{k} \sin \theta - \hat{\rho} \cos \theta) N_n$ . Una vez que se tiene las fuerzas, la ecuación de movimiento (II ley de Newton) puede ser escrita y descompuesta en tres ecuaciones escalares. Hay que tomar en cuenta que la argolla solo se puede mover a lo largo de la varilla, es decir, siempre se debe satisfacer  $\rho(t) = z(t) \tan \theta$  (\*). En estas ecuaciones escalares aparecen las cantidades desconocidas  $N_n$  y  $N_{\phi}$ , pero si se usa (\*) se puede obtener una ecuación libre de estos coeficientes. Tal ecuación entonces se puede integrar y se obtiene  $z(t)$ . A partir de ahí el problema es muy sencillo.

- 2.8 Hay un hilo enrollado alrededor de un cilindro. El eje del cilindro es horizontal, su radio es  $R$  y la altura desde el suelo al eje es  $L$ . En el instante inicial está desenrollada una parte del hilo, de longitud  $D$ , la que se mantiene tirante y horizontal,  $\phi = 0$ . En esa punta del hilo hay un cuerpo de masa  $m$ . Este cuerpo se suelta desde el reposo y a medida que cae el hilo se va enrollando. **a)** Determine la tensión del hilo como función del ángulo  $\phi$ . **b)** Dé la forma de la aceleración y determine el radio de curvatura. Interprete.

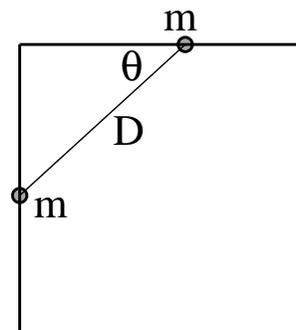


Indicación: Conviene tomar el origen en el eje del cilindro y escribir el vector posición del cuerpo como la suma de los vectores posición del punto P de tangencia

del hilo ( $\vec{r}_p$  en la dirección  $\hat{\rho}$ ) y el vector que apunta en la dirección del hilo y que es tangente al cilindro, en la dirección  $\hat{\phi}$ .

2.9 Desde el punto de vista del momento angular estudie el péndulo cónico descrito en la sección 2.3.2. Haga su estudio en dos casos: (a) cuando el origen  $\mathcal{O}$  para definir el momento angular y el torque está al centro de la circunferencia que describe la partícula y (b) cuando  $\mathcal{O}$  se escoge en el punto en que el hilo se une al techo. En ambos casos escriba el vector posición de la masa  $m$  usando los vectores unitarios asociados a coordenadas cónica, obtenga la velocidad, calcule el momento angular y el torque y compruebe que (2.3.5) se satisface.

2.10 Considere dos anillos que pueden deslizarse (sin roce), uno a lo largo de una barra horizontal y el otro a lo largo de una barra vertical bajo el origen. Ambas barras se unen en el origen. Si ambos anillos, de igual masa, están unidos por un hilo de largo  $D$  siempre tirante, que inicialmente forma un ángulo  $\theta_0$  con la horizontal, obtenga la ecuación para el ángulo  $\theta$  y la tensión del hilo en función de este ángulo.



2.11 Un astronauta de masa  $m$  se aleja de su nave unido a ella por una cuerda, pero impulsado por sus propios cohetes. Debido a que se le acaba el combustible debe ser traído de vuelta recogiendo la cuerda. Esto se comienza a hacer cuando la cuerda está tirante, tiene una longitud extendida  $R_0$  desde la nave y la velocidad angular del astronauta, respecto a la nave, es  $\Omega_0$ . La cuerda comienza a ser recogida con rapidez constante  $v_0$ . Suponga que no hay complicación alguna en el momento de comenzar a recoger la cuerda.

**a)** Encuentre la rapidez del astronauta en función de la distancia a la nave.  
**b)** Si se sabe que la cuerda soporta una tensión máxima  $27mR_0\Omega_0^2$  antes de cortarse, determine a qué distancia de la nave se encuentra el astronauta en el momento en que la cuerda se corta. Nota: la nave tiene masa tan grande que para todos los efectos de este problema puede tomarse como un punto fijo.

2.12 Un péndulo plano de largo  $R$  y masa  $m$  es liberado desde su punto más bajo ( $\phi = 0$ ) con una velocidad angular  $\omega_0$ . No alcanza a llegar a la cúspide (altura  $2R$  medida desde el punto más bajo) porque cuando  $\phi$  toma el valor

$\phi_M$  el movimiento deja de ser circular. Obtenga una expresión para  $\cos \phi_M$  en función de  $m$ ,  $g$ ,  $\omega_0$  y  $R$ .