Capítulo 4

Trabajo, Energía

4.1. Trabajo y energía cinética

$\mathbb{E}$l trabajo dW que efectua una fuerza apliacada $\vec{F}$ sobre un cuerpo P que se desplaza una distancia $d\vec{r}$ es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{4.1.1}$$

Si no hay desplazamiento no hay trabajo.

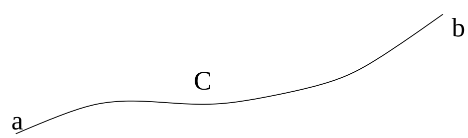


Figura 4.1: El trabajo de una fuerza $\vec{F}$ cuando el cuerpo se desplaza desde un punto a a un punto b a lo largo de un camino C. Sólo en casos especiales la integral (4.1.2) no depende del camino C seguido al hacer la integral.

Si la fuerza varía de punto en punto: $\vec{F}(\vec{r})$ y el cuerpo P se mueve desde el punto a hasta el punto b, por el camino C, entonces el trabajo efectuado por la fuerza es

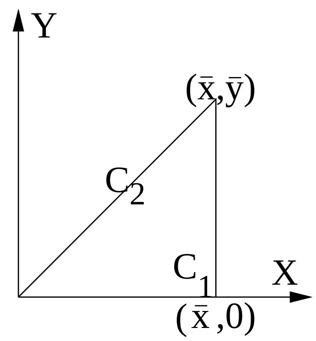
$$W_{a\to b}(C) = \int_{a\ (C)}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{4.1.2}$$

El trabajo se mide en `Joule`, que es una unidad de energía.

EJEMPLO: Considérese un cuerpo que se mueve en el plano XY debido a una fuerza dada por la expresión

$$\vec{F} = -\frac{Ax^2y^5}{5}\hat{\imath} - \frac{Bx^3y^4}{3}\hat{\jmath} \tag{4.1.3}$$

Se hará la integral de trabajo asociada a esta fuerza, entre los puntos $(0,0)$ y $(\bar{x},\bar{y})$ siguiendo dos caminos: C_1 es el camino que primero va en forma recta desde el origen hasta $(\bar{x},0)$ y luego en forma recta desde este último punto a $(\bar{x},\bar{y})$ y C_2 es el camino recto entre los dos puntos extremos.



La integral de trabajo por C_1 es

$$\begin{aligned} W(C_1) &= \int_0^{\bar{x}} \vec{F}\cdot\hat{\imath}\,dx + \int_{0\ \mathrm{x}=\bar{\mathrm{x}}(y=0)}^{\bar{y}} \vec{F}\cdot\hat{\jmath}\,dy \\ &= 0 - \frac{\bar{x}^3}{3}\frac{B\bar{y}^5}{5} \\ &= -\frac{B\bar{x}^3\bar{y}^5}{15} \end{aligned}$$

Para poder hacer la interal por C_2 se debe tener claro que (a) la recta C_2 es descrita por la ecuación $\bar{x}y = \bar{y}x$, entonces se puede, por ejemplo, integrar con respecto a x usando un integrando donde se ha reemplazado $y = \bar{y}x/\bar{x}$; (b) se debe usar $d\vec{r} = \hat{\imath}\,dx + \hat{\jmath}\,dy = \left(\hat{\imath} + \hat{\jmath}\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)dx$. (c) Ahora es trivial hacer el producto punto $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ e integrar con respecto a x lo que da:

$$W(C_2) = -\left(\frac{A}{40} + \frac{B}{24}\right)\bar{x}^3\bar{y}^5$$

que no coincide con $W(C_1)$ salvo que $A = B$. ◀

♣ *Obtenga la forma de $d\vec{r}$ en el ejemplo anterior con $\bar{x} = \bar{y}$ para el caso en que se desee hacer la integral a lo largo de una semicircunferencia que parte del origen hacia arriba y tiene su centro en $(\bar{x},0)$. Calcule la integral de camino en el caso $A = B$.*

En la definción (4.1.2) no se ha dicho que $\vec{F}$ sea la única causa del movimiento. Cuando sobre el cuerpo P están actuando varias fuerzas $\vec{F}_k$, se puede definir un trabajo $W^{(k)}_{a\to b}(C)$ asociado a cada una de ellas usando el camino C de a a b,

$$W^{(k)}_{a\to b}(C) = \int_{a\ (C)}^{b} \vec{F}_k \cdot d\vec{r} \tag{4.1.4}$$

Si el desplazamiento es perpendicular a la fuerza considerada, esa fuerza no ejerce trabajo.

El *trabajo total* es el que efectua la fuerza total,

$$\begin{aligned}
W^{\text{total}}_{a\to b}(C) &= \int_{a\ (C)}^{b} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} \\
&= m\int_{a\ (C)}^{b} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} \\
&= m\int_{t_a\ (C)}^{t_b} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt \\
&= m\int_{\vec{v}_a\ (C)}^{\vec{v}_b} \vec{v} \cdot d\vec{v} \\
&= \frac{m}{2}\int_{v_a^2\ (C)}^{v_b^2} dv^2 \\
&= \frac{m}{2} v_b^2 - \frac{m}{2} v_a^2
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Se define la *energía cinética* K de un cuerpo de masa m y velocidad $\vec{v}$ como

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \tag{4.1.6}$$

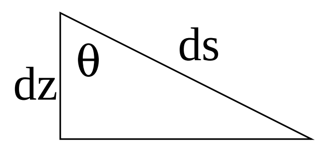
Y de aquí que el trabajo total pueda expresarse como la diferencia entre la energía cinética final menos la energía cinética inicial.

$$W^{\text{total}}_{a\to b}(C) = K_b - K_a \tag{4.1.7}$$

El signo de W^{total} indica si se ha ganado ($W > 0$) o perdido ($W < 0$) energía cinética. Por ejemplo, si una partícula es lanzada verticalmente hacia arriba con rapidez inicial v_0 y en algún momento se detiene, el trabajo efectuado por la fuerza total a lo largo de la trayectoria, sobre esa partícula, desde que fue lanzada hasta que se detiene, es $-\frac{1}{2} m v_0^2$.

El trabajo de la fuerza total en el caso de un cuerpo que se mueve con roce sobre una superficie a rapidez constante, es nulo. Pero, para comprender bien los conceptos es preferible separar el trabajo efectuado por la fuerza f que arrastra al cuerpo, W_f, del trabajo W_r asociado a la fuerza de roce. El trabajo W_f es positivo porque el desplazamiento apunta en la misma dirección que la fuerza, mientras que W_r es negativo y se cumple que $W_f + W_r = 0$.

> $\gg$ En un movimiento circunferencial con velocidad angular constante la fuerza total no efectua trabajo, por dos razones: ella es perpendicular al desplazamiento y la rapidez no cambia.
>
> Si un cuerpo desliza con roce sobre una superficie en reposo, la fuerza normal $\vec{N}$ no efectua trabajo, porque es perpendicular al desplazamiento.



Cuando un carro baja por una montaña rusa sin roce, ¿depende el trabajo que efectua el peso de la forma de la montaña? Al avanzar una distancia $ds = \|d\vec{r}\|$ en una zona en la cual el riel forma un ángulo θ con la vertical, el carro desciende una altura $dz = ds\cos\theta$. El trabajo infinitesimal es $dW = m\vec{g}\cdot d\vec{r} = mg\,dz$. Al integrar se obtiene que el trabajo solo depende de la altura descendida z: $W = mgz$, que no depende de la forma del riel.

<u>EJEMPLO:</u> Se ilustra una forma como se puede utilizar la relación (4.1.7) para resolver un problema. Se considerá el ejemplo visto en §3.3.2 de un péndulo de largo R apoyado en un plano inclinado, con el cual tiene roce, figura 3.6. El desplazamiento es $d\vec{r} = \hat{\phi}\, R\, d\phi$. De las fuerzas, tanto la tensión $\vec{T}$ del hilo, como la normal $\vec{N}$ son perpendiculares al desplazamiento, por tanto no efectuan trabajo. Las fuerzas que sí contribuyen son la fuerza de roce $\vec{F}_{\rm RD} = -\mu N\hat{\phi}$, (con $N = mg\cos\alpha$) y la componente del peso a lo largo de $\hat{\phi}$, que es $\hat{\phi}\, mg\sin\alpha\cos\phi$. El trabajo de la fuerza total, entonces, es el trabajo que efectuan estas dos fuerzas:

$$W^{\rm total}_{\phi=0\to\phi=\phi_1} = \int_0^{\phi_1} \left(mg\sin\alpha\cos\phi - \mu\, mg\cos\alpha\right) R\, d\phi \qquad (4.1.8)$$

donde ϕ_1 es el ángulo en el cual el péndulo se detiene. Como ha partido del reposo el trabajo total tiene que ser cero y entonces la integral anterior debe ser nula

$$mg\sin\alpha\sin\phi_1 - \mu\, mg\cos\alpha\,\phi_1 = 0 \qquad (4.1.9)$$

que implica la relación

$$\mu = \frac{\sin\phi_1}{\phi_1}\tan\alpha$$

que es (3.3.18).

4.2. La energía cinética de un sistema

Recordando que $\vec{r}_a = \vec{R}_G + \vec{\rho}_a$ se puede demostrar que la energía cinética puede ser separada en la energía cinética del sistema en su conjunto y la energía cinética total con respecto al centro de masa:

$$\begin{aligned} K^{\rm tot} &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a {v_a}^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \left(\vec{V}_G + \dot{\vec{\rho}}_a\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \left(V_G^2 + \dot{\rho}_a^2 + 2\dot{\vec{\rho}}_a \cdot \vec{V}_G\right) \end{aligned}$$

pero el último término en el paréntesis es nulo debido a que $\sum_a m_a\vec{\rho}_a = 0$. De aquí que

$$K^{\rm tot} = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a\dot{\rho}_a^2 \tag{4.2.1}$$

4.3. Potencia

Se define la *potencia* como la variación del trabajo con el tiempo

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{4.3.1}$$

Si esta potencia es positiva se trata de potencia entregada al sistema y, si es negativa, es potencia que el sistema pierde. Cuando se trata de la potencia asociada a la fuerza total, P es energía cinética por unidad de tiempo que el sistema gana ($P > 0$) o pierde ($P < 0$).

Si una de las fuerzas actuando sobre un cuerpo es $\vec{F}$ y en ese instante su velocidad en $\vec{v}$ entonces

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt \tag{4.3.2}$$

y la potencia asociada a esta fuerza es

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{4.3.3}$$

Si la dependencia de P en el tiempo es conocida, el trabajo puede calcularse como

$$W = \int_{t_0}^{t} P(t')\, dt'$$

> $\gg$ Un cuerpo en caida libre tiene velocidad $\vec{v} = -gt\,\hat{k}$ y la fuerza que está actuando es el peso $\vec{F} = -mg\hat{k}$. La potencia que el peso le está entregando al cuerpo que cae es $P = (-gt\,\hat{k}) \cdot (-mg\hat{k}) = mg^2 t$.
>
> Pero si el cuerpo ha sido lanzado hacia arriba, entonces $\vec{v} = (v_0 - gt)\,\hat{k}$ y, mientras $t < v_0/g$, se está perdiendo potencia: $P = -(v_0 - gt)\,mgt$, porque el trabajo de la fuerza peso en ese lapso es negativo.

> $\gg$ La fuerza efectiva que mantiene a velocidad constante a un automóvil es opuesta al roce viscoso cuadrático, y es $F = \eta\, v^2$. La potencia entonces es $P = \eta\, v^3$, lo que muestra lo rápido que aumenta la potencia consumida a medida que aumenta la velocidad.

4.4. Fuerzas conservativas y energía potencial

4.4.1. Energía mecánica

Se dice que una fuerza es *conservativa* cuando la integral de trabajo (4.1.2) que se le asocia no depende del camino C escogido. Si se integra—por diversos caminos—entre un punto $\vec{r}_0$, que se fija arbitrariamente, y un punto $\vec{r}$, siempre se obtiene el mismo valor $W(\vec{r})$. Resulta natural, entonces, definir la función asociada a la integral trabajo.

Supongamos que se escoge un punto arbitrario $\vec{r}_0$ y se hace la integral de trabajo desde este punto a un punto cualquiera $\vec{r}$. En general esta integral

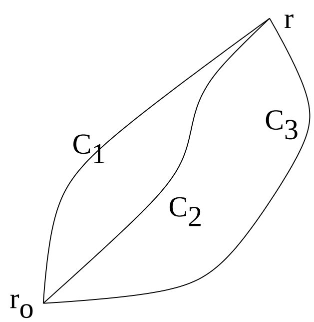


Figura 4.2: El trabajo de una fuerza $\vec F$ conservativa que se calcula con caminos C_1, C_2 etc. entre puntos $\vec r_0$ y $\vec r$ es siempre el mismo.

depende del camino escogido. Si la fuerza que se está considerando es tal que el trabajo que se le asocia no depende del camino de integración, sino que da el mismo valor cada vez que se integra desde $\vec r_0$ hasta $\vec r$, adquiere sentido definir una función

$$U(\vec r) = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec F \cdot d\vec r \tag{4.4.1}$$

a la que se llama *energía potencial* asociada a la fuerza $\vec F$. Estrictamente debiera decirse que U depende tanto de $\vec r$ como de $\vec r_0$, pero ya se verá que $\vec r_0$ siempre es dejado fijo mientras que el otro punto es variable y juega un papel interesante.

> $\gg$ En el párrafo anterior se ha dicho que existen fuerzas, llamadas *conservativas*, para las cuales la integral de trabajo no depende del camino de integración y para estas fuerza se puede definir una función escalar $U(\vec r)$ llamada energía potencial.

Si la fuerza total $\vec F^{\text{total}}$, actuando sobre un cuerpo, es una fuerza conservativa, entonces el trabajo que esta fuerza efectua cuando el cuerpo se desplaza de a a b es

$$\begin{aligned} W_{a\to b} &= \int_{\vec r_a}^{\vec r_b} \vec F^{\text{total}} \cdot d\vec r \\ &= \int_{\vec r_a}^{\vec r_0} \vec F^{\text{total}} \cdot d\vec r + \int_{\vec r_0}^{\vec r_b} \vec F^{\text{total}} \cdot d\vec r \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\vec r_0}^{\vec r_a} \vec F^{\text{total}} \cdot d\vec r + \int_{\vec r_0}^{\vec r_b} \vec F^{\text{total}} \cdot d\vec r \\
&= U(\vec r_a) - U(\vec r_b) \qquad (4.4.2)
\end{aligned}
$$

pero ya se sabe que también es

$$W_{a\to b} = K_b - K_a \qquad (4.4.3)$$

lo que implica que

$$K_b + U(\vec r_b) = K_a + U(\vec r_a) \qquad (4.4.4)$$

Pero los puntos a y b son arbitrarios, por lo cual se puede afirmar que la *energía mecánica total*

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v^2 + U(\vec r)} \qquad (4.4.5)$$

permanece constante durante la evolución del movimiento.

> $\gg$ Conclusión: fuerza total conservativa implica que la energía mecánica total, (4.4.5) es una cantidad conservada, es decir, mantiene un mismo valor durante la evolución del sistema.

Reiterando la conservación de E se puede calcular dE/dt a partir de (4.4.5),

$$\frac{dE}{dt} = m\vec v\cdot\dot{\vec v} + \nabla U\,\cdot\dot{\vec r} = \vec v\cdot\left(m\dot{\vec v} + \nabla U\right) = 0$$

donde se ha hecho uso que $dU/dt =$ "$dU/d\vec r$" $d\vec r/dt$. En efecto $\nabla U = \sum_j \partial U/\partial x_j$ y $dU/dt = \sum(\partial U/\partial x_j)(dx_j/dt) = \nabla U\cdot\vec v$.

Más arriba se ha dicho que si $\vec F$ es conservativa, entonces su integral de trabajo no depende del camino de integración. Equivalentemente *una fuerza es conservativa si y solo si ella puede ser escrita como el gradiente de la función U de energía potencial*,

$$\vec F = -\nabla U(\vec r) \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (4.4.6)$$

La expresión anterior, escrita en componentes cartesianas, es

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{4.4.7}$$

Si se toma cualesquiera dos de estas relaciones y se las deriva una vez más, pero con respecto a otra coordenada, se obtiene, por ejemplo,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

Una fuerza es conservativa si y solo si

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \tag{4.4.8}$$

que puede ser descrito en forma más compacta como la condición

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \tag{4.4.9}$$

<u>EJEMPLO:</u> Si se usa (4.4.8) en el ejemplo visto inmediatamente después de (4.1.2), se obtiene $\partial F_x/\partial y = Ax^2y^4$ mientras que $\partial F_y/\partial x = Bx^2y^4$, es decir, la fuerza de ese ejemplo es conservativa si y solo si $A = B$ lo que antes se pudo meramente sospechar después de hacer dos integrales. Si $A = B$ se concluye que $U(x,y) = x^3y^5/15$. ◀

4.4.2. Energía macánica de un sistema

Para un sistema de N partículas de masas m_a ($a = 1, 2 \ldots N$) en el que hay fuerzas conservativas entre las partículas y también externas (conservativas) al sistema, la energía mecánica total es

$$E = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a v_a^2 + \sum_{a<b} U_{ab}(\vec{r}_a - \vec{r}_b) + \sum_a U_a(\vec{r}_a) \tag{4.4.10}$$

El primer término es la energía cinética total, el segundo es la suma de las energías potenciales asociadas a las fuerzas internas y el último es la suma de las energías potenciales asociadas a las fuerzas externas conservativas.

Un ejemplo interesante de pensar es el sistema Tierra-Luna con la fuerza externa debiba al Sol. Para simplificar se ignora el resto de las fuerzas planetarias. La energía cinética es $K = K_{\text{Tierra}} + K_{\text{Luna}}$. La fuerza interna al sistema es la atracción gravitacional Tierra-Luna y su energía potencial es $U_{TL} = -G\frac{m_T m_L}{r^2}$. El último término en este caso es la suma de energía potencial de la Tierra debido al Sol y de la Luna debida al Sol. No consideramos más contribuciones a la energía mecánica total, porque las que faltan son muy pequeñas. Pero eso no es todo. Existen también las mareas: parte de la energía del sistema Tierra-Luna se gasta en deformar los océanos. Tal energía mecánica se pierde porque se convierte en un ligero aumento de la temperatura del agua. También la Luna, cuyo interior no es entéramente sólido, se deformaba y habría pérdida. Este último proceso de pérdida de energía se optimizó (minimizando la pérdida de energía) en miles de millones de años haciendo que la Luna siempre muestre la misma cara a la Tierra.

Comprobación que en el caso conservativo E dada por (4.4.10) se conserva: Parte del cálculo es saber hacer $\sum_{a<b} dU_{ab}/dt$ y aun antes se debe notar que $\nabla_{\vec r_a} U_{ab} = \nabla_{\vec r_a - \vec r_b} U_{ab} = -\nabla_{\vec r_b} U_{ab}$.

$$\frac{d}{dt}\sum_{a<b} U_{ab} = \sum_{a<b} \nabla_{ab} U_{ab}\cdot(\vec v_a - \vec v_b) = \sum_{a<b} \nabla_{\vec r_a} U_{ab}\cdot \vec v_a + \sum_{a<b} \nabla_{\vec r_b} U_{ab}\cdot \vec v_b = \sum_{a,b} \nabla_{\vec r_a} U_{ab}\cdot \vec v_a$$

De aquí que

$$\frac{dE}{dt} = \sum_a \vec v_a \cdot \left(m_a \dot{\vec v}_a + \sum_b \nabla_{\vec r_a} U_{ab} + \nabla_{\vec r_a} U_a \right)$$

y el paréntesis redondo es cero porque al producto masa por aceleración de cada partícula a se le resta la fuerza total (conservativa) proveniente de los potenciales.

4.5. Energía mecánica total no conservada

En general la fuerza total que actua sobre un cuerpo puede ser separada en una suma de fuerzas conservativas más una suma de fuerzas no conservativas,

$$\vec F^{\text{total}} = \vec F_{\text{C}} + \vec F_{\text{NC}} \tag{4.5.1}$$

En consecuencia, el trabajo total efectuado desde a hasta b puede ser separado,

$$\begin{aligned} W^{\text{total}} &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_{\text{C}} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_{\text{NC}} \cdot d\vec{r} \\ &= W_{\text{C}} + W_{\text{NC}} \\ &= \frac{1}{2} m \left(v_b^2 - v_a^2 \right) \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

pero

$$W_{\text{C}} = U_a - U_b \tag{4.5.3}$$

por lo cual

$$K_b - K_a = U_a - U_b + W_{\text{NC}} \tag{4.5.4}$$

de donde resulta que

$$W_{\text{NC}} = (K_b + U_b) - (K_a + U_a) \tag{4.5.5}$$

que se puede expresar como: *el trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la diferencia: energía mecánica total final menos la energía mecánica total inicial*,

$$W_{\text{NC}} = E_{\text{final total}} - E_{\text{inicial total}} \tag{4.5.6}$$

4.6. Fuerzas centrales y energía potencial

4.6.1. Energía potencial de fuerzas centrales

Se verá a continuación que toda fuerza central de la forma

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{r}, \qquad \text{con} \qquad r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{4.6.1}$$

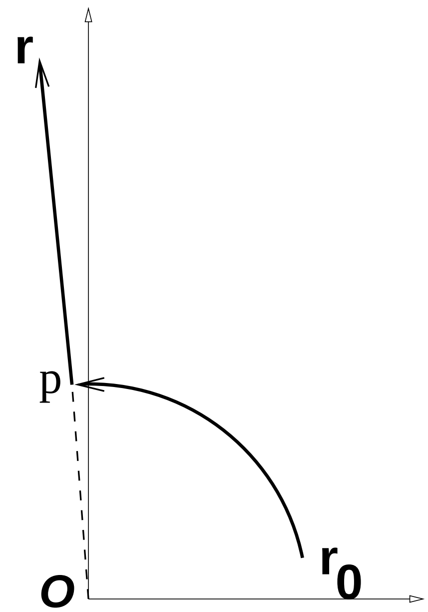
es conservativa. Para verlo primero se nota que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

y de aquí

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f(r)\,x\right) = \frac{\partial f}{\partial y}x = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}x = \frac{xy}{r}f' \tag{4.6.2}$$

que es simétrica en x e y y por tanto se satisfacen las condiciones (4.4.8).



Una vez que se sabe que estas fuerzas son conservativas se puede determinar la función energía potencial escogiendo un camino de integración conveniente entre dos puntos cualesquiera $\vec{r}_0$ y $\vec{r}$. Llamaremos r_0 a la distancia entre $\vec{r}_0$ y el centro $\mathcal{O}$ asociado a la fuerza central y r a la distancia de $\mathcal{O}$ a $\vec{r}$.

Ya que se tiene tres puntos especiales: $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ y $\mathcal{O}$, ellos definen un plano (el plano del papel en la figura adjunta). El camino se puede construir avanzando desde $\vec{r}_0$ por un arco de circunferencia con centro en $\mathcal{O}$ hasta un punto p (definido por $\vec{r}_p$) que está en la recta que une a $\mathcal{O}$ con $\vec{r}$ y desde p se sigue en línea recta hasta $\vec{r}$. La integral de camino tiene dos partes: (a) la integral $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ de $\vec{r}_0$ hasta $\vec{r}_p$ es nula porque mientras la fuerza es en la dirección $\hat{r}$, el elemento de camino $d\vec{r}$ es en la dirección tangente a la curva, que es ortogonal a $\hat{r}$; (b) la integral desde $\vec{r}_p$ hasta $\vec{r}$ que es una integral a lo largo de una línea radial (pasa por el centro de fuerza) como muestra la figura adjunta. Siendo así, el desplazamiento a lo largo de este camino es radial: $d\vec{r} = \hat{r}\,dr$ lo que lleva a

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} f(r)\,\vec{r}\cdot\hat{r}\,dr = -\int_{r_0}^{r} f(r)\,r\,dr \tag{4.6.3}$$

Es inmediato de lo anterior ver que la función de energía potencial depende tan solo de la coordenada radial r.

El gradiente de una función que solo depende de r, escrito en coordenadas esféricas, se reduce a $\nabla U(r) = \hat{r}\,dU/dr$ es decir,

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{r} \tag{4.6.4}$$

lo que muestra que la fuerza que implica una función de energía potencial $U(r)$ que solo depende de la coordenada radial r es una fuerza central del tipo restringido descrito en (4.6.1). Lo que se ha expresado en la fórmula de arriba se puede decir forma más básica: si $U(r)$ entonces $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = -U'\frac{x}{r}$. Pero como $\vec{r}$ es el vector (x,y,z) entonces $\vec{F} = -\frac{1}{r}U'\vec{r} = -U'\hat{r}$. La función $f(r)$ es $-\frac{1}{r}U'$.

4.6.2. La energía potencial asociada a la fuerza de gravitación universal

La ley de gravitación universal

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \tag{4.6.5}$$

ya fue mencionada en §3.1. Para determinar la función energía potencial basta con hacer la integral a lo largo de un radio tal como se explicó en §4.6.1, es decir, $d\vec{r} = \hat{r}\,dr$. En tal caso

$$U = GMm\int_{r_0}^{r}\frac{\hat{r}\cdot\vec{r}}{r^3}\,dr = GMm\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = GMm\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right) \tag{4.6.6}$$

Lo normal es escoger $r_0 = \infty$ de donde

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{4.6.7}$$

4.6.3. La energía potencial del oscilador armónico tridimensional

El potencial

$$U(r) = \frac{k}{2}r^2 \tag{4.6.8}$$

implica una fuerza,

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) = -k\vec{r} \tag{4.6.9}$$

que corresponde a la de un oscilador armónico tridimencional de largo natural nulo.

Casos más generales son

$$U(\vec{r}) = \frac{k}{2}(r-D_0)^2 \tag{4.6.10}$$

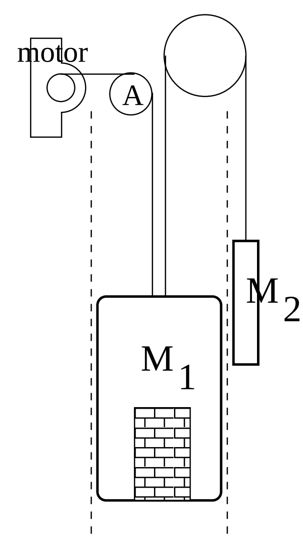
o incluso

$$U(\vec{r}) = \frac{k_1}{2}(x - D_1)^2 + \frac{k_2}{2}(y - D_2)^2 + \frac{k_3}{2}(z - D_3)^2 \qquad (4.6.11)$$

4.7. Problemas

4.1 Una argolla de masa m puede deslizar libremente a lo largo de una vara y esta vara gira, en torno a un punto fijo $\mathscr{O}$, barriendo un plano horizontal con velocidad angular $\dot{\phi} = \omega$ constante. Inicialmente es liberada a distancia ρ_0 del origen con $\dot{\rho} = 0$. Determine el trabajo que efectua la normal desde el instante inicial hasta un tiempo t. Se conocen ρ_0, m y ω.

4.2 Un ascensor cargado tiene masa total M_1 y está conectado a través de una polea A a un motor y por otra polea a un contrapeso de masa M_2 ($M_2 < M_1$). Las poleas tienen roce despreciable pero el ascensor tiene roce viscoso lineal. Para simplificar el problema suponga que los dos cables nacen del mismo punto del techo del ascensor, que no hay ángulo entre ellos y que la inercia de las poleas es despreciable, de modo que el trabajo que se busca es el que hace la tensión del cable de la izquierda.



a) Determine el trabajo que debe hacer el motor para que el ascensor suba una altura h a velocidad constante v_0.

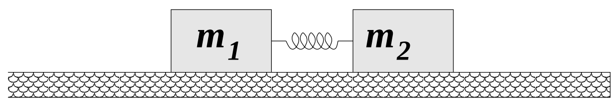
b) Lo mismo que antes pero para que el ascensor suba con aceleración constante entre una posición y otra h metros más arriba si $v(t) = a_0 t$, con $a_0 < g$ entre esas dos posiciones.

Datos: las masas, g, v_0, a_0, el coeficiente de roce lineal, la altura h.

4.3 Si se lanza una partícula de masa m verticalmente hacia arriba con velocidad inicial $\vec{v}_0$ y hay roce viscoso $\vec{F} = -\eta\,\|\vec{v}\|\,\vec{v}$, determine el trabajo total efectuado por $\vec{F}$ hasta que la partícula vuelve su punto de partida.

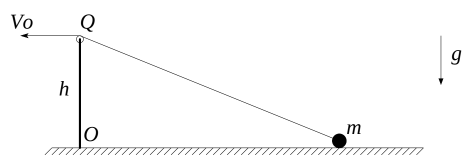
4.4 Dos bloques de masas m_1 y m_2 están apoyados en una superficie horizontal con la que ambos tienen coeficientes de roce estático y dinámido μ_e y μ_d.

Los bloques están además unidos por un resorte de constante elástica k y largo natural D.



En el instante inicial el resorte no está deformado, el bloque de masa m_2 está en reposo y el bloque de la izquierda tiene rapidez v_1. (a) Determine la compresión máxima del resorte para que el bloque 2 no alcance a moverse. (b) Determine el valor máximo de v_1 para que 2 no deslice si $m_2 = 2m_1$ y $\mu_d = \mu_e/2$.

4.5 Una partícula de masa m puede deslizar sobre una superficie horizontal con la que tiene coeficiente de roce dinámico μ. La masa está unida a una cuerda, la cual pasa por una polea en Q y su extremo es recogido con rapidez $V_0 = \text{cte}$. La polea tiene un radio despreciable y se encuentra a una altura h del suelo.



a) Determine la tensión como función de la posición

b) Determine en qué posición la partícula se despega del suelo.

c) Determine el trabajo hecho por la fuerza de roce desde que la partícula estaba a una distancia x_0 del punto O hasta la posición en que se despega de la superficie.