

Capítulo 7

Movimiento relativo

7.1. Cinemática relativa

7.1.1. Fuerzas inerciales y no inerciales

Las fuerzas que se han estudiado hasta ahora son: las de contacto (que abarcan normal, roce estático, roce dinámico, roce viscoso, tensión), elásticas y gravitacional. Y se podría agregar fuerzas eléctricas, magnéticas, nucleares y unas pocas más.

Se conocen relativamente pocas fuerzas en la naturaleza y de ellas sólo tenemos acceso directo a las fuerzas: gravitacional y electromagnéticas (se deja afuera las fuerzas nucleares y subnucleares que sólo se pueden observar en laboratorios muy especializados). Casi todas las fuerzas mencionadas en el párrafo anterior son consecuencias de las interacciones electromagnéticas entre las moléculas que componen la materia. Tan sólo la gravitación es una fuerza aparte. Todas las fuerzas de contacto se deben a las fuerzas intermoleculares que ocurren en el contacto. La tensión en una cuerda es una fuerza debida a la cohesión electromagnética entre las moléculas que constituyen la cuerda. La fuerza elástica que ejerce, por ejemplo, un resorte, se debe a estas fuerzas intermoleculares que tratan de mantener el orden en que están las moléculas en el sólido.

No hay más fuerzas en los sistema de referencias que se denominan *i-nerciales*. Sin embargo, la experiencia en un vehículo que aumenta o dis-

minuye fuertemente su velocidad es de una fuerza que no está entre las anteriores. El pasajero también siente una fuerza cuando el vehículo toma una curva a cierta velocidad. Estas fuerzas son propias de los *sistemas de referencias no inerciales*. Ellas no se deben a fuerzas moleculares o gravitaciones, sino a que nuestro sistema de referencia no tiene una velocidad uniforme.

En un sistema de referencia no inercial ya no vale la ley

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{inercial}}^{\text{tot}}$$

La aceleración definida con respecto a un sistema de referencia no inercial obedece una ley más complicada y este capítulo describe esta nueva ley y sus usos.

7.1.2. Sistemas de referencia y su relación

Se va describir siempre un sistema de referencia por su origen de coordenadas y por ejes cartesianos asociados a él.

No importa qué sistema de coordenadas (cartesianas, cilíndricas, esférica...) se use, un sistema de referencia está definido por su origen \mathcal{O} y sus ejes cartesianos X, Y, Z , es decir, es por definición de sistema de referencia que los ejes cartesianos X, Y, Z son fijos a él, lo mismo que sus vectories unitarios asociados $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$.

Si los ejes X', Y', Z' de un sistema de referencia S' están rotando con respecto a los ejes X, Y, Z de un sistema S , entonces, por ejemplo, el vector \hat{k}' asociado al eje Z' de S' estará cambiando en el tiempo con respecto al sistema S . Formalmente esto se expresa

$$\left(\frac{d\hat{k}'}{dt} \right)_S \neq 0$$

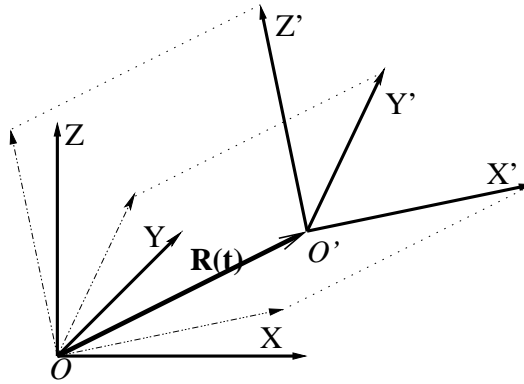
pero, por definición

$$\left(\frac{d\hat{k}'}{dt} \right)_{S'} = 0$$

Esto ilustra que las derivadas temporales calculadas en sistemas de referencia distintos pueden ser diferentes.

Para definir la relación entre un sistema de referencia S y otro S' se utilizan dos vectores:

- el vector $\vec{R}(t)$ que va desde el origen de S al origen de S' y
- el vector $\vec{\Omega}(t)$ que describe cómo giran los ejes de S' con respecto a los ejes de S .



Una buena forma de comprender el significado de $\vec{\Omega}$ se logra considerando una réplica de los ejes $\{X', Y', Z'\}$ que se obtiene por traslación paralela de los ejes de S' hasta O . El vector $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular de estos ejes (representado con líneas a trazos en la figura adjunta) con respecto a los ejes de S .

EJEMPLO: Se puede tener ejes fijos a una mesa (sistema S). El sistema S' puede ser un libro que es movido en círculos sobre la mesa, manteniendo sus aristas siempre paralelas a las de la mesa. En tal caso $\vec{\Omega} = 0$ porque los ejes de S' no rotan respecto a los ejes de S . El movimiento circular del libro es descrito por $\vec{R}(t)$. Una notación compacta es

$$(S, S') \sim [\vec{R}(t), \vec{\Omega}(t)] \quad (7.1.1)$$

Estos dos vectores están definidos en S . Por otro lado, desde S' los ejes de S rotan en $-\vec{\Omega}$ y la posición de O con respecto a O' es $-\vec{R}(t)$. Entonces

$$(S', S) \sim [-\vec{R}(t), -\vec{\Omega}(t)]$$

7.1.3. Derivadas temporales en distintos sistemas de referencia

En esta sección se define movimiento entre sistemas de referencia que tiene movimiento relativo muy general.

Se hace notar que la derivada con respecto al tiempo depende del sistema de referencia. Un caso obvio en que se aprecia esta afirmación es el caso

de dos sistemas de referencia que difieren tan solo en que S' se mueve con velocidad $\vec{V} = v_0 \hat{i}$ con respecto a S . Un cuerpo que está en reposo en S' se mueve con velocidad \vec{V} con respecto a S , es decir, mientras $(dx'/dt)_{S'} = 0$, se tiene que $(dx/dt)_S = v_0$.

La aplicación más sencilla de la ley (1.3.6) es la de variación de los vectores cartesianos $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ propios de S' con respecto al sistema de referencia S . El resultado es

$$\left(\frac{d\hat{i}'}{dt} \right)_S = \vec{\Omega}(t) \times \hat{i}' \quad (7.1.2)$$

y relaciones similares para los otros vectores base en S' .

Una vez que se tiene esta relación resulta fácil obtener la derivada de una función cualquiera

$$\vec{B}(t) = b_1(t) \hat{i}' + b_2(t) \hat{j}' + b_3(t) \hat{k}'$$

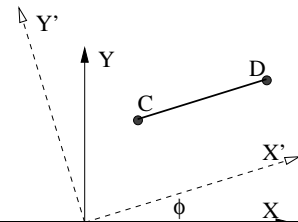
Al hacer la derivada de este vector hay dos tipos de términos: aquellos en que aparecen las derivadas de los coeficientes $b_a(t)$ y otros en que aparece la derivada de los vectores unitarios. Al agruparlos se obtiene

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_S = \left(\frac{db_1}{dt} \hat{i}' + \dots \right) + \vec{\Omega} \times (b_1 \hat{i}' + \dots) \quad (7.1.3)$$

pero el primer paréntesis a la derecha es la derivada de \vec{B} en S' ya que en S' los vectores unitarios prima son fijos. De aquí que el resultado final sea

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{B}} \quad (7.1.4)$$

Por ejemplo: el vector \vec{CD} que describe la longitud de un sistema de dos partículas unidas por un resorte que se mueve en el plano XY de S girando con velocidad angular $\dot{\phi}(t)$. Este vector tiene longitud variable $h(t)$. Este vector también puede ser descrito con respecto a un sistema de referencia S'



que tiene el mismo origen que S pero cuyo eje X' se mantiene paralelo al sistema, es decir, $\vec{CD} = h(t) \hat{i}'$. En S' por definición el vector es siempre paralelo a X' , y solo su longitud cambia en el tiempo, $(d\vec{CD}/dt)_{S'} = \dot{h} \hat{i}'$, mientras que en S también cambia su orientación.

AFIRMACIÓN: Si $(S_0, S_1) \sim [\vec{R}_1, \vec{\Omega}_{01}]$ y $(S_1, S_2) \sim [\vec{R}_2, \vec{\Omega}_{12}]$ se puede afirmar que $(S_0, S_2) \sim [\vec{R}_1 + \vec{R}_2, \vec{\Omega}_{02} = \vec{\Omega}_{01} + \vec{\Omega}_{12}]$. En palabras: si la velocidad angular de S_1 es $\vec{\Omega}_{01}$ con respecto a S_0 y la velocidad angular de S_2 es $\vec{\Omega}_{12}$ con respecto a S_1 entonces la velocidad angular de S_2 con respecto a S_0 es

$$\vec{\Omega}_{02} = \vec{\Omega}_{01} + \vec{\Omega}_{12} \quad (7.1.5)$$

Lo anterior se puede resumir diciendo que las velocidades angulares relativas se suman vectorialmente.

Para demostrar esto se hace uso de (7.1.4) con \vec{B} un vector variable cualquiera

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_{S_0} &= \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_{S_1} + \vec{\Omega}_{01} \times \vec{B} \\ &= \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_{S_2} + \vec{\Omega}_{02} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

pero también es cierto que

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)_{S_2} + \vec{\Omega}_{12} \times \vec{B} \quad (7.1.7)$$

Si esta última relación se reemplaza en la primera y el resultado se compara con la segunda relación y se concluye (7.1.5).

7.2. Velocidad y aceleración en un sistema no inercial

La fórmula general (7.1.4) será utilizada para relacionar la cinemática descrita desde dos sistemas de referencia diferentes. Consideremos la de-

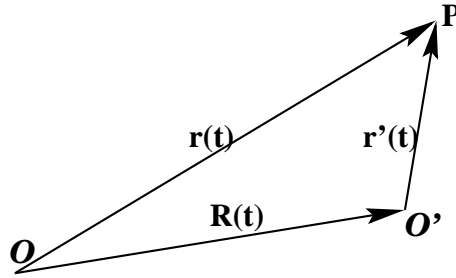


Figura 7.1: El punto móvil P es visto desde un sistema de referencia S con origen en O y desde un sistema de referencia S' con origen en O' tal que el vector posición \vec{R} de O' . Los ejes de S' rotan con respecto a S con velocidad angular $\vec{\Omega}$.

descripción del movimiento de un punto P visto desde los sistemas de referencia S y S' que tienen una velocidad angular relativa $\vec{\Omega}$. La posición de P es $\vec{r}(t)$ respecto a S y es $\vec{r}'(t)$ respecto a S' y la relación entre ambos vectores posición es

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t) \quad (7.2.1)$$

El vector \vec{R} es el que va desde O a O' . Directamente de (7.1.4) se obtiene que

$$\left(\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \right)_S = \vec{v}'(t) + \vec{\Omega}(t) \times \vec{r}'(t) \quad (7.2.2)$$

Combinando las dos últimas relaciones se deduce que

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{R}} + \vec{v}'(t) + \vec{\Omega}(t) \times \vec{r}'(t) \quad (7.2.3)$$

Al tomar la derivada respecto al tiempo en el sistema S de la relación anterior se debe calcular primero

$$\left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{v}' \quad (7.2.4)$$

El primer término de la derecha es la aceleración \vec{a}' en S' . La derivada del segundo término en (7.2.3) es

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{\Omega} \times \vec{r}'}{dt} \right)_S &= \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_S \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_S \\ &= \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times \left(\vec{v}' + (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \right) \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Entonces la aceleración es

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_S \\
 &= \ddot{\vec{R}} + \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_S + \left(\frac{d\vec{\Omega} \times \vec{r}'}{dt} \right)_S \\
 &= \ddot{\vec{R}} + \vec{a}' + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}' + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')
 \end{aligned}$$

que se puede ordenar para obtener finalmente

$$\vec{a}' = \vec{a} - \ddot{\vec{R}} - \dot{\vec{\Omega}} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' - \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' \quad (7.2.6)$$

De los cinco términos del lado derecho, el tercero, $-\dot{\vec{\Omega}} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$, se llama *aceleración centrífuga* y el cuarto, $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}'$, se llama *aceleración de Coriolis*.

7.3. La ecuación de movimiento en un sistema no inercial

La ecuación de Newton $m\vec{a} = \vec{F}$, válida en el sistema de referencia inercial S , toma en el sistema de referencia arbitrario S' la forma

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\dot{\vec{\Omega}} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'} \quad (7.3.1)$$

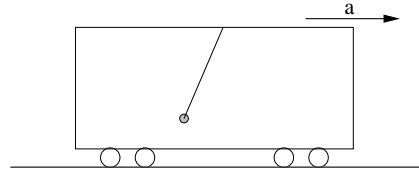
El primer término de la derecha es la fuerza total que se tiene en el sistema de referencia inercial S . Los cuatro términos restantes a la derecha se les suele llamar *seudo fuerza* o también *fuerzas no inerciales*. De ellos, aquel que es cuadrático en $\vec{\Omega}$ es la *fuerza centrífuga* y el que sigue es la *fuerza de Coriolis*. El último término se denomina *fuerza trasversal*.

En un sentido estricto la Tierra no es un sistema inercial y se verá algunos ejemplos que muestran los efectos de esto. Sin embargo para muchos otros fenómenos los efectos noinerciales de la Tierra son tan pequeños que es razonable despreciarlos.

EJEMPLO: El sistema de referencia S' de un ascensor al que se le acaban de cortar los cables es no inercial. Cae a lo largo del eje Z con aceleración $\ddot{\vec{R}} = \vec{g}$. Respecto al edificio S no hay rotación, esto es, $\vec{\Omega} = 0$ por lo que la ecuación de movimiento de un objeto P soltado dentro del ascensor S' que cae es $m\vec{a}' = m\vec{g} - m\vec{g} = 0$, es decir, P se mueve con velocidad \vec{v}' uniforme. En S' el cuerpo flota libremente. ◀

EJEMPLO: Normalmente una plomada es un péndulo en reposo y sirve para determinar la dirección vertical, es decir, la dirección de la tensión del péndulo en reposo define la vertical.

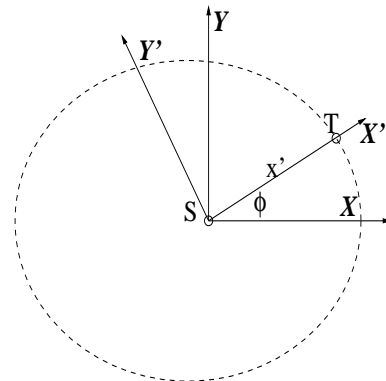
En el caso de un vehículo S' con aceleración horizontal constante $\ddot{\vec{R}} = \vec{a} = a\hat{i}$, con respecto a un suelo S inercial, la masa en el extremo del hilo de un péndulo en reposo—con respecto al vehículo—está sometida a las fuerzas inerciales de la tensión \vec{T} del hilo y a su propio peso, $m\vec{g} = -mg\hat{k}$. La ecuación (7.3.1), tomando en cuenta que $\vec{a}' = 0$ se reduce a $\vec{T} = -m(\vec{g} - \vec{a})$. Es decir, la plomada determina una “vertical” que apunta en diagonal hacia atrás si $a > 0$. Si alguien camina hacia adelante dentro del vehículo tendrá la sensación de estar subiendo por un plano inclinado caracterizado por una pendiente α tal que $\tan \alpha = a/g$. ◀



EJEMPLO:

Consideremos un sistema S' de ejes coordenados con origen en el centro del Sol y tal que un satélite (puede ser la Tierra) está siempre sobre el eje X' .

Este sistema S' está rotando a la velocidad angular $\dot{\phi}$ del satélite. Esta vez $\vec{\Omega} = \dot{\phi}\hat{k}$ mientras que $\ddot{\vec{R}} = 0$ todo el tiempo. Entonces $\vec{r}' = x'\hat{i}'$, $\vec{v}' = \dot{x}'\hat{i}'$ y $\vec{a}' = \ddot{x}'\hat{i}'$, es decir, por elección de las coordenadas en el sistema S' la aceleración sólo apunta en la dirección del eje \hat{i}' . Trabajando la ecuación (7.3.1) se obtiene que



$$m\ddot{x}'\hat{i}' = \vec{F}_{\text{gravit}} + m\dot{\phi}^2 x'\hat{i}' - \frac{m}{x'} \frac{d}{dt} (\dot{\phi} x'^2) \hat{j}' \quad (7.3.2)$$

Al igualar separadamente los coeficientes de los dos vectores unitarios se obtiene que $\frac{d}{dt} (\dot{\phi} x'^2) = 0$, es decir, $m\dot{\phi} x'^2 = \ell$ es constante y la ecuación de movimiento en S' se reduce a

$$m\ddot{x}' = -\frac{GMm}{x'^2} + \frac{\ell^2}{mx'^3} = -\frac{d}{dx'} \left(-\frac{GMm}{x'} + \frac{\ell^2}{2mx'^2} \right) \quad (7.3.3)$$

Así se ha obtenido la ecuación de movimiento unidimensional de una partícula sometida a un potencial $-\frac{GMm}{x'} + \frac{\ell^2}{2mx'^2}$ que contiene al potencial gravitacional y al potencial asociado a la fuerza centrífuga. ◀

7.3.1. Ejemplo ilustrativo

La figura adjunta representa un anillo que gira con velocidad angular $\vec{\Omega}$ en torno a un eje vertical que pasa por el centro del anillo. El anillo barre una superficie esférica. Una partícula puede moverse a lo largo del anillo sin ningún tipo de roce. Para escribir la ecuación de movimiento se usará el sistema de referencia no inercial que gira solidariamente con el anillo y en este sistema se escoge coordenadas polares en la forma que se muestra en la figura. Puesto que tanto la velocidad angular como \vec{g} son verticales, se escriben en forma similar:

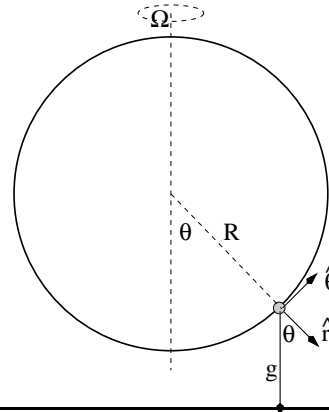
$$\vec{g} = g (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta), \quad \vec{\Omega} = \Omega (\hat{\theta} \sin \theta - \hat{r} \cos \theta)$$

El vector \vec{R} es nulo. La ecuación de movimiento completa tiene una componente a lo largo de \hat{r} que solo sirve para determinar el valor de la normal y tiene otra componente a lo largo de θ que es la que interesa. La posición de la partícula en S' está dada por $\vec{r}' = R\hat{r}$ y teniendo presente que

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta}, \quad \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r} \quad (7.3.4)$$

se obtiene que

$$\vec{v}' = R\dot{\theta} \hat{\theta}, \quad \vec{a}' = R(\ddot{\theta} \hat{\theta} - \dot{\theta}^2 \hat{r})$$



Con estas expresiones se puede comprobar, por ejemplo, que tanto $\vec{\Omega}$ como \vec{g} son constantes. La fuerza centrífuga se puede calcular y resulta ser

$$-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = m\Omega^2 R \sin \theta (\hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta) \quad (7.3.5)$$

y la fuerza de Coriolis en este ejemplo resulta apuntando en la dirección $\hat{\phi}$ por lo que sólo contribuye a la determinación de la normal.

Las fuerzas (inerciales y no inerciales) de (7.3.1) que tienen componente a lo largo de $\hat{\theta}$ son el peso y la fuerza centrífuga por lo que la ecuación queda

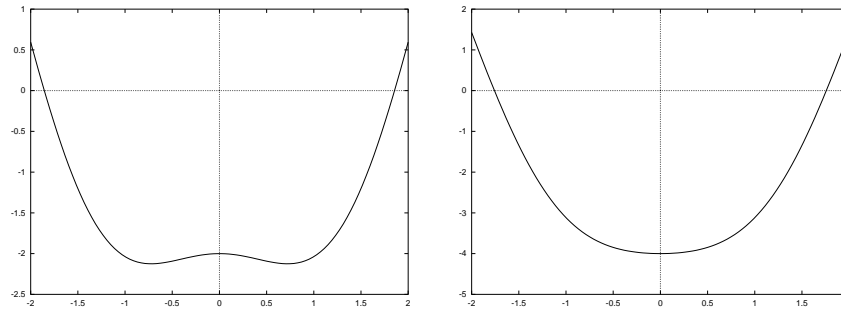
$$mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + m\Omega^2 R \sin \theta \cos \theta \quad (7.3.6)$$

que puede ser visto como un problema con energía potencial U ,

$$U = mgR \left(\frac{R\Omega^2}{4g} \cos(2\theta) - \cos \theta \right) \quad (7.3.7)$$

ya que $-dU/d(R\theta)$ da la fuerza que aparece a la derecha en la ecuación de movimiento (7.3.6). Si $\theta = 0$ la fuerza se anula, es decir, es un punto de equilibrio, pero ¿es estable? La fuerza también se anularía si se cumpliera que

$$\cos \theta = \frac{g}{R\Omega^2}$$



Forma del pozo (7.3.7) en los casos en que $\theta = 0$ es inestable o estable.

pero esta relación no puede ser cierta bajo cualquier condición porque es necesario que el lado derecho sea menor que 1. Es decir, aparece un segundo punto de equilibrio cuando se cumple

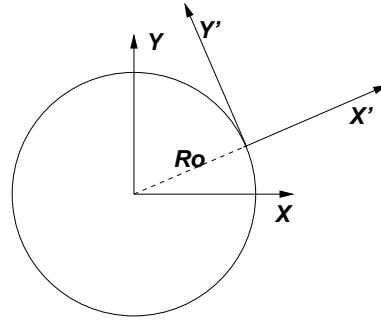
$$\Omega^2 \geq \frac{g}{R}$$

El resto del ejemplo puede ser desarrollado como trabajo personal. Se deja como ejercicio demostrar que $\theta = 0$ es estable cuando la desigualdad anterior no se cumple, mientras que el segundo punto de equilibrio es estable cuando esta desigualdad se cumple.

7.3.2. Otro ejemplo

Una vara de largo R_0 gira en un plano horizontal con un extremo fijo a velocidad angular constante Ω . Al extremo móvil de la vara está unido un resorte de largo natural nulo cuyo otro extremo tiene una partícula de masa m . El sistema masa-resorte tiene frecuencia natural ω y se cumple $\omega > \Omega$.

Lo que hace menos trivial este problema es que el punto fijo del resorte está fijo al sistema no inercial S' y a distancia R_0 del eje de rotación (y se escoge como origen de S'), a lo largo del eje X' . Se escoge el eje Z en la dirección de la velocidad angular, el eje X' se escoge radial al movimiento e Y' en la dirección $\hat{\phi}$. La ecuación de movimiento (dividida por m) es



$$\ddot{x}'\hat{i} + \ddot{y}'\hat{j} = -\omega^2(x'\hat{i} + y'\hat{j}) + R_0\Omega^2\hat{i} - \Omega^2\hat{k} \times (\hat{k} \times (x'\hat{i} + y'\hat{j})) - 2\Omega\hat{k} \times (v'_x\hat{i} + v'_y\hat{j}) \quad (7.3.8)$$

(aunque no se ha puesto primas, todos los vectores unitarios corresponden a los ejes de S'). El primer término a la derecha proviene de la fuerza armónica (resorte), el segundo es el que proviene de $-m\ddot{\vec{R}}$, los términos tercero y cuarto provienen de la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis respectivamente. La ecuación se reduce a dos ecuaciones escalares

$$\ddot{x}' = R_0\Omega^2 - (\omega^2 - \Omega^2)x' + 2\Omega\dot{y}', \quad \ddot{y}' = -(\omega^2 - \Omega^2)y' - 2\Omega\dot{x}' \quad (7.3.9)$$

Existe una solución estática trivial que corresponde a $y'(t) = 0$, $\dot{x}' = 0$ y $\dot{y}' = 0$ que arroja un valor x'_0 de x' ,

$$x'_0 = \frac{R_0\Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}$$

Si en las ecuaciones (7.3.9) se hace un cambio a coordenadas polares en torno a un origen \mathcal{O}' desplazado en x'_0 ,

$$x' = x'_0 + \rho(t) \cos \phi(t), \quad y' = \rho(t) \sin \phi(t)$$

entonces se puede comprobar que existe una solución muy sencilla con radio $\rho = \rho_0$ y con velocidad angular $\dot{\phi} = \Omega \pm \omega$. Existen otras soluciones bastante más complejas.

7.4. Nave espacial que rota

Para hacer largos viajes espaciales parece conveniente que los astronautas vivan en un ambiente que simule la gravedad terrestre. Esto se logra con una nave que esté rotando. Consideremos una nave que se mueve en el espacio interestelar con velocidad uniforme, esto es con $\ddot{\vec{R}} = 0$, que tiene forma de un gran anillo de radio r_0 como la que se describe en la figura 7.2.

Se considerará ejes cartesianos $X Y$ para el sistema inercial y ejes $X' Y'$ fijos a la nave. Ambos sistemas de ejes tienen su origen en el centro de giro de la nave. La velocidad angular de la nave, con respecto a un sistema de referencia inercial, es $\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$.

Sobre un cuerpo soltado muy cerca del suelo no está actuando fuerza inercial alguna. La ecuación de movimiento (7.3.1) para este caso es

$$\ddot{x}' = \Omega^2 r_0 \quad (7.4.1)$$

y numéricamente se desea que esta sea precisamente la aceleración de gravedad terrestre, es decir, el diseño tiene la condición

$$\Omega^2 r_0 = g \quad (7.4.2)$$

Puede verse que si r_0 es de alrededor de un kilómetro entonces la nave debe girar aproximadamente dando una vuelta por minuto.

Un cuerpo que se mueve por el “corredor central” de la nave mantiene ρ constante ($\dot{\rho} = 0$) y tanto la fuerza centrífuga como la de Coriolis apuntan radialmente:

$$\vec{F}_{\text{centrof}} + \vec{F}_{\text{Coriolis}} = m\Omega\rho (2\dot{\phi} + \Omega) \hat{\rho}$$

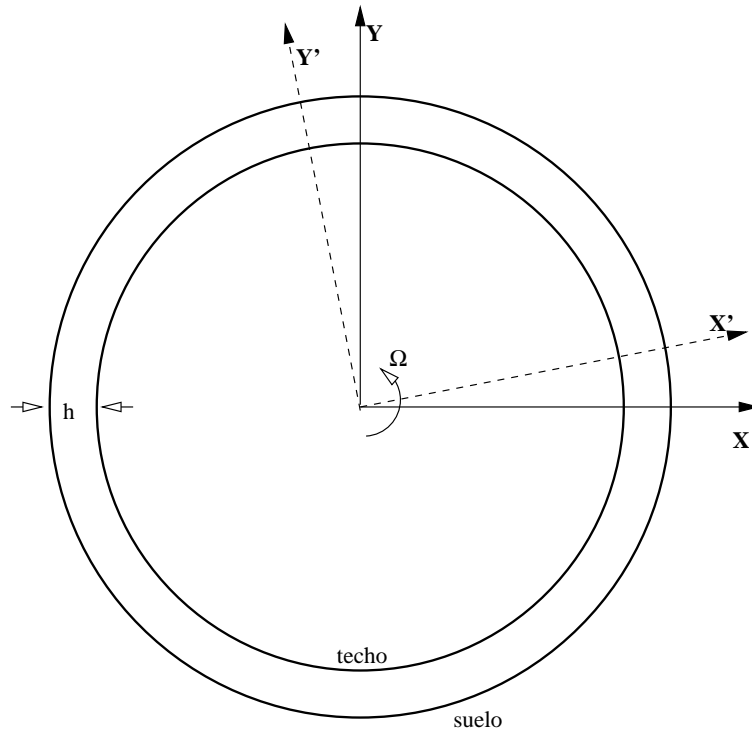


Figura 7.2: Nave espacial en la forma de un gran anillo que rota. El radio desde el centro al suelo es r_0 y hay un “techo” a altura h del suelo, como lo muestra la figura. La nave gira con velocidad angular $\vec{\Omega}$ perpendicular al plano de la figura. Los ejes (X', Y') están fijos a la nave.

y puede hacerse cero. La ecuación de movimiento completa tiene aceleración y fuerzas solo en la dirección $\hat{\rho}$, incluyendo la normal $\vec{N} = -N\hat{\rho}$, y es

$$m(\rho\dot{\phi}^2) = -N + m\Omega\rho(2\dot{\phi} + \Omega)$$

de donde se ve que la normal se anula cuando $\dot{\phi} = -\Omega$.

7.5. Efectos de la rotación de la Tierra

7.5.1. Cuestiones generales

Si un sistema $S' = \{\mathcal{O}, (X', Y', Z')\}$ (Tierra) rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$ constante con respecto al sistema inercial $S = \{\mathcal{O}, (X, Y, Z)\}$, y $\vec{R} = 0$ y $Z' = Z$, entonces $\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$. Los vectores posición, velocidad y aceleración de un cuerpo P en la Tierra son, como siempre,

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= z\hat{k} + \rho\hat{\rho} \\ \vec{v}' &= \dot{z}\hat{k} + \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} \\ \vec{a}' &= \ddot{z}\hat{k} + (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi}\end{aligned}\quad (7.5.1)$$

donde ρ es la distancia desde el punto móvil P y el eje de rotación de la Tierra y el ángulo ϕ define el meridiano en el cual está P , es decir, es la coordenada cilíndrica ϕ de P con respecto al eje X' fijo al sistema noinercial S' .

Las únicas fuerzas noinerciales en S' (descritas en coordenadas cilíndricas) son

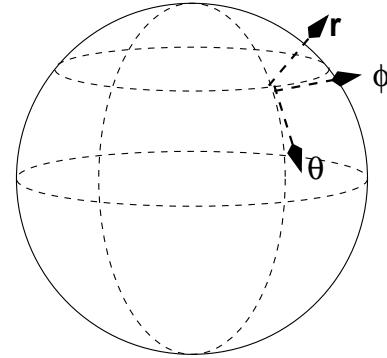
$$\vec{F}_{\text{centrif}} = m\Omega^2 \rho \hat{\rho} \quad \vec{F}_{\text{Coriolis}} = 2m\Omega (\rho\dot{\phi}\hat{\rho} - \dot{\rho}\hat{\phi}) \quad (7.5.2)$$

Todo el análisis se hará como si la Tierra estuviese aislada de toda influencia externa y su centro puede ser considerado fijo en un sistema de referencia inercial. En particular, entonces, se despreciará los efectos que pudieran provenir de la rotación de la Tierra alrededor del Sol.

El vector radial desde el centro de la Tierra y el vector unitario, tangencial a la superficie esférica y hacia el Sur, expresados en la base de vectores asociados a coordenadas cilíndricas son

$$\hat{r} = \frac{z\hat{k} + \rho\hat{\rho}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}, \quad \hat{\theta} = \frac{z\hat{\rho} - \rho\hat{k}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \quad (7.5.3)$$

El vector $\hat{\phi}$ común a coordenadas cilíndricas y esféricas apunta en dirección Este.



Se considerará a la Tierra como un sistema con velocidad angular $\vec{\Omega}$ constante respecto a un eje fijo—que une al polo norte con el polo sur. La velocidad angular de la Tierra es aproximadamente

$$\Omega_T = 0,00007 \quad \text{radianes/segundos}$$

Se analizará los efectos de la rotación de la Tierra sobre un cuerpo que se mueve cerca de la superficie de ella, es decir, se toma \vec{g} con valor fijo. La fuerza total sobre este cuerpo, entonces, es

$$\vec{F}^{\text{total}} = \vec{f} + m\vec{g} \quad (7.5.4)$$

donde \vec{f} es una fuerza inercial: de resorte, de roce, de viscosidad, gravitacional o una combinación de varias de ellas.

La ecuación de movimiento del cuerpo es

$$m\vec{a}' = \vec{f} + m\vec{g} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' \quad (7.5.5)$$

La fuerza centrífuga: Si se analiza el término centrífugo se verá que es una fuerza perpendicular al eje de la Tierra, apunta hacia afuera y depende de la latitud, es decir, depende del ángulo θ de coordenadas esféricas. Esta fuerza solo depende de la posición en la Tierra del objeto y resulta natural sumarla con el término de peso produciendo:

$$\begin{aligned} \vec{g}_{\text{local}} &= \vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \\ &= \vec{g} + \Omega^2 \rho \hat{\rho} \\ &= -\frac{gz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \hat{k} - \left(\frac{g}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} - \Omega^2 \right) \rho \hat{\rho} \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

que define la *aceleración de gravedad* que efectivamente actúa en ese lugar. Nótese que \vec{g}_{local} no apunta hacia el centro de la Tierra debido a la aceleración centrífuga. En particular, por tanto, una plomada apunta hacia el centro de la Tierra sólo en el Ecuador y en los Polos. A la aceleración de gravedad se le agrega un vector en la dirección $\hat{\rho}$ que es perpendicular al eje de rotación de la Tierra. El denominador $\sqrt{z^2 + \rho^2}$ puede ser aproximado al valor R_0 del radio de la Tierra.

♣ *De lo anterior justifique que la desembocadura del río Mississippi está más distante del centro de la Tierra que su superficie varios kilómetros “río arriba”.*

- ♣ Calcule, para un punto a nivel del mar, la razón entre el valor de la aceleración centrífuga en el ecuador, debido a la rotación de la Tierra sobre su eje, y la aceleración de gravedad.
- ♣ Compruebe que al comparar numéricamente los dos términos que hay en el gran paréntesis redondo en (7.5.6), el primero es más de 200 veces más grande que el segundo.

La fuerza de Coriolis: La fuerza de Coriolis es $\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}'$. La Tierra gira hacia el Este, por lo que la regla de la mano derecha da que $\vec{\Omega}$ apunta del polo Sur al polo Norte. La expresión para esta fuerza en coordenadas esféricas es

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = 2m\Omega (\hat{r} r' \dot{\phi} \sin^2 \theta + \hat{\theta} r' \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta - \hat{\phi} \{ \dot{r}' \sin \theta + r' \dot{\theta} \cos \theta \})$$

Los vectores unitarios apuntan: \hat{r} hacia arriba, $\hat{\theta}$ hacia el Sur y $\hat{\phi}$ hacia el Este.

Cuerpo que sube: Este es un caso en el cual $\dot{r} > 0$, $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\phi} = 0$ y la fuerza de Coriolis se reduce a

$$\hat{\phi} (-2m\Omega \dot{r}' \sin \theta)$$

que es una fuerza que apunta hacia el Oeste. Por ejemplo, el aire que se calienta en contacto con el suelo caliente en las zonas tropicales sube y la fuerza de Coriolis hace que se desvie hacia el Oeste. En todo el globo, los vientos que dominan en el Ecuador van hacia el Oeste. Si, por el contrario se deja caer un cuerpo desde el reposo, la fuerza de Coriolis lo desvía hacia el Este.

Combinada con el efecto sobre los aires que en latitudes polares se enfrían y bajan se obtiene el efecto neto que los vientos y océanos en zonas de tamaño continental tienden a tener un movimiento rotatorio que es (mirado en un mapa) tipo punteros de un reloj en el hemisferio Norte y en el sentido contrario en el hemisferio Sur. Ejemplo, la corriente de Humbolt. El efecto sobre costas Oeste es que acercándose al trópico los aires son cada vez más secos y de ahí la existencia del desierto de Atacama, el de California y el de Namibia.

Cuerpo que se mueve hacia el Sur: Este es un caso en el cual $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} > 0$ y $\dot{\phi} = 0$ y la fuerza de Coriolis se reduce a

$$\hat{\phi} (-2m\Omega r' \dot{\theta} \cos \theta)$$

que apunta hacia el Este en el hemisferio Norte ($\theta < \pi/2$) y apunta hacia el Oeste en el hemisferio Sur ($\pi/2 < \theta < \pi$). Por ejemplo, el tren que va de Santiago a Concepción se apoya más en el riel Oeste. Las aguas del Nilo, que en el hemisferio Norte fluyen hacia el Norte ($\dot{\theta} < 0$) sienten una fuerza hacia el Oeste las aguas en esa rivera están un poco más altas.

Cuerpo que se mueve hacia el Este: Este es un caso en el cual $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\phi} > 0$ y la fuerza de Coriolis se reduce a una expresión que se escribe en forma muy sencilla en coordenadas cilíndricas

$$2m\Omega\dot{\phi}\rho\hat{\rho}$$

Esta fuerza es paralela a la fuerza centrífuga y aumenta o disminuye el efecto de la centrífuga según el signo de $\dot{\phi}$. En efecto, un cuerpo que se mueve horizontalmente de Oeste a Este experimenta una fuerza de Coriolis paralela a la fuerza centrífuga. Si se mueve de Este a Oeste estas dos fuerzas son antiparalelas.

» De todo lo anterior se puede comprender que Buenos Aires tiene clima húmedo y Santiago tiene clima seco.

♣ *Tómese un sistema de referencia S' con origen en el centro \mathcal{O} de la Tierra y que gira solidariamente con ella, y otro sistema S con el mismo origen pero que no gira. Si un cuerpo, en reposo respecto a la Tierra S' , es soltado desde una altura h del suelo, tiene un momento angular en S que es $\ell = (R_0 + h)^2 \Omega$ donde R_0 es la distancia desde \mathcal{O} hasta el suelo. Se sabe que ℓ se conserva porque solo está actuando una fuerza central, pero h va cambiando a medida que el cuerpo cae, por tanto la velocidad angular del cuerpo, visto desde S , también va a ir cambiando para poder conservar el valor de ℓ . Analice desde este punto de vista en qué dirección se desvía de la vertical el movimiento a media que cae (norte, sur, este, oeste).*

» **PÉNDULO DE FOUCAULT:** El siguiente problema es sólo para quienes les atrae hacer análisis prolijos y complejos. Ya se sabe que un péndulo plano es un péndulo que oscila en un plano fijo. Sin embargo, al decir plano fijo se quiere decir más específicamente que el plano es fijo con respecto a un sistema de referencia inercial. Esto es equivalente a decir que la velocidad angular de la masa en el

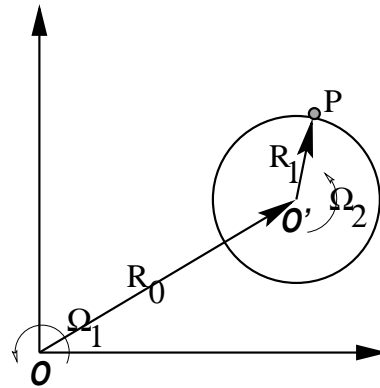
extremo del hilo cambia de magnitud en el tiempo pero su dirección (horizontal) no cambia ya que es siempre ortogonal al plano de oscilación. La Tierra al girar, sin embargo, hace que el movimiento se vea diferente. Un caso trivial de analizar es el de un péndulo oscilando justo en el polo Sur. El péndulo mantiene su plano fijo mientras el terreno bajo el péndulo gira en torno al eje que pasa justo por el punto fijo en el extremo superior del hilo. Para alguien parado junto al péndulo le va a parecer que el plano del péndulo va girando (es la Tierra y no el péndulo quien gira) y completa una vuelta completa en 24 horas. Analice el caso de un péndulo en Santiago y compruebe que el plano del péndulo hace un giro completo en un tiempo $T = 2\pi/(\omega \cos \theta)$ donde ω es la velocidad angular de la Tierra y $\frac{\pi}{2} - \theta$ expresado en grados es la latitud de Santiago. Un péndulo suficientemente estable que permita observar este fenómeno se denomina péndulo de Foucault.

7.6. Problemas

- 7.1 En dos dimensiones la posición de \mathcal{O}' siempre puede escribirse como $\vec{R} = R(t) (\hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi)$ donde $\phi = \phi(t)$. Se elige \hat{j}' en la dirección de \vec{R} , es decir, por definición $\vec{R} = R \hat{j}'$. En tal caso la velocidad angular Ω , apunta en la dirección perpendicular al plano y su magnitud es $\dot{\alpha}$ donde $\cos \alpha = \hat{j} \cdot \hat{j}'$. Determine Ω en general. Luego especialice su resultado al caso $\phi = \omega t$ y $R = R_0 \exp[B \omega t]$, donde B es una constante cualquiera.
- 7.2 Un anillo de masa m se puede mover solo a lo largo de un vara que tiene un extremo fijo \mathcal{O} y gira en el plano XY del sistema intercal S . El anillo está unido a un resorte (enrollado a lo largo de la vara), de largo natural ρ_0 y constante elástica k . Escriba la ecuación de movimiento del anillo en el sistema S' que gira junto a la vara (la vara es el eje X'), obtenga su punto de equilibrio y las pequeñas oscilaciones en torno a él.
- 7.3 Un carro avanza hacia el centro de un gran disco a lo largo de uno de sus radios, con rapidez v_0 relativa al disco. El disco gira siempre

horizontal con velocidad angular constante Ω en torno a su centro. En el interior del carro cuelga un péndulo, el que en el instante t_0 tiene velocidad y aceleración nula con respecto al carro. Determine los ángulos α y β que forma el hilo del péndulo hacia atrás y hacia un costado, en relación a la vertical.

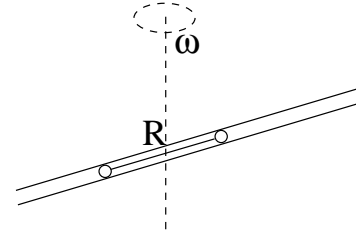
- 7.4 Una vara con un extremo en un punto O fijo al sistema inercial S , gira con velocidad angular constante $\vec{\Omega}_1$ en torno a O en el plano XY de S . El otro extremo de la vara de largo R_0 es el punto O' . Se pide escribir la ecuación de movimiento (7.3.1) para el punto masivo P , masa m , que gira, en torno a O' con velocidad uniforme $\vec{\Omega}_2$ con respecto a la vara, como lo indica la figura. (a) Obtenga la ecuación de movimiento de P en el sistema de referencia S' centrado en O' y que mantiene sus ejes paralelos a los del sistema inercial S ; (b) idem para el sistema S'' , también centrado en O' pero con sus ejes girando de tal modo que P siempre está sobre el eje X'' .



- 7.5 En el caso de la nave espacial descrita en el texto principal, compruebe que cuando un astronauta sale a trotar a lo largo del gran corredor central, el peso que sus piernas deben soportar puede aumentar o disminuir considerablemente si lo hace en un sentido o el otro del corredor.
- 7.6 Desde un punto B en el techo se suelta un cuerpo en reposo respecto a la nave y cae sobre el punto A' del suelo. Luego se coloca una plomada en B y se determina el punto A del suelo justo bajo B . ¿Qué distancia hay entre A y A' ? Calcule todo numéricamente suponiendo que el techo está 5 metros sobre el suelo, $r_0 = 1000$ metros, que la “aceleración de gravedad” en el suelo es g . ¿Cuánto tarda el cuerpo en golpear el suelo?

7.7 Dos partículas de masa m , unidas por un alambre rígido de masa despreciable y largo R , pueden moverse a lo largo del interior de un tubo. El tubo está girando barriendo un plano horizontal con velocidad angular constante ω .

- [a] Decida si la posición simétrica (las partículas en reposo y a igual distancia del centro de giro) es estable o no. [b] Si el punto medio del alambre ahora es colocado a una pequeña distancia d del centro de giro ¿Qué rapidez, respecto del tubo, tiene el sistema cuando esa distancia crece hasta el valor R ? [c] Compare la energía inicial y final del movimiento anterior y comente.



7.8 Una vara gira en un plano con velocidad angular constante $\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$ barriendo un plano fijo. Una cuenta de collar de masa m puede deslizarse por la vara. El contacto cuenta-vara se caracteriza por los coeficientes de roce μ_e y μ_d . No hay gravedad. Si S es un sistema de referencia inercial fijo al plano de giro y S' es un sistema de referencia no inercial cuyo eje X' coincide todo el tiempo con la vara, determine (a) la fuerza centrífuga y de Coriolis que actúan sobre la cuenta en el sistema de referencia S' . (b) Obtenga la ecuación de movimiento de la cuenta y la ecuación que determina la fuerza normal. Decida bajo qué condiciones (si es que hay alguna) la cuenta podría estar estática con respecto a la vara. (c) Resuelva la ecuación de movimiento suponiendo que en el instante $t = 0$ la cuenta parte del centro de giro con rapidez v_0 , con respecto a la vara.

7.9 Se tiene una cuña de ángulo α , oscilando horizontalmente tal que $\overline{OO'} = x = A \sin \omega t$. Sobre la cara inclinada de la cuña, a altura h sobre el eje X , hay un cuerpo de masa m que tiene, con la superficie inclinada, un coeficiente de roce estático μ . Se da como dato que si la cuña no oscilara el cuerpo no deslizaría. Si se conoce A , se pide una condición sobre ω para que el cuerpo no se mueva con respecto a la cuña.