

# Capítulo 8

## Sistemas de Partículas

### 8.1. Definiciones básicas

Versión con todos los *comments* visibles

#### 8.1.1. Repaso

En la sección §2.2 se dió algunas de las definiciones básicas necesarias para describir sistemas de muchas partículas. Entre ellos, la masa total del sistema

$$M = \sum_{k=1}^N m_a \quad (8.1.1)$$

y si  $G$  es el *centro de masa* su posición y velocidad son

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_a \vec{r}_a \quad (8.1.2)$$

$$\vec{V}_G = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_a \vec{v}_a \quad (8.1.3)$$

El centro de masa tiene como ecuación de movimiento

$$M \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{F}^{\text{total}} \quad \text{donde} \quad (8.1.4)$$

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_a \quad (8.1.5)$$

y se demostró que la fuerza a la derecha es la suma de las fuerzas externas sobre el sistema.

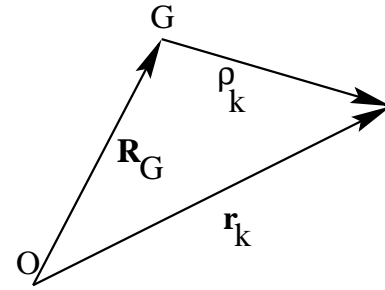
### 8.1.2. Posiciones con respecto al centro de masa

Se define las posiciones  $\vec{\rho}_a$  desde el centro de masa,

$$\vec{\rho}_a \equiv \vec{r}_a - \vec{R}_G \quad (8.1.6)$$

de velocidad con respecto al sistema CM es

$$\dot{\vec{\rho}}_a \equiv \vec{v}_a - \vec{V}_G \quad (8.1.7)$$



♣ Demuestre que

$$\sum_{k=1}^N m_a \vec{\rho}_a = 0 \quad (8.1.8)$$

A veces también es útil la derivada temporal de la relación anterior,

$$\sum_{k=1}^N m_a \dot{\vec{\rho}}_a = 0 \quad (8.1.9)$$

Se demuestra que la energía cinética puede ser separada en la energía cinética del sistema en su conjunto y la energía cinética total con respecto al sistema de referencia que acompaña al centro de masa:

$$\begin{aligned} K^{\text{tot}} &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a v_a^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \left( \vec{V}_G + \dot{\vec{\rho}}_a \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \left( V_G^2 + \dot{\rho}_a^2 + 2\dot{\vec{\rho}}_a \cdot \vec{V}_G \right) \end{aligned}$$

pero el último término en el paréntesis es nulo debido a (8.1.9). De aquí que

$$K^{\text{tot}} = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \dot{\rho}_a^2 \quad (8.1.10)$$

### 8.1.3. El momento angular y su dinámica

En §2.2 también se definió el momento angular total del sistema y se vió que obedece a la ecuación

$$\frac{d\ell_{\mathcal{O}}}{dt} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \quad (8.1.11)$$

El torque total sobre un sistema depende tan solo de las fuerzas externas al sistema. El momento angular del sistema con respecto a su propio centro de masa es

$$\vec{\ell}_G = \sum_{a=1}^N m_a \vec{\rho}_a \times \vec{v}_a \quad (8.1.12)$$

Sin embargo, si en la última expresión se hace el reemplazo (8.1.9)  $\vec{v}_a = \vec{V}_G + \dot{\vec{\rho}}_a$  la forma de  $\vec{\ell}_G$  se puede simplificar porque  $\vec{V}_G$  queda fuera de la sumatoria (no depende de  $a$ ) y (8.1.9) asegura que ese término no contribuye a  $\vec{\ell}_G$ , concluyéndose que

$$\vec{\ell}_G = \sum_{a=1}^N m_a \vec{\rho}_a \times \dot{\vec{\rho}}_a \quad (8.1.13)$$

El momento angular  $\vec{\ell}_{\mathcal{O}}$  también se puede escribir

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_{\mathcal{O}} &= \sum_{a=1}^N m_a \left( \vec{R}_G + \vec{\rho}_a \right) \times \left( \vec{V}_G + \dot{\vec{\rho}}_a \right) \\ &= M \vec{R}_G \times \vec{V}_G + \sum_{a=1}^N m_a \vec{\rho}_a \times \dot{\vec{\rho}}_a \end{aligned} \quad (8.1.14)$$

Para obtener la última expresión se hizo uso de (8.1.8) y de (8.1.9). El primer término del lado derecho es el momento angular del sistema como un todo con respecto al punto  $\mathcal{O}$ , y será denotado  $\vec{\ell}_{\mathcal{O}}^G$

$$\vec{\ell}_{\mathcal{O}}^G = M \vec{R}_G \times \vec{V}_G \quad (8.1.15)$$

mientras que el último término es  $\vec{\ell}_G$ . De aquí que

$$\vec{\ell}_O = \vec{\ell}_O^G + \vec{\ell}_G \quad (8.1.16)$$

La ecuación de movimiento para cada cuerpo  $b$  de masa  $m_b$  del sistema es

$$m_b \ddot{\vec{\rho}}_b = \vec{F}_b - m_b \ddot{\vec{R}}_G$$

Derivando (8.1.13) con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\vec{\ell}}_G = \sum \vec{\rho}_b \times (\vec{F}_b - m_b \ddot{\vec{R}}_G)$$

La última suma contiene  $\sum m_b \ddot{\vec{\rho}}_b = 0$  por lo que el resultado es

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\ell}_G}{dt} &= \sum_b \vec{\rho}_b \times \vec{F}_b \\ &\equiv \tau_G \end{aligned} \quad (8.1.17)$$

Se puede anotar también que

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_O &= \sum_a \vec{r}_a \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \\ &= \sum_a (\vec{R}_G + \vec{\rho}_a) \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \\ &= \vec{R}_G \times \sum_a \vec{f}_a^{\text{ext}} + \sum_a \vec{\rho}_a \times \vec{f}_a^{\text{ext}} \\ &= \vec{\tau}_O^G + \vec{\tau}_G \end{aligned} \quad (8.1.18)$$

La última línea define la notación.

El torque del peso respecto a  $G$ : Este se calcula como

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_G &= \sum_a m_a \vec{\rho}_a \times \vec{g} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.1.19)$$

La suma anterior se anula debido a (8.1.8). Ya que  $\vec{\tau}_G = 0$  entonces  $\vec{\ell}_G$  es constante si el peso es la única fuerza externa.

Un caso particular es el del deportista que se lanza desde un alto tablón a una piscina para, después de algunas volteretas, clavarse en el agua en forma perfecta. Un vez que está en vuelo su momento angular no puede cambiar. Tan solo alargando o acortando su cuerpo y moviendo sus brazos puede controlar su velocidad angular, pero llega al agua con el mismo  $\vec{\ell}_G$  que se dió en el momento de despegar del tablón. Los gatos hacen algo parecido para caer siempre de pié.

Hasta aquí se ha trabajado sólo con un sistema inercial  $S$ .

## 8.2. Sistemas rígidos con punto fijo

### 8.2.1. Momento angular y matriz de inercia

Se puede ver que la dinámica de todo sistema rígido puede separarse en dinámica de traslación y en dinámica de rotación en torno a un punto fijo  $P$ . Puesto que ya se conoce la dinámica de traslación nos concentraremos acá en el caso de sistemas rígidos con un punto fijo  $P$  (que no necesariamente es un punto del sistema).

En estos casos, por definición de  $P$ , la distancia de cada masa  $m_a$  a  $P$  permanece fija, lo que permite escribir la velocidad de cada masa  $m_a$ , gracias a (1.3.6), en la forma

$$\vec{v}_a = \vec{\Omega} \times \vec{r}_a \quad (8.2.1)$$

teniendo presente que en general  $\vec{\Omega}$  cambia en el tiempo. De aquí que

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_P &= \sum_a m_a \vec{r}_a \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_a) \\ &= \sum_a m_a \left( r_a^2 \vec{\Omega} - \vec{r}_a \cdot \vec{\Omega} \vec{r}_a \right) \\ (\vec{\ell}_P)_i &= \sum_a m_a \left[ r_a^2 \Omega_i - \sum_j x_{aj} \Omega_j x_{ai} \right] \\ &= \sum_a m_a \sum_j \left[ r_a^2 \delta_{ij} - x_{ai} x_{aj} \right] \Omega_j \end{aligned}$$

$$= \sum_j I_{ij}^P \Omega_j \quad (8.2.2)$$

lo que se resume como

$$\vec{\ell}_P = \mathbf{I}^P \vec{\Omega} \quad (8.2.3)$$

donde la *matriz de inercia* es

$$I_{ij}^P = \sum_a m_a (r_a^2 \delta_{ij} - x_{ai} x_{aj})$$

Salvo por los factores de masa, esta matriz es un objeto geométrico.

La definición de matriz de inercia contiene  $N$  sumandos, uno por cada partícula del sistema, es decir, la matriz de inercia es la suma de las matrices asociada a cada una de las partículas:

$$\mathbf{I}^P = \sum_a \mathbf{I}_a^P$$

Se puede arbitrariamente separar al sistema en dos partes  $A$  y  $B$  y se cumple que

**Notación:** el producto escalar entre dos vectores tridimensionales puede ser escrito como la suma de los productos de sus componentes cartesianas,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned}$$

donde las componentes son designadas con una letra (como  $a_y$ ) o con un número (como  $a_2$ ). Esta última notación resulta más cómoda, porque ahora se puede escribir

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

También el producto de una matriz por un vector,  $A\vec{a}$  se puede escribir por componentes,

$$(A\vec{a})_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} a_j$$

Y por último  $\delta_{ij}$  se usa para designar a los elementos de la matriz identidad, es decir,  $\delta_{ij}$  vale cero si  $i \neq j$  y vale la unidad si  $i = j$ .

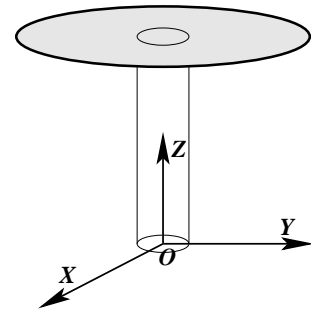
$$\mathbf{I}^P = \mathbf{I}_A^P + \mathbf{I}_B^P$$

Un ejemplo de los anterior se ilustra en la figura adjunta: un cuerpo compuesto por una barra (altura  $h$  y radio  $\rho$ ) sobre el cual hay un disco de radio  $R$ . La matriz de inercia de este cuerpo compuesto puede ser expresado como

$$\mathbf{I}^O = \mathbf{I}_{\text{barra}}^O + \mathbf{I}_{\text{disco}}^O$$

Las componentes en la diagonal de la matriz  $\mathbf{I}^P$  se llaman los *momentos de inercia*. Por ejemplo

$$I_{11}^P = \sum_a m_a (r_a^2 - x_a^2) = \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2)$$



y los tres son:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2) \\ I_{22} &= \sum_a m_a (z_a^2 + x_a^2) \\ I_{33} &= \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2) \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

En el caso de  $I_{ii}$  el paréntesis en la sumatoria contiene a la distancia entre la partícula  $a$  y el eje en dirección  $X_i$  que pasa por  $P$ .

$$I = \sum_a m_a \begin{pmatrix} y_a^2 + z_a^2 & -x_a y_a & -x_a z_a \\ -x_a y_a & z_a^2 + x_a^2 & -y_a z_a \\ -x_a z_a & -y_a z_a & x_a^2 + y_a^2 \end{pmatrix} \quad (8.2.5)$$

### 8.2.2. Ejemplo: péndulo cónico doble

#### Matriz de inercia y momento angular

Consideremos un péndulo cónico doble como el de la figura. Está caracterizado por un ángulo  $\theta$  fijo y por brazos para las masas  $m_1$  y  $m_2$  colineales de largos  $b$  y  $c$  respectivamente. La velocidad angular constante del péndulo cónico es

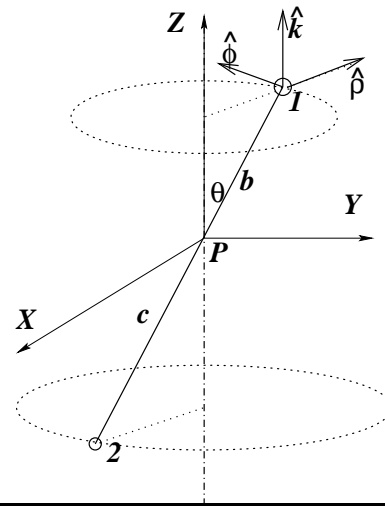
$$\vec{\Omega} = \omega \hat{k}$$

De la figura se desprende que

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \hat{k}b \cos \theta + \hat{\rho}b \sin \theta & \vec{v}_1 &= \hat{\phi} \omega b \sin \theta \\ \vec{r}_2 &= -\hat{k}c \cos \theta - \hat{\rho}c \sin \theta & \vec{v}_2 &= -\hat{\phi} \omega c \sin \theta \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

De acuerdo a  $\vec{\ell} = I\vec{\Omega}$ , en el caso actual, puesto que tan solo  $\Omega_3 = \omega$  es no nulo, lo único que interesa para calcular  $\vec{\ell}$  son las componentes  $I_{j3}$  de la matriz de inercia porque se obtiene que

$$\vec{\ell}_P = (\hat{i}I_{13} + \hat{j}I_{23} + \hat{k}I_{33}) \omega \quad (8.2.7)$$



Las distancias de las partículas al eje  $Z$  (o eje 3) son  $b \sin \theta$  y  $c \sin \theta$  de modo que inmediatamente se sabe que

$$I_{33} = (m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin^2 \theta$$

También puede desprenderse de la figura que

$$\begin{aligned} I_{13} &= -(m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta \cos \theta \cos \omega t \\ I_{23} &= -(m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta \cos \theta \sin \omega t \end{aligned}$$

donde  $\phi = \omega t$  se define desde el eje  $X$ . Se ve que la mezcla  $\hat{i}I_{13} + \hat{j}I_{23}$  tiene la forma

$$\begin{aligned} \hat{i}I_{13} + \hat{j}I_{23} &= -(m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta \cos \theta (\hat{i} \cos \omega t + \hat{j} \sin \omega t) \\ &= -(m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta \cos \theta \hat{\rho} \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene que el momento angular es

$$\vec{\ell}_P = \omega (m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta (\hat{k} \sin \theta - \hat{\rho} \cos \theta) \quad (8.2.8)$$

expresión que naturalmente coincide con la que se obtiene de calcular  $m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$ .

### Torque y velocidad angular

Aun no se ha dicho el valor de  $\omega$ , pero si se desea que la única fuerza externa que ejerza torque desde  $P$  sea el peso, entonces  $\omega$  debe tener un valor muy preciso. Para determinar  $\omega$  se exige que  $\dot{\vec{\ell}}_P = \vec{\tau}_P$  y se deduce que el torque del peso es

$$\vec{\tau}_P = (m_1 b - m_2 c) \sin \theta g \hat{\phi}$$

mientras que la derivada del momento angular es

$$\dot{\vec{\ell}}_P = -\omega^2 (m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta \cos \theta \hat{\phi}$$

Puesto que estas dos expresiones deben ser iguales se obtiene que

$$\omega^2 = \frac{(m_2 c - m_1 b)g}{(m_1 b^2 + m_2 c^2) \cos \theta}$$



Pareciera que el numerador pudiera ser negativo, pero se puede ver que tal situación es inestable. En efecto, para que este sistema sea estable el centro de masa  $G$ , que está en la recta que une a las dos masas, tiene que estar debajo de  $P$ .

### 8.2.3. Propiedades de la matriz de inercia

#### Expresión para la energía cinética

Aproverchando que  $\vec{v}_a = \vec{\Omega} \times \vec{r}_a$  se puede deducir:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \vec{v}_a \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}_a) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \vec{\Omega} \cdot (\vec{r}_a \times \vec{v}_a) \\
 &= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\ell}_P \\
 &= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \mathbf{I}_P \vec{\Omega}
 \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

Puesto que esta propiedad es válida para cualquier velocidad angular  $\vec{\Omega}$  que se le dé al sistema, y puesto que  $K \geq 0$  entonces la matriz  $\mathbf{I}_P$  es positiva semidefinida.

Si se define  $\hat{n}$  como el vector unitario que en cada instante apunta en la dirección de  $\vec{\Omega}$ , es decir,

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{n}$$

entonces

$$K = \frac{1}{2} \Omega^2 \hat{n} \cdot \mathbf{I}_P \hat{n} = \frac{1}{2} I_{P,n} \Omega^2 \tag{8.2.10}$$

Aquí  $I_{P,n}$  es el escalar *momento de inercia* relativo al eje que pasa por  $P$  y tiene dirección  $\hat{n}$ ,  $(P, \hat{n})$  y su forma explícita es

$$I_{P,n} = \sum_a m_a (r_a^2 - (\vec{r}_a \cdot \hat{n})^2) \tag{8.2.11}$$

donde  $r_a^2 - (\vec{r}_a \cdot \hat{n})^2$  es el cuadrado de la distancia de la partícula  $a$  al eje.

## Relación con el momento de inercia respecto a $G$

Es útil notar que

$$\begin{aligned}
 (\vec{r} \times \hat{n}) \cdot (\vec{r} \times \hat{n}) &= \vec{r} \cdot (\hat{n} \times (\vec{r} \times \hat{n})) \\
 &= \vec{r} \cdot (\vec{r} - \hat{n} \cdot \vec{r} \hat{n}) \\
 &= r^2 - (\vec{r} \cdot \hat{n})^2
 \end{aligned} \tag{8.2.12}$$

lo que permite ver que otra forma de escribir la matriz de inercia es

$$I_{P,n} = \sum_a m_a (\vec{r}_a \times \hat{n}) \cdot (\vec{r}_a \times \hat{n}) \tag{8.2.13}$$

Si  $G$  es el centro de masa, el que suponemos que no está en el eje  $(P, \hat{n})$ , se puede relacionar los momentos de inercia  $I_{P,n}$  e  $I_{G,n}$  donde el segundo se define relativo a un eje  $(G, \hat{n})$  con la misma dirección  $\hat{n}$ . Si se denota por  $\vec{r}_a$  la posición de  $m_a$  desde  $P$  y  $\vec{\rho}_a$  la posición desde  $G$ , y se designa  $\vec{R}$  al vector de  $P$  a  $G$  entonces

$$\vec{r}_a = \vec{R} + \vec{\rho}_a$$

La relación se obtiene de

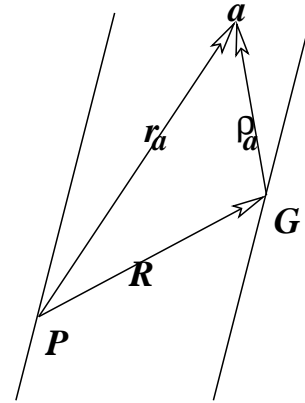
$$\begin{aligned}
 I_{P,n} &= \sum_a m_a (\vec{r}_a \times \hat{n})^2 \\
 &= \sum_a m_a (\vec{\rho}_a \times \hat{n})^2 + \sum_a m_a (\vec{R} \times \hat{n})^2 + 2 \sum_a m_a (\vec{R} \times \hat{n}) \cdot (\vec{\rho}_a \times \hat{n})
 \end{aligned}$$

La última de las sumatorias se anula debido a (8.1.8) lo que finalmente conduce a

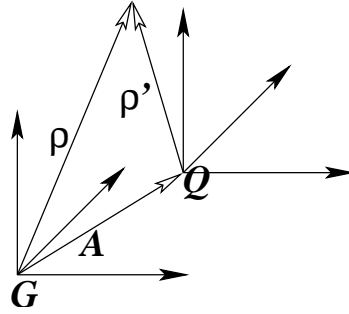
$$I_{P,n} = I_{G,n} + M (\vec{R} \times \hat{n})^2 \tag{8.2.14}$$

Si  $G$  estuviese sobre el eje  $(P, \hat{n})$ , entonces  $\vec{R} \times \hat{n} = 0$  y ambos momentos resultarían iguales.

## Teorema de Steiner



Consideremos la matriz de inercia  $\mathbf{I}_Q$  con respecto a ciertos ejes con origen en un punto  $Q$  y veamos su relación con la matriz de inercia con respecto al centro de masa  $G$  y ejes paralelos a los anteriores. Sea  $\vec{A}$  el vector desde  $G$  a  $Q$ , y los vectores posición se llaman  $\vec{\rho}_a$  desde  $G$  y  $\vec{\rho}_a'$  desde  $Q$ ,



$$\vec{\rho}_a' = \vec{\rho}_a - \vec{A}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_a m_a \rho_a'^2 &= \sum_a m_a (\rho_a^2 + A^2 - 2\vec{\rho}_a \cdot \vec{A}) \\ &= \sum_a m_a (\rho_a^2 + A^2) \end{aligned}$$

mientras que

$$\sum_a m_a \rho_{ai}' \rho_{aj}' = \sum_a m_a (\rho_{ai} \rho_{aj} - A_i \rho_{aj} - \rho_{ai} A_j + A_i A_j) = \sum_a m_a \rho_{ai} \rho_{aj} + M A_i A_j$$

lo que determina que

$$I_{ij}^Q = I_{ij}^G + M (A^2 \delta_{ij} - A_i A_j) \quad \text{teorema de Steiner} \quad (8.2.15)$$

**EJERCICIO:** Escriba la relación anterior para dos puntos  $Q_1$  y  $Q_2$  (ejes paralelos) y reste ambas relaciones. Vea que obtiene una relación entre  $\mathbf{I}^{Q_1}$  e  $\mathbf{I}^{Q_2}$ .

### 8.3. Matrices de inercia constantes

En el ejemplo visto en §8.2.2 se obtuvo elementos de matriz de inercia  $I_{ij}$  dependientes del tiempo. Esto ocurre en los casos en que la matriz de inercia se define con respecto a ejes respecto a los cuales el sistema rígido se mueve. Si, en ese mismo ejemplo, se define un eje  $Z'$  a lo largo

de la vara que tiene a las masas  $m_1$  y  $m_2$  en sus extremos, se obtiene que respecto a este sistema de referencia  $S'$  propio que

$$\mathbf{I}'_P = \begin{pmatrix} m_1 b^2 + m_2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 b^2 + m_2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es constante. En este ejemplo  $\vec{\Omega}$  es constante en el sistema  $S$ , pero  $\vec{\Omega}$  no es constante con respecto a los ejes de  $S'$ .

### 8.3.1. Ejes apropiados para la matriz de inercia

Normalmente es conveniente calcular la matriz de inercia en ejes en los que  $\mathbf{I}_P$  resulta constante. Puede existir más de una elección de ejes “acompañantes” en los cuales esto se logra.

La matriz de inercia es real y simétrica y además, como se comentó bajo (8.2.9), es positiva semidefinida, lo que implica que es diagonalizable y en la diagonal quedan cantidades no negativas. La orientación de los ejes en que se logra esta forma para  $\mathbf{I}_P$  se llaman los *ejes principales*.

Si un cuerpo es simétrico existen planos distintos (perpendiculares entre sí) respecto a los cuales, al reflejar el sistema, este queda igual. El caso extremo es una esfera que queda igual al ser reflejada con respecto a cualquier plano que pase por su centro. Un cubo es un caso donde no cualquier plano sirve. Un cilindro es simétrico con respecto al plano perpendicular a su eje y que pasa por su punto medio, y también lo es con respecto a cualquier plano que contenga al eje del cilindro.

### 8.3.2. Otra versión del ejemplo 8.2.2

El mismo ejemplo visto en §8.2.2 ahora será resuelto usando, en lugar de  $(X, Y, Z)$  o los vectores  $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ , los ejes  $(X', Y', Z')$  donde  $Z'$  está en la dirección de la barra y  $X'$  está en el plano que forma la barra con el eje  $Z$  de la velocidad angular (equivalentemente, es el plano  $(\hat{k}, \hat{\rho})$ ),

$$\vec{\Omega} = \omega \hat{k} = \omega (\hat{k}' \cos \theta - \hat{i}' \sin \theta)$$

$$= \begin{pmatrix} -\omega \sin \theta \\ 0 \\ \omega \cos \theta \end{pmatrix} \quad (8.3.16)$$

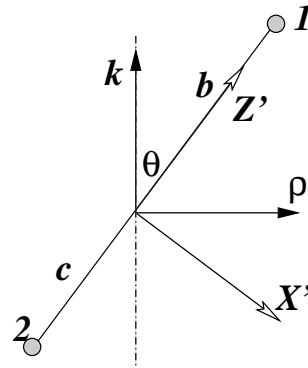
Ellos son ejes en los cuales la matriz de inercia es diagonal y

$$I_{11} = I_{22} = m_1 b^2 + m_2 c^2, \quad I_{33} = 0$$

De donde

$$\begin{aligned} \vec{\ell} &= \mathbf{I} \vec{\Omega} \\ &= -\omega (m_1 b^2 + m_2 c^2) \sin \theta \hat{i}' \\ &= \omega (m_1 b^2 + m_2 c^2) (\hat{k} \sin \theta - \hat{\rho} \cos \theta) \end{aligned}$$

En el último paso se usó que  $\hat{i}' = \hat{\rho} \cos \theta - \hat{k} \sin \theta$ .  
El resultado final coincide con (8.2.8).



## 8.4. El caso continuo

### 8.4.1. Ejemplo: Péndulo de barra continua

Para estudiar el péndulo que consiste en una barra (largo  $R$ ) continua (una línea) de densidad  $\lambda$  de masa por unidad de largo se considera un elemento de largo  $d\rho$  que tiene asociada una posición  $\rho\hat{\rho}$ , masa  $\lambda d\rho$  y velocidad  $\rho\dot{\phi}$ . Este elemento de barra contribuye al momento angular con

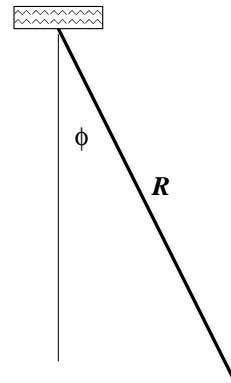
$$d\vec{\ell}_\phi = \rho\hat{\rho} \times (\lambda\rho\dot{\phi}\hat{\phi}) d\rho = \hat{k}\lambda\dot{\phi}\rho^2 d\rho$$

El momento angular total se obtiene integrando  $\rho$  de cero hasta  $R$ . Entonces el momento angular es

$$\vec{\ell}_\phi = \hat{k}\lambda\dot{\phi} \int_0^R \rho^2 d\rho = \hat{k}\lambda\dot{\phi} \frac{R^3}{3} \quad (8.4.17)$$

En forma semejante el torque es

$$\vec{\tau}_\phi = -\hat{k}g \sin \phi \lambda \int_0^R \rho d\rho = -\hat{k}\lambda g \sin \phi \frac{R^2}{2} \quad (8.4.18)$$



♠ *Obtenga la ecuación de péndulos continuos para los cuales la densidad lineal no es uniforme, sino que depende de  $s$ ,  $\lambda(s)$ . Hágalo para el caso general y también aplique sus resultados para algunas funciones  $\lambda(s)$  sencillas.*

### 8.4.2. Densidades de masa y el centro de masa

Un cuerpo rígido continuo ya no es descrito por un conjunto discreto de masas sino por medio de una función *densidad de masa*. Si el cuerpo puede ser asimilado a una línea (el caso de una delgada barra ideal), la densidad de masa es una densidad por unidad de largo y se designa  $\lambda(\vec{r})$ . Si el cuerpo es una lámina entonces es descrito por una densidad de masa por unidad de superficie, la que se denota  $\sigma(\vec{r})$  y si se trata de un volumen se usa la densidad volumétrica  $\rho(\vec{r})$ . Por definición la integral de la densidad sobre todo el cuerpo da la masa total  $M$  del cuerpo.

La masa total del cuerpo continuo se obtiene integrando su densidad. Según la dimensión y lo dicho en el párrafo anterior la masa se calcula

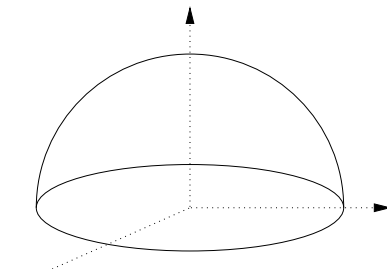
$$\begin{aligned} M &= \int \lambda(\vec{r}) ds \\ M &= \int \sigma(\vec{r}) d\mathcal{S} \\ M &= \int \rho(\vec{r}) dV \end{aligned} \quad (8.4.19)$$

donde  $ds$  es un elemento de línea,  $d\mathcal{S}$  es un elemento de área (como  $dx dy$  ó  $\rho d\rho d\phi$ ) y  $dV$  es un elemento de volumen (como  $dx dy dz$  ó  $\rho d\rho d\phi dz$  ó  $r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$ ).

El centro de masa en estos casos continuos es una integral de  $\frac{1}{M}\vec{r}$  multiplicado por la densidad que corresponda y se integra sobre todo el cuerpo. Por ejemplo,

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \int_{\text{volumen}} \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3 r \quad (8.4.20)$$

Esto se puede ilustrar calculando la posición del centro de masa de la semiesfera



Semiesfera  $z > 0$  centrada en el

origen

$z > 0$  cuyo centro está en el origen y radio  $R$ . Por simetría se infiere que  $\vec{R}_G$  tiene tan solo componente a lo largo del eje  $Z$ ,  $\vec{R}_G = (0, 0, z_G)$  y  $z_G$  se calcula integrando  $z$  por la densidad que supondremos uniforme.

Una forma cómoda de integrar hace uso de coordenadas esféricas. El elemento de volumen es  $d^3r = d\cos\theta d\phi r^2 dr$  mientras que  $z = r \cos\theta$ . Entonces

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{V} \int_0^1 \cos\theta d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{3R}{8} \end{aligned} \quad (8.4.21)$$

♠ *Demuestre que el centro de masa de un alambre semicircular apoyado en el plano  $XY$  de radio  $R$ ,  $y > 0$ , centrado en el origen y con densidad  $\lambda$  uniforme está en*

$$x_G = 0, \quad y_G = \frac{2R}{\pi}. \quad (8.4.22)$$

### 8.4.3. Matriz de inercia

En tales casos los momentos de inercia se definen como

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \int \lambda(\vec{r}) \left( r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) ds && \text{caso lineal} \\ I_{ij} &= \int \sigma(\vec{r}) \left( r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) d\mathcal{S} && \text{caso laminar} \\ I_{ij} &= \int \rho(\vec{r}) \left( r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) dV && \text{caso volumétrico} \end{aligned} \quad (8.4.23)$$

#### Ejemplo

Cálculo de los momentos de inercia de un cilindro de densidad uniforme  $\rho_0$ , cuyo eje coincide con el eje  $Z$ , de radio  $R$ , altura  $h$  y cuya cara inferior está a altura  $z_0$ . Su volumen es  $V = \pi R^2 h$ . Su masa es  $M = \rho_0 \pi R^2 h$ . El elemento de volumen es

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (8.4.24)$$

En este caso  $r^2$  es  $z^2 + \rho^2$  y

$$\begin{aligned} I_{33} &= \rho_0 \int [(z^2 + \rho^2) \delta_{33} - z^2] \rho d\rho d\phi dz \\ &= \rho_0 2\pi h \int_0^R \rho^3 d\rho \\ &= \frac{M}{2} R^2 \end{aligned} \quad (8.4.25)$$

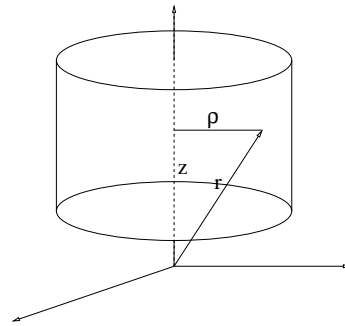
$$\begin{aligned} I_{11} &= \rho_0 \int [(z^2 + \rho^2) \delta_{11} - \rho^2 \cos^2 \phi] \rho d\rho d\phi dz \\ &= \frac{M}{12} (4(3z_0^2 + 3z_0 h + h^2) + 3R^2) \end{aligned} \quad (8.4.26)$$

El mismo resultado se obtiene al calcular  $I_{22}$ . También puede verse que los elementos  $I_{i \neq j}$  son nulos.

De este ejemplo se puede tomar casos particulares:

Primero, una vara se obtiene en el límite  $R \rightarrow 0$  manteniendo  $M$  fijo, lo que requiere que la densidad volumétrica tienda a infinito, la matriz de inercia es

$$\mathbf{I}_{\text{vara}} = \frac{M}{3} \begin{pmatrix} 3z_0^2 + 3z_0 h + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3z_0^2 + 3z_0 h + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.4.27)$$



La magnitud de un vector posición, según el teorema de Pitágoras, es  $\sqrt{z^2 + \rho^2}$ .

Primer caso especial, vara con extremo en  $\mathcal{O}$ , es decir,  $z_0 = 0$ ,

$$\mathbf{I}_{\text{vara}} = \frac{M h^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.4.28)$$

Segundo caso especial, vara centrada en  $\mathcal{O}$ , es decir,  $z_0 = -\frac{h}{2}$ ,

$$\mathbf{I}_{\text{vara}} = \frac{M h^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.4.29)$$



El caso de un disco se obtiene del caso del cilindro tomando el límite  $h \rightarrow 0$  y masa fija  $M$ ,

$$\mathbf{I}_{\text{disco}} = \frac{M}{4} \begin{pmatrix} 4z_0^2 + R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4z_0^2 + R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix} \quad (8.4.30)$$

Caso especial, disco centrado en  $\mathcal{O}$ , es decir,  $z_0 = 0$ ,

$$\mathbf{I}_{\text{disco}} = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (8.4.31)$$

♠ Calcule la matriz de inercia de una superficie cilíndrica de radio  $R$ , altura  $h$  centrada en el eje  $Z$ , con su parte inferior con coordenada  $z_0$ .

♠ Determine la matriz de inercia de un cuerpo cónico con  $Z$  como su eje de simetría, altura  $h$ , radio basal  $R$  y densidad uniforme  $\rho_0$ .

### Ejemplito 1:

Consideremos el caso de la figura adjunta. De un disco de radio  $R$  que solo puede girar en torno a un eje horizontal que pasa por su centro—momento de inercia  $I$ —cuelga un cuerpo de masa  $m$  de un hilo que se puede desenrollar del disco haciéndolo girar con velocidad angular  $\omega(t)$ .

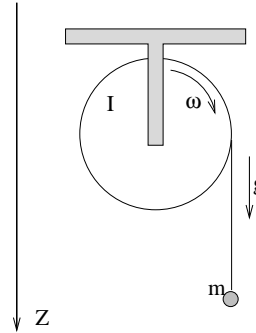
La ecuación de movimiento del cuerpo de masa  $m$  es

$$m\ddot{z} = mg - T$$

donde  $T$  es la tensión del hilo que actúa sobre el cuerpo apuntando hacia arriba (negativa). La ecuación para el disco de la polea es  $\dot{\ell} = \tau$ , es decir,

$$I\dot{\omega} = RT$$

En esta ecuación el torque se debe a la tensión que apunta hacia abajo (positiva) con brazo  $R$ . El desplazamiento del cuerpo y la rotación de la



polea están ligados por  $\dot{z} = R\omega$ . Al eliminar  $T$  entre ambas ecuaciones se obtiene que

$$\ddot{z} = \frac{mg}{m + I/R^2}$$

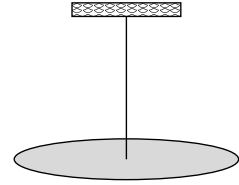
que significa que el cuerpo desciende con aceleración constante. ◀

♠ *Calcule, en función del tiempo, la fuerza que el eje ejerce sobre el disco suponiendo que la masa  $m$  parte desde el reposo. Demuestre además que la tensión del hilo es constante e igual a  $Mmg/(M + 3m)$ .*

♠ *En una variante del ejemplo anterior se puede reemplazar al hilo ideal con una masa en el extremo, por una cuerda de densidad  $\lambda_0$  que se desenrolla debido a su propio peso.*

### Ejemplito 2:

La figura representa un péndulo de torsión. Este consiste en un disco horizontal de radio  $R$  y densidad uniforme  $\sigma_0 = M/(\pi R^2)$  que pende de un alambre vertical. El alambre ejerce un torque proporcional al ángulo  $\phi$  de torsión, para recuperar su posición inicial, cuando es torcido,  $\vec{\tau} = -K\phi\hat{k}$ , donde  $K$  es una característica del alambre. El momento de inercia del disco en torno al eje  $Z$  es, según (8.4.31),  $I = \frac{M}{2}R^2$  y por tanto su momento angular es  $\vec{\ell} = \frac{M}{2}R^2\dot{\phi}\hat{k}$ . La ecuación dinámica entonces es



$$\frac{M}{2}R^2\ddot{\phi} = -K\phi \quad (8.4.32)$$

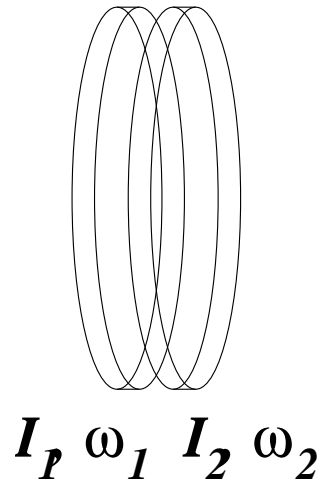
Esta es una ecuación tipo oscilador armónico y su solución, si se impone condiciones iniciales:  $\phi(0) = \phi_0$  y  $\dot{\phi}(0) = 0$ , es

$$\phi(t) = \phi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2K}{MR^2}}t\right) \quad (8.4.33)$$

### 8.4.4. Ejemplo: discos que se acoplan

Dos discos tienen momentos de inercia  $I_1$  e  $I_2$  con respecto al eje común respecto al cual giran con velocidades angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  respectivamente. Se desea determinar la velocidad angular  $\vec{\omega}$  resultante si los discos son acercados hasta que se acoplan para formar un solo disco que sigue girando en torno al mismo eje. Para ello se hace uso que el momento angular se conserva y que el momento de inercia del nuevo sistema es la simple suma de los momentos de inercia de las partes,

$$\vec{L} = I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 = (I_1 + I_2) \vec{\omega}$$



Puesto que todos los vectores son paralelos al eje común se puede trabajar con las magnitudes, lo que implica que

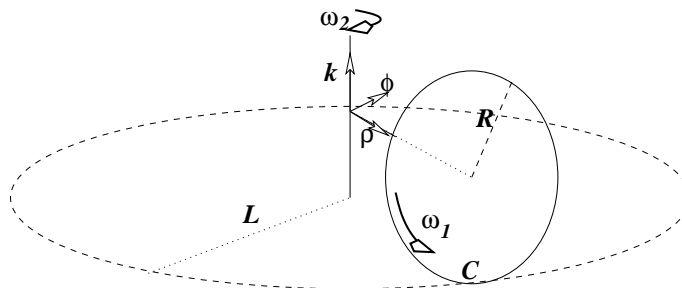
$$\omega = \frac{I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2}{I_1 + I_2}$$

El proceso de acoplamiento implica una pérdida de energía cinética,

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2) - \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} (\omega_1 - \omega_2)^2 \end{aligned}$$

#### 8.4.5. Disco que rota en círculos sobre un plano

Se tiene un eje vertical que nace de un plano horizontal, de él nace, a altura  $R$  sobre el plano, un brazo horizontal de largo  $L$  y en cuyo extremo hay un disco de radio  $R$ . El disco tiene densidad uniforme, masa total  $M$  y gira en torno a su eje con una velocidad angular dada  $\vec{\omega}_1$ . Puesto que no



desliza sobre el plano, además gira en torno al eje vertical con velocidad angular  $\vec{\omega}_2$ , totalmente determinada por la anterior. Se desea determinar el momento angular del disco.

Se escoge coordenadas polares, con lo cual

$$\vec{\omega}_1 = \hat{\rho} \omega_1, \quad \vec{\omega}_2 = -\hat{k} \omega_2$$

lo que determina que la velocidad angular total del disco sea

$$\vec{\Omega} = \hat{\rho} \omega_1 - \hat{k} \omega_2$$

El punto material  $C$  del disco que en el instante actual está apoyado sobre el plano tiene velocidad nula en ese instante, pero, porque es parte de un sistema rígido con punto fijo, tiene que valer  $\vec{v}_C = \vec{\Omega} \times \vec{r}_C$ , esto es,

$$0 = \vec{\Omega} \times \vec{r}_C = (\hat{\rho} \omega_1 - \hat{k} \omega_2) \times (L\hat{\rho} - R\hat{k}) \implies \omega_2 = \frac{R}{L} \omega_1$$

Para calcular el momento angular se va a usar la matriz de inercia del disco que ya fue calculada y se la va a multiplicar por  $\vec{\Omega}$  y como matriz de inercia se va a usar directamente (8.4.30) con  $z_0 = L$ . Para poder hacer eso es necesario identificar las direcciones de los ejes  $(X, Y, Z)$  usados al calcular (8.4.30) con las direcciones  $(\hat{\phi}, \hat{k}, \hat{\rho})$  respectivamente. Entonces  $\vec{\ell} = \mathbf{I}_{\text{disco}} \vec{\Omega}$  se escribe

$$\begin{aligned} \vec{\ell} &= \frac{M}{4} \begin{pmatrix} 4L^2 + R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4L^2 + R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{R}{L} \omega_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{M}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -(4L^2 + R^2) \frac{R}{L} \omega_1 \\ 2R^2 \omega_1 \end{pmatrix} \\ &= \left( \hat{\rho} 2R - \hat{k} \frac{4L^2 + R^2}{L} \right) \frac{MR \omega_1}{4} \end{aligned} \quad (8.4.34)$$

#### 8.4.6. Trompo en movimiento cónico

Se considera un trompo que consiste en un brazo de largo  $L$  que nace de un punto  $\mathcal{O}$  en cuyo extremo hay un disco de densidad uniforme, radio  $R$  y masa  $M$ .

El brazo mantendrá un ángulo  $\theta = \text{constante}$  con la vertical tal como indica la figura. En cada instante el disco está girando con velocidad angular  $\vec{\omega}_1$  respecto a un sistema fijo al brazo, pero el brazo mismo está girando con una velocidad angular  $\vec{\omega}_2 = \hat{k}\omega_2$ . Este movimiento es posible tan solo si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  satisfacen una condición que se deduce en lo que sigue. En general el ángulo  $\theta$  no es constante y el movimiento del trompo es bastante complicado.

Se puede ver que el torque, debido al peso, es

$$\vec{\tau} = MgL\hat{r} \times (\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta) = -MgL\sin\theta\hat{\phi} \quad (8.4.35)$$

La velocidad angular total del sistema es

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= -\omega_1\hat{r} + (\hat{\theta}\sin\theta - \hat{r}\cos\theta)\omega_2 \\ &= -\hat{r}(\omega_1 + \omega_2\cos\theta) + \hat{\theta}\omega_2\sin\theta \end{aligned}$$

El momento angular es  $I_{\text{disco}}\vec{\Omega}$  y, para poder hacer uso directo de (8.4.30) se hace la identificación  $(X, Y, Z)$  con las direcciones  $(\hat{\theta}, \hat{\phi}, \hat{r})$ ,

$$\begin{aligned} \vec{\ell} &= I_{11}\Omega_{\theta} + I_{33}\Omega_r \\ &= \frac{M}{4} [(4L^2 + R^2)\omega_2\sin\theta\hat{\theta} - 2R^2(\omega_1 + \omega_2\cos\theta)\hat{r}] \end{aligned} \quad (8.4.36)$$

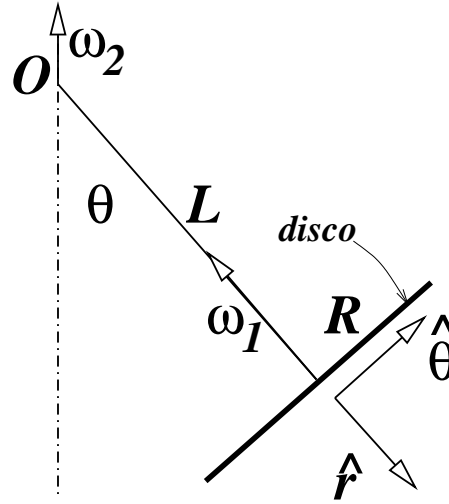
Para obtener la relación entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se impone que  $\dot{\vec{\ell}} = \vec{\tau}$ . Para tomar la derivada de  $\vec{\ell}$  se hace uso que  $\dot{\phi} = \omega_2 = \text{constante}$ ,  $\omega_1$  y  $\theta$  también son constantes. En tal caso

$$\dot{\hat{r}} = \hat{\phi}\omega_2\sin\theta, \quad \dot{\hat{\theta}} = \hat{\phi}\omega_2\cos\theta$$

lo que asegura que  $\dot{\vec{\ell}} \propto \hat{\phi}$  y se obtiene

$$\frac{M}{4} [(4L^2 + R^2)\omega_2^2\sin\theta\cos\theta - 2R^2(\omega_1 + \omega_2\cos\theta)\omega_2\sin\theta] = -MgL\sin\theta$$

que es la relación que deben satisfacer  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para que el trompo tenga un movimiento cónico.

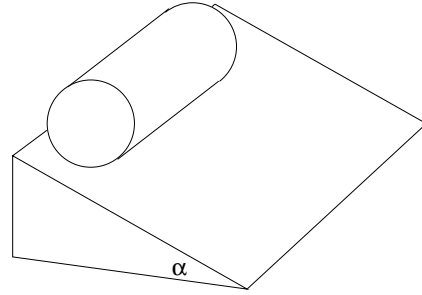


## 8.5. Sistemas rígidos sin punto fijo

### 8.5.1. Ejemplo sencillo

Las leyes necesarias para resolver casos con traslación ya han sido enunciadas: movimiento del centro de masa y la dinámica de  $\ell_O$  y de  $\ell_G$

Un ejemplo muy elemental es el de un cilindro de radio  $R$ , masa total  $M$  y momento de inercia, con respecto a su centro de masa,  $I$  ( $I$  es el momento a lo largo del eje del cilindro, que con la notación de §8.4.3 es  $I_{33}$ ). Hay roce estático, de modo que el cilindro rueda sin deslizar por un plano de inclinación  $\alpha$ . Se tomará ejes cartesianos con los ejes  $XY$  apoyados en el plano inclinado y  $Z$  perpendicular a él. La dirección de descenso es  $X$ . La dirección  $Y$  no jugará papel alguno. Las fuerzas presentes son el peso  $Mg(\hat{i}\cos\alpha - \hat{k}\sin\alpha)$ , la normal,  $\vec{N} = N\hat{k}$  y el roce estático  $\vec{F} = -F\hat{i}$ . El desplazamiento debiera ser descrito por la coordenada  $X$  del centro de masa, pero como el cilindro no desliza, cuando ha girado un ángulo  $\phi$  ha avanzado una distancia  $R\phi$ , esto es  $X = R\phi$ .



El torque con respecto a  $G$  es aquel que ejerce la fuerza de roce y es  $\tau_G = RF$  mientras que  $\ell_G = I\dot{\phi}$ , de modo que

$$I\ddot{\phi} = \frac{I}{R}\ddot{X} = RF \quad (8.5.1)$$

La ecuación de movimiento en la dirección  $X$  del centro de masa es

$$M\ddot{X} = -F + mg\sin\alpha \quad (8.5.2)$$

mientras que no existe movimiento en la dirección  $Z$ , lo que implica

$$-F + mg\sin\alpha = 0 \quad (8.5.3)$$

De (8.5.1) se despeja  $F$  y se remplace en (8.5.2) obteniéndose que desciende con aceleración constante:

$$\ddot{X} = \frac{MR^2g\sin\alpha}{I + MR^2}$$

Si se trata de un cilindro de densidad uniforme  $I = \frac{1}{2}MR^2$  y se obtiene  $\ddot{X} = \frac{2}{3}g \sin \alpha$ . Este resultado debe compararse con la aceleración de un cuerpo puntual que desciende por el plano sin roce. Se obtiene  $\ddot{x} = g \sin \alpha$ .

### 8.5.2. Caso general y el centro de masa

Sea  $S$  un sistema de referencia inercial (el sistema fijo) y  $S'$  un sistema cuyo origen está en el centro de masa  $G$  del cuerpo rígido y que se mueve solidario con el cuerpo. Por cada punto  $b$  del cuerpo se tiene

$$\vec{r}_b = \vec{R}_G + \vec{\rho}_b$$

Puesto que por definición de  $S'$ ,  $\left(\frac{d\vec{\rho}_b}{dt}\right)_{S'} = 0$ , entonces, debido a (8.2.1),

$$\begin{aligned}\vec{v}_b &= \vec{V}_G + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}_b \\ &= \vec{V}_G + \vec{v}'_b\end{aligned}\quad (8.5.4)$$

Se demuestra fácilmente que la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}MV_G^2 + \vec{\Omega} \cdot \mathbf{I}^G \vec{\Omega} \quad (8.5.5)$$

El momento angular, debido a (8.1.16) y (8.2.3) es

$$\vec{\ell}_O = M\vec{R}_G \times \vec{V}_G + \mathbf{I}^G \vec{\Omega} \quad (8.5.6)$$

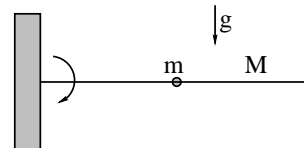
donde el último término es  $\vec{\ell}_G$ ,

$$\vec{\ell}_G = \mathbf{I}^G \vec{\Omega}$$

*Es fundamental, en el contexto actual, tener presente que los vectores  $\vec{\rho}$  están definidos en un sistema de referencia móvil  $S'$ .*

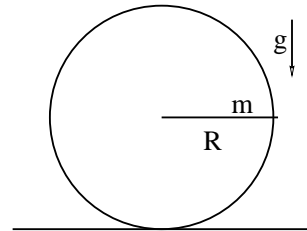
## 8.6. Problemas

8.1 Una barra de largo  $L$  y masa  $M$  y densidad lineal uniforme, puede girar libremente sobre un eje horizontal colocado en uno de sus extremos. En el punto medio de la barra se encuentra un anillo de masa  $m$  que tiene un coeficiente de roce estático  $\mu$  con la barra.



Si el sistema se libera desde el reposo con la barra en posición horizontal, se observa que el anillo comienza a deslizar cuando la barra forma un ángulo  $\pi/4$  con la horizontal. Determine (a) el momento de inercia del sistema antes que el anillo comience a deslizar, (b) la velocidad angular y aceleración angular de la barra en el instante en que el anillo va a comenzar a deslizar, (c) la fuerza que ejerce sobre la barra el punto de apoyo.

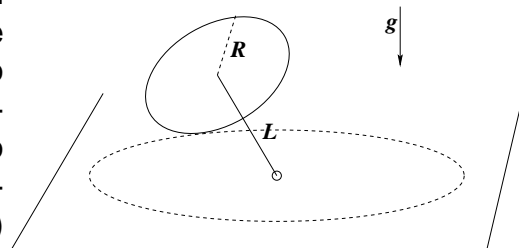
- 8.2 Sobre una plataforma horizontal está apoyado un aro de radio  $R$  y masa despreciable. El aro tiene soldada una barra de masa  $m$  y largo  $R$  en la forma que muestra la figura. El sistema se libera desde el reposo con la barra en posición horizontal.



(a) Determine la magnitud mínima que debe tener el coeficiente de roce estático entre el aro y la plataforma para que el aro ruede sin resbalar desde la posición inicial; (b) estudie el movimiento en el caso en que el roce con el suelo es *nulo*. Describa cualitativamente el movimiento del centro de masa del sistema y calcule la velocidad angular máxima que experimenta el sistema.

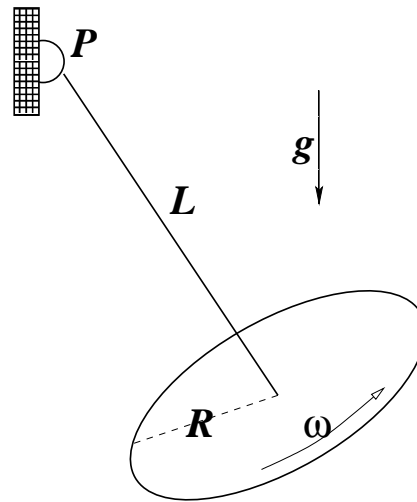
- 8.3 Una escalera de masa  $M$  y largo  $L$  está apoyada en el suelo y en una pared vertical formando un ángulo  $\alpha$  con la pared. El coeficiente de roce estático entre la escalera y las superficies de apoyo es  $\mu$ , lo que permite que la escalera esté estática. Si una persona (puntual) de masa  $m$  comienza a subir la escalera muy lentamente, calcule hasta qué posición puede llegar antes que la escalera comience a deslizar.

- 8.4 Sistema: un disco de densidad uniforme, radio  $R$  y masa  $M$  y un eje de masa despreciable que une un punto fijo de un plano horizontal con el centro del disco. El disco gira apoyado en el plano horizontal. (a) Determine el momento angular. (b) Determine el torque total que actúa sobre el disco.

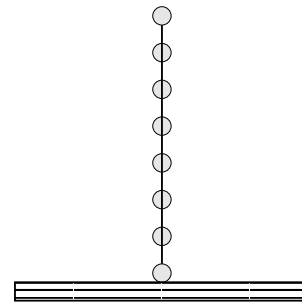




- 8.5 Se tiene una especie de péndulo que consta de una vara de masa despreciable y largo  $L$  que solo puede girar en un plano vertical en torno a un punto fijo  $P$ . En su extremo libre la vara tiene un disco de densidad uniforme, radio  $R$  y masa  $M$  en forma perpendicular a la vara. El disco gira, con respecto a la vara (ella como eje), con velocidad angular uniforme  $\vec{\omega}$ . (a) Determine el momento angular del sistema. (b) Si el sistema se suelta cuando la vara está vertical apuntando hacia arriba, una ecuación para la velocidad angular de la vara con respecto al ángulo que ella forma con la vertical.



- 8.6 Considere una barra rígida de masa despreciable que tiene  $N$  masas  $m$  a distancia  $a$  entre ellas. La barra está apoyada en el suelo e inicialmente en posición vertical. Estudie el movimiento de la barra cuando ella es levemente desviada de esa posición. Suponga que el roce estático con el suelo es suficiente para que el punto de apoyo nunca deslice. ¿Existe algún momento en que



el punto de apoyo se despegue del suelo? Estudie además el límite simultáneo  $N \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow 0$  tal que permanecen fijas las cantidades  $R = Na$  y  $M = Nm$ .

- 8.7 Resuelva ahora el caso anterior con una sola variante: el sistema tiene dos masas diferentes  $m_1$  y  $m_2$  en los extremos de la barra. Responda las mismas preguntas que antes excepto, naturalmente, la del límite.