Efectos de la rotación terrestre en la dinámica de la partícula: 2 ejemplos finales

Ricardo Muñoz M.[1]

Nota para curso FI21A - Mecánica - Sección 01 - Primavera 2004

[1] *Afiliación*: Departamento de Geofísica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile. Avda. Blanco Encalada 2002, Piso 4. Email: rmunoz@dgf.uchile.cl

Capítulo 1

Movimiento Relativo

En las clases de cátedra derivamos la forma de la ecuación de movimiento de la partícula cuando el movimiento se describe usando un sistema de referencia no inercial. La conclusión fue que, además de las fuerzas reales que existan en cada problema, debemos acordarnos de agregar fuerzas inerciales (o ficticias, o aparentes) que se originan en la no-inercialidad del sistema de referencia. Por falta de tiempo, no alcancé a mostrar dos ejemplos importantes que ilustran el efecto de la rotación terrestre en la descripción del movimiento de una partícula cerca de la superficie de la tierra. Estas notas describen en detalle los dos ejemplos que debieron ser vistos en clases.

1.1 Caída libre

Si dejamos caer una partícula desde el reposo sometida sólo a la acción de la fuerza gravitatoria terrestre, pensamos que ella caerá verticalmente hacia abajo. Sin embargo, dado que nuestro sistema de referencia está rotando con la tierra, es posible que el movimiento no sea tan simple como parece. Estudiamos en esta sección precisamente esto.

Problema: una manzana de masa m se ubica inicialmente a una altura H exactamente sobre la cabeza de una persona (Ver Figura 1.1). Si la manzana comienza su caída desde el reposo (relativo al sistema no inercial que gira con la Tierra), ¿hacia dónde se desviará al caer? (supongamos que no hay roce).

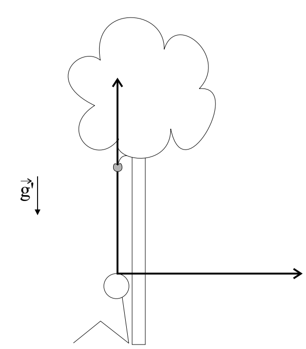

Figura 1.1: Pensante bajo manzana.

La ecuación de movimiento en el sistema rotante es

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{real}} + \vec{F}_{\text{inerciales}}. \tag{1.1}$$

Según lo visto en clases esta ecuación podemos escribirla como

$$m\vec{a} = m\vec{g}' - 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v} - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}). \tag{1.2}$$

Hay dos cosas que debemos decir acerca de la notación en (1.1) y (1.2). En primer lugar, los vectores posición, velocidad y aceleración en ambas ecuaciones corresponden a vectores descritos en el sistema no-inercial, y, por lo tanto, en rigor, deberían llevar una prima ($\vec{r}'$, $\vec{v}'$ y $\vec{a}'$). Sin embargo, para simplificar la notación no pondremos las primas, teniendo presente eso sí, que sabemos que corresponden a vectores del sistema no inercial. El segundo aspecto de notación, es que la aceleración $\vec{g}'$ en (1.2) corresponde a la aceleración de gravedad efectiva, la que, según vimos en clases, incluye la aceleración de gravedad real y también incluye el efecto de la aceleración del origen del sistema coordenado no inercial.

El segundo término de la mano derecha en (1.2) es la fuerza de Coriolis, y el tercer término es la fuerza centrífuga. Suponiendo que la magnitud de $\vec{r}$ es pequeña despreciaremos en lo sucesivo los términos con Ω_e^2 y nos quedaremos sólo con la fuerza de Coriolis. En tal caso la ecuación (1.2) puede ser integrada una vez en el tiempo, obteniéndose:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}'t - 2\vec{\Omega}_e \times (\vec{r} - \vec{r}_o), \tag{1.3}$$

en que los subíndices 'o' indican condiciones iniciales. Podemos reemplazar este resultado en (1.1) y obtener

$$\vec{a} = \vec{g}' - 2\vec{\Omega}_e \times \left(\vec{v}_o + \vec{g}'t - 2\vec{\Omega}_e \times (\vec{r} - \vec{r}_o)\right). \tag{1.4}$$

Despreciando nuevamente los términos $\sim \Omega_e^2$, podemos volver a integrar en el tiempo y obtenemos

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}'t - 2t\vec{\Omega}_e \times \vec{v}_o - t^2\Omega_e \times \vec{g}' \tag{1.5}$$

e integrando una vez más se obtiene

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{g}'t^2 - t^2\vec{\Omega}_e \times \vec{v}_o - \frac{t^3}{3}\Omega_e \times \vec{g}'. \tag{1.6}$$

Los dos últimos términos de las ecuaciones (1.5) y (1.6) son los términos adicionales introducidos por la rotación del sistema de referencia. Los otros términos son los que aparecían normalmente en la caída libre en un sistema inercial.

En el caso más simple en que la partícula parte del reposo con respecto al sistema no inercial, $\vec{v}_o = 0$, y el desplazamiento asociado a la rotación terrestre se reduce a

$$\Delta\vec{r}_{\text{rotacion}} = -\frac{t^3}{3}\vec{\Omega}_e \times \vec{g}'. \tag{1.7}$$

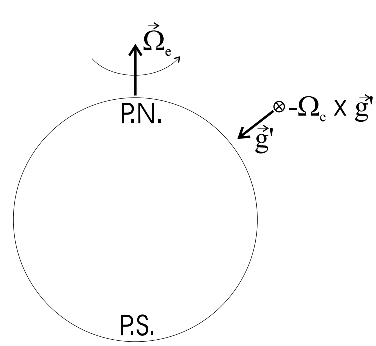

Figura 1.2: Esquema de vectores

Intentemos comprender físicamente este desplazamiento debido a la rotación del sistema. La figura 1.2 muestra el esquema de vectores que permite evaluar el desplazamiento indicado. De la figura se desprende que el desplazamiento asociado a

la rotación está siempre dirigido al Este.
Es decir, al caer la partícula se desvía hacia el Este. Recordemos que la Tierra está rotando hacia el Este, por lo tanto, al caer la partícula se está "adelantando" respecto al origen del sistema rotante. ¿Tiene esto sentido físico?

Se puede mostrar que este "adelantamiento" de la partícula al caer responde a la conservación de momento angular absoluto de la partícula. Recordemos que en la caída libre la partícula está sometida sólo a una fuerza central (la atracción gravitatoria terrestre), por lo que conserva su momento angular absoluto. Sin embargo, mientras cae la partícula está disminuyendo su distancia al eje de rotación, y, por lo tanto, debe aumentar su velocidad angular de rotación. La forma más simple de ver esto es hacer el análisis para una partícula cayendo verticalmente en el ecuador. Su momento angular es constante, es decir,

$$r^2\Omega = \text{constante} \tag{1.8}$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo

$$2r\Omega\frac{dr}{dt} + r^2\frac{d\Omega}{dt} = 0. \tag{1.9}$$

En la caída libre $dr/dt \sim -g't$, lo cual reemplazado en (1.9) arroja

$$r\frac{d\Omega}{dt} \sim 2\Omega g't. \tag{1.10}$$

Inicialmente tanto la partícula como el sistema no inercial rotaban con velocidad angular Ω_e, pero (1.10) muestra que al caer, la partícula comienza a aumentar su velocidad de rotación, lo cual crea el efecto de una velocidad relativa dirigida al Este respecto al sistema no inercial. Se tiene entonces que

$$\frac{dv'}{dt} \sim r\frac{d\Omega}{dt} \sim 2\Omega_e g't, \tag{1.11}$$

donde hemos puesto la prima en v' para enfatizar que se trata de velocidad relativa al sistema rotante. La ecuación (1.11) se resuelve en $v' \sim \Omega_e g t^2$. Este resultado es semejante al de la ecuación (1.5). Evaluando el desplazamiento para una caída de 1000 m se estima $|\Delta\vec{r}'| \sim 0.8$ m. Por supuesto, otros efectos como el roce y el arrastre del viento harán que el efecto de la rotación terrestre sea la mayor parte de las veces imperceptible.

1.2 Péndulo de Foucault

Problema: Al dejar oscilar un péndulo cuasi-ideal durante muchas horas, se observa que su plano de oscilación va rotando en un eje vertical.

La figura 1.3 ilustra el fenómeno descrito. El movimiento del péndulo que describimos en capítulos anteriores del curso era completamente plano, y no se encontraba esta rotación del plano de oscilación. Buscaremos la causa en la no inercialidad del sistema de referencia que usamos al describir el movimiento del péndulo.

Dado que el movimiento del péndulo es ahora tri-dimensional, usaremos coordenadas esféricas para describirlo (indicadas en figura 1.3). En particular, nos interesa la ecuación del ángulo azimutal (θ, en la convención usada en las clases), pues es en esta dirección en la que ocurre el movimiento de interés.

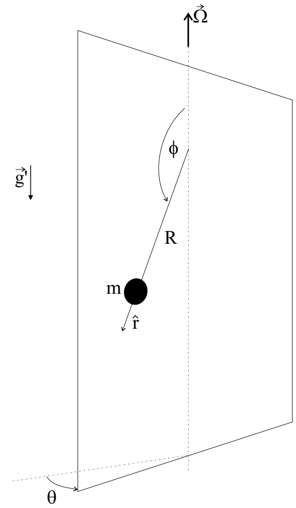

Figura 1.3: Péndulo con plano rotante

Dado que las fuerzas reales no tienen componente segun $\hat{\theta}$, si el sistema de referencia fuese inercial la ecuación de movimiento en $\hat{\theta}$ se reduciría a (con $r = R$, $\dot{r} = 0$)

$$m\left(R\ddot{\theta}\sin\phi + 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi\right) = 0, \tag{1.12}$$

cuya solución para θ es simplemente $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, es decir, no hay rotación azimutal.

Sin embargo, para un sistema no inercial que rota con la Tierra, debemos verificar si hay fuerzas inerciales que tengan componente segun $\hat{\theta}$. Nuevamente nos preocuparemos sólo de la fuerza de Coriolis, $\vec{F}_{\rm cor} = -2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}$. Más aún, considerando que $\vec{v}$ es cuasi-horizontal, nos ocuparemos sólo del efecto de la componente vertical de la velocidad angular terrestre, $\Omega_{ez} = \vec{\Omega}_e \cdot \hat{k} = \Omega_e \sin\varphi$, donde φ es la latitud del lugar.

Por otro lado, la velocidad en coordenadas esféricas ($r = R =$ constante) es

$$\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi} + R\dot{\theta}\sin(\phi)\hat{\theta} \tag{1.13}$$

de donde la componente $\hat{\theta}$ de la fuerza de Coriolis será

$$\vec{F}_{\rm cor}\cdot\hat{\theta} = -2m\Omega_e\sin(\varphi)R\dot{\phi}(\hat{k}\times\hat{\phi})\cdot\hat{\theta}. \tag{1.14}$$

La descomposición de $\hat{k}$ en coordenadas esféricas la hemos visto ya muchas veces y corresponde a $\hat{k} = -\sin(\phi)\hat{\phi} + \cos(\phi)\hat{r}$. Con lo cual se obtiene

$$\vec{F}_{\rm cor}\cdot\hat{\theta} = -2m\Omega_e\sin(\varphi)R\dot{\phi}\cos(\phi). \tag{1.15}$$

La ecuación de movimiento según $\hat{\theta}$ en el sistema no-inercial resulta entonces

$$R\ddot{\theta}\sin(\phi) + 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi) = -2\Omega_e\sin(\varphi)R\dot{\phi}\cos(\phi). \tag{1.16}$$

Se puede verificar que la solución en θ es

$$\ddot{\theta} = 0, \tag{1.17}$$
$$\dot{\theta} = -\Omega_e\sin(\varphi) \tag{1.18}$$

La rotación azimutal es, por lo tanto, una rotación de velocidad angular constante, cuyo periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_e \sin(\varphi)}, \tag{1.19}$$

que para la latitud de Santiago ($\varphi \sim -33.5^o$) implica un periodo de $\sim$ 44 horas y rotación en sentido contrario a los punteros del reloj ($\dot{\theta} > 0$).

¿Cómo interpretamos físicamente esta rotación del plano de oscilación? Su causa está en la fuerza de Coriolis introducida por la rotación terrestre. Recordemos que la fuerza de Coriolis es siempre perpendicular a la velocidad (relativa) de la partícula. En el caso de la partícula en el hemisferio Sur, la componente vertical de la rotación terrestre produce una fuerza de Coriolis que se dirige a la izquierda del vector velocidad. En su movimiento oscilatorio la partícula es continuamente desviada hacia su izquierda, lo cual produce una lenta rotación del plano de oscilación, según se ilustra en la figura 1.4.

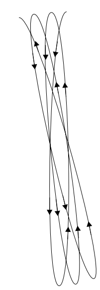

Figura 1.4: Trayectoria del péndulo de Foucault mirada desde arriba (Hemisferio Sur).