

Fuerzas Centrales

Ricardo Muñoz M.¹

Nota para curso FI21A - Mecánica - Sección 03 - Otoño 2005

¹*Afiliación:* Departamento de Geofísica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile. Avda. Blanco Encalada 2002, Piso 4. Email: rmunoz@dgf.uchile.cl

Capítulo 1

Fuerzas Centrales

1.1 Constantes del movimiento

Consideramos el movimiento de una partícula de masa m sometida sólo a la acción de una fuerza central en la forma

$$\vec{F} = F(r) \hat{r}. \quad (1.1)$$

Es decir, la fuerza tiene una magnitud que sólo depende de la distancia de la partícula al centro de fuerza (ubicado en el origen de un sistema polar de coordenadas), y su dirección es radial.

El torque de esta fuerza respecto al origen es nulo, por lo tanto, la partícula conserva su momento angular respecto al origen:

$$\vec{l}_o = m \vec{r} \times \vec{v} = m r^2 \dot{\theta} \hat{k} = \text{constante}. \quad (1.2)$$

En lo que sigue utilizaremos la magnitud del momento angular por unidad de masa

$$h \equiv r^2 \dot{\theta}, \quad (1.3)$$

como una de las constantes básicas del movimiento de la partícula. Vimos antes que una partícula que mantiene constante su momento angular describe un movimiento plano. Por lo tanto, el sistema de coordenadas que usamos es un sistema polar en el plano del movimiento de la partícula y con origen en el centro de fuerzas.

Mostramos en clases que una fuerza central de la forma (1.1) es también una fuerza conservativa, por lo que la partícula conserva su energía mecánica total

$$\text{EMT} = \text{constante}. \quad (1.4)$$

En lo que sigue utilizaremos la energía mecánica total por unidad de masa

$$\epsilon \equiv \frac{\text{EMT}}{m}, \quad (1.5)$$

como otra constante básica del movimiento de la partícula.

Las condiciones (1.2) y (1.4) nos entregan dos constantes del movimiento de la partícula sometida sólo a la acción de una fuerza central. En el resto de este capítulo describiremos el movimiento de la partícula basados en estas dos constantes físicas.

1.2 Ecuación de Binet

La ecuación de movimiento de la partícula según la dirección radial es

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r). \quad (1.6)$$

Eliminaremos la masa m del desarrollo posterior, considerando en vez de la fuerza $F(r)$, la aceleración que ella induce, $f(r) \equiv F(r)/m$. En este caso, la ecuación de movimiento resulta

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = f(r). \quad (1.7)$$

El ángulo θ como variable dependiente puede ser eliminado en favor de la variable r , usando la definición del momento angular por unidad de masa (1.3), de donde

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}, \quad (1.8)$$

de modo que 1.7 queda

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = f(r). \quad (1.9)$$

Notemos que esta ecuación diferencial parece describir un movimiento unidimensional, pues $r(t)$ es la única incógnita en ella. Sin embargo, debemos recordar siempre que el movimiento es en dos dimensiones y que el ángulo θ resulta de la definición del momento angular según 1.8.

Las ecuaciones 1.8 y 1.9 pueden combinarse para eliminar el tiempo y obtener una ecuación diferencial para la trayectoria $r(\theta)$. El álgebra de este procedimiento fue vista en clases y la ecuación diferencial resultante es

$$\frac{h^2}{r^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2h^2}{r^5} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \frac{h^2}{r^3} = f(r). \quad (1.10)$$

La ecuación anterior se simplifica haciendo el cambio de variable $\zeta \equiv \frac{1}{r}$, obteniéndose

$$-h^2\zeta^2 \left(\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \zeta \right) = f(\zeta), \quad (1.11)$$

que es la ecuación diferencial de Binet para la trayectoria de una partícula sometida a la acción de una fuerza central.

1.3 Orbitas gravitacionales

Un caso particular de fuerza central es la fuerza de atracción gravitacional entre dos partículas de masas M y m , respectivamente. En este caso la magnitud de la fuerza toma la forma

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2} \quad (1.12)$$

donde G es la constante de gravitación universal. Por ahora consideraremos que $m \ll M$, y que por tanto, el centro de fuerza es la posición de la partícula de masa M , la cual consideraremos fija en el espacio (el análisis más preciso se presentará en el capítulo de sistemas de partículas). En este caso la aceleración $f(\zeta)$ resulta

$$f(\zeta) = -GM\zeta^2. \quad (1.13)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de Binet, obtenemos la ecuación diferencial de la trayectoria

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \zeta = \frac{C}{h^2} \quad (1.14)$$

donde hemos definido la constante $C \equiv GM$. La ecuación diferencial resultante es semejante a la de un resorte, excepto por la constante del lado derecho (ecuación diferencial no homogénea). La solución general es la suma de la solución homogénea y una solución particular

$$\zeta(\theta) = A \cos(\theta - \delta) + \frac{C}{h^2}. \quad (1.15)$$

Las constantes A y δ son las dos constantes libres de la solución general. Dado que $\zeta = \frac{1}{r}$, la solución para la trayectoria $r(\theta)$ es

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{C}{h^2} + A \cos(\theta - \delta)}. \quad (1.16)$$

1.3.1 Ecuación física de la trayectoria

Intentaremos relacionar la constante A de 1.16 con la energía mecánica total (por unidad de masa) de la partícula,

$$\epsilon = \frac{1}{2}v^2 + V(r), \quad (1.17)$$

donde $V(r)$ es la energía potencial (por unidad de masa) asociada a la fuerza de atracción gravitacional. Vimos en clase que la energía potencial gravitacional (por unidad de masa) tiene la expresión

$$V(r) = -\frac{GM}{r} = -\frac{C}{r}, \quad (1.18)$$

por lo que la energía mecánica total (por unidad de masa) resulta

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{C}{r}, \quad (1.19)$$

donde la energía cinética fue evaluada usando la expresión de la velocidad en coordenadas polares. Volvemos a eliminar $\dot{\theta}$ usando el momento angular, para quedarnos con la expresión

$$\epsilon = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} - \frac{C}{r}. \quad (1.20)$$

Dado que ϵ es constante, podemos evaluar 1.20 en cualquier punto de la trayectoria. Elegiremos evaluarlo en $r = r_o$, el punto de la trayectoria más cercano al origen. Dado que en este punto el radio es mínimo, se cumplirá que $\dot{r}(r_o) = 0$. De esta forma,

$$\epsilon = \frac{1}{2}\frac{h^2}{r_o^2} - \frac{C}{r_o}. \quad (1.21)$$

Por otro lado, la ecuación 1.16 muestra que el radio mínimo se obtiene también como

$$r_o = \frac{1}{\frac{C}{h^2} + A}. \quad (1.22)$$

Podemos usar 1.21 y 1.22 para obtener

$$A = \frac{C}{h^2} \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}}, \quad (1.23)$$

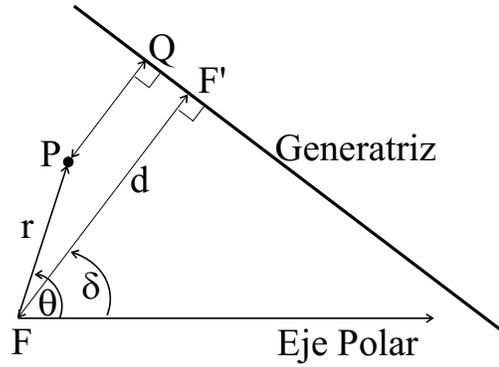


Figura 1.1: Esquema para definición de una curva cónica.

de donde la ecuación física de la trayectoria puede obtenerse reemplazando 1.23 en 1.16 para obtener

$$r(\theta) = \frac{h^2/C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}} \cos(\theta - \delta)}. \quad (1.24)$$

Llamaremos a 1.24 la ecuación física de la trayectoria de la partícula, debido a que expresa $r(\theta)$ en función de las dos constantes físicas que la partícula conserva en su movimiento, a saber, h (momento angular por unidad de masa) y ϵ (energía mecánica total por unidad de masa).

1.3.2 Ecuación geométrica de la trayectoria

La trayectoria 1.24 define una curva perteneciente a la familia de las curvas cónicas. Estas curvas se definen geoméricamente a partir de un punto F (foco) y una recta llamada generatriz, en la forma siguiente. La cónica está formada por todos los puntos P, cuya distancia al foco es proporcional a su distancia a la generatriz. La constante de proporcionalidad se denomina excentricidad, e . De acuerdo a la Figura 1.1, se tiene entonces que

$$\overline{PF} = e\overline{PQ}, \quad (1.25)$$

donde las barras denotan distancia entre los puntos indicados. Utilizando un sistema coordenado polar centrado en el foco, se cumple que

$$\overline{PF} = r, \quad (1.26)$$

$$\overline{PQ} = d - r \cos(\theta - \delta), \quad (1.27)$$

donde d es la distancia entre el foco y la generatriz y δ es el ángulo polar de la recta FF'. Reemplazando 1.26, 1.27 en 1.25, y despejando r , obtenemos la ecuación para la distancia del punto P al foco (y origen del sistema coordenado):

$$r(\theta) = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta - \delta)}. \quad (1.28)$$

En este caso el radio mínimo, r_o , de la cónica es

$$r_o = \frac{ed}{1 + e}, \quad (1.29)$$

lo que nos permite eliminar d en favor del radio mínimo, obteniendo

$$r(\theta) = \frac{r_o(1+e)}{1+e\cos(\theta-\delta)}. \quad (1.30)$$

Llamaremos a 1.30 la ecuación geométrica de la trayectoria, por cuanto describe la curva en términos de dos parámetros geométricos, a saber, la excentricidad, e , y el radio mínimo, r_o .

1.3.3 Relación entre fórmulas físicas y geométricas

Comparando 1.24 y 1.30 podemos ver que ambas ecuaciones describen la misma relación funcional entre la distancia radial (r) y el ángulo polar (θ). Para simplificar el análisis haremos que nuestro sistema coordenado polar esté orientado en la dirección del punto en que el radio de la partícula es mínimo. Es decir, la condición $r(\theta = 0) = r_o$ implica que nuestra constante $\delta = 0$. En este caso las fórmulas físicas y geométricas de la trayectoria se reducen a

$$r(\theta) = \frac{h^2/C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}} \cos \theta}, \quad (1.31)$$

$$r(\theta) = \frac{r_o(1+e)}{1+e\cos\theta}. \quad (1.32)$$

Para que 1.31 y 1.32 describan la misma trayectoria de la partícula para todo ángulo θ , se debe cumplir necesariamente que

$$h^2/C = r_o(1+e), \quad (1.33)$$

$$\sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}} = e. \quad (1.34)$$

Estas dos condiciones nos permiten determinar las equivalencias entre las constantes físicas y geométricas de la trayectoria. Por ejemplo, las constantes geométricas e y r_o se calculan en función de las constantes físicas como

$$r_o = \frac{h^2/C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}}}, \quad (1.35)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}}, \quad (1.36)$$

y las constantes físicas h y ϵ se calculan en función de las constantes geométricas como

$$h^2 = Cr_o(1+e), \quad (1.37)$$

$$\epsilon = \frac{C}{2r_o}(e-1). \quad (1.38)$$

La mayor parte de los problemas en esta materia consisten en poder reconocer los parámetros que son datos y poder usar las fórmulas apropiadas de conversión entre parámetros, de tal modo de poder calcular las variables que no se conocen.

1.4 Tipos de órbitas gravitacionales

1.4.1 Órbita circular

En una órbita circular de radio R , el radio r es constante, de tal manera que se cumple

$$r = r_o = R \quad \forall \theta. \quad (1.39)$$

Para que el radio sea constante y no dependa del ángulo θ , 1.31 y 1.32 nos dicen que se debe cumplir

$$\sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}} = 0, \quad (1.40)$$

$$e = 0. \quad (1.41)$$

Es decir, una órbita circular se caracteriza por las condiciones

$$e = 0, \quad (1.42)$$

$$\epsilon = -\frac{C^2}{2h^2}. \quad (1.43)$$

Dado que $e = 0$, la ecuación 1.37 nos dice que el radio está directamente relacionado con el momento angular en la forma

$$h^2 = CR, \quad (1.44)$$

lo cual podemos reemplazar en 1.43 para obtener la energía mecánica total en función del radio R de la órbita circular

$$\epsilon = -\frac{C}{2R}. \quad (1.45)$$

Dado que en la órbita circular la partícula permanece siempre a una distancia R del centro de fuerza, la ecuación 1.18 nos permite evaluar su energía potencial por unidad de masa

$$V = -\frac{C}{R} \quad (1.46)$$

y restando esta cantidad a la energía mecánica total, obtenemos el valor de la energía cinética por unidad de masa, K :

$$K \equiv \frac{\text{E.Cinética}}{m} = \epsilon - V = \frac{C}{2R}. \quad (1.47)$$

Resumiendo, para una órbita circular de radio R se cumple

$$e = 0, \quad (1.48)$$

$$V = -\frac{C}{R}, \quad (1.49)$$

$$K = \frac{C}{2R}, \quad (1.50)$$

$$\epsilon = -\frac{C}{2R}. \quad (1.51)$$

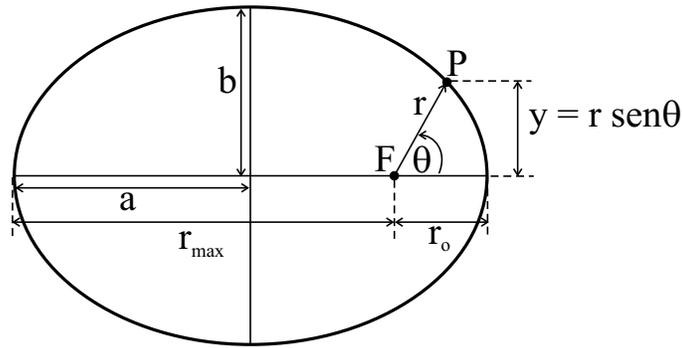


Figura 1.2: Esquema de una órbita elíptica.

1.4.2 Órbita elíptica

Una órbita elíptica se obtiene para la condición geométrica

$$e < 1, \quad (1.52)$$

es decir, cuando la excentricidad es menor que 1. En este caso se observa que el denominador en la fórmula geométrica de $r(\theta)$ nunca se hace cero, y por lo tanto, la distancia radial de la partícula nunca se hace infinito. En este caso la partícula se mueve entre un radio mínimo (r_o) y un radio máximo dado por

$$r_{\max} = r_o \frac{1+e}{1-e}. \quad (1.53)$$

Por su parte, la ecuación física de la trayectoria nos dice que se observará una órbita elíptica, en la medida que la energía mecánica total sea menor que cero. Es decir, la condición física de una órbita elíptica es que

$$\epsilon < 0. \quad (1.54)$$

En algunos casos la descripción geométrica de una órbita elíptica no se realiza en términos del radio mínimo y de la excentricidad, sino en términos de los semiejes mayor (a) y menor (b) de la elipse (Figura 1.2). La definición del semieje mayor es simplemente

$$a = \frac{r_{\max} + r_o}{2} = \frac{r_o}{1-e}. \quad (1.55)$$

La definición del semieje menor puede hacerse definiendo una coordenada $y = r \sin(\theta)$ y maximizando su valor:

$$y = r \sin \theta, \quad (1.56)$$

$$= \frac{r_o(1+e) \sin \theta}{1+e \cos \theta}, \quad (1.57)$$

$$y' = \frac{r_o(1+e) \cos \theta(1+e \cos \theta) - r_o(1+e) \sin \theta(-e \sin \theta)}{(1+e \cos \theta)^2}, \quad (1.58)$$

$$= \frac{r_o(1+e)(\cos \theta + e)}{(1+e \cos \theta)^2}. \quad (1.59)$$

El máximo de y ocurre cuando la derivada 1.59 es igual a cero, lo que ocurre para el ángulo θ_* tal que $\cos \theta_* = -e$. El semieje menor, b , se obtiene usando 1.57 para evaluar el máximo de y

$$b = y_{\max} = \frac{r_o(1+e)\sqrt{1-e^2}}{1+e(-e)} = r_o \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}. \quad (1.60)$$

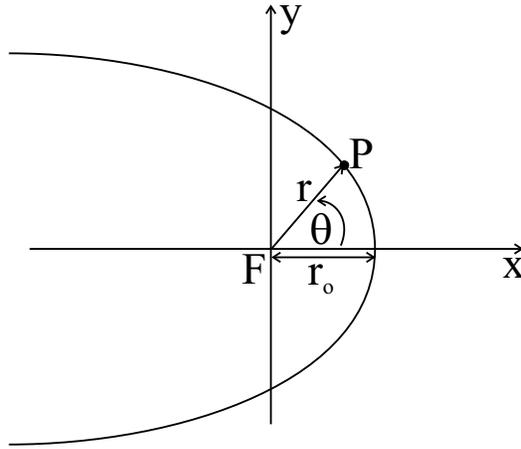


Figura 1.3: Esquema de una órbita parabólica.

1.4.3 Órbita parabólica

La órbita parabólica se obtiene para las condiciones

$$e = 1 \quad (\text{condición geométrica}) \quad (1.61)$$

$$\epsilon = 0 \quad (\text{condición física}). \quad (1.62)$$

Las fórmulas física y geométrica resultan en este caso

$$r(\theta) = \frac{h^2/C}{1 + \cos \theta}, \quad (1.63)$$

$$r(\theta) = \frac{2r_o}{1 + \cos \theta}. \quad (1.64)$$

Para mostrar que efectivamente la trayectoria es una parábola, podemos definir las coordenadas $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ (ver Figura 1.3) y usar la fórmula geométrica 1.64 para obtener

$$x = \frac{2r_o \cos \theta}{1 + \cos \theta}, \quad (1.65)$$

$$y = \frac{2r_o \sin \theta}{1 + \cos \theta}, \quad (1.66)$$

las que se pueden combinar para eliminar el ángulo θ y obtener la relación entre x e y :

$$x = r_o - \frac{y^2}{4r_o}. \quad (1.67)$$

Podemos ver que efectivamente se trata de una parábola de eje horizontal (Figura 1.3).

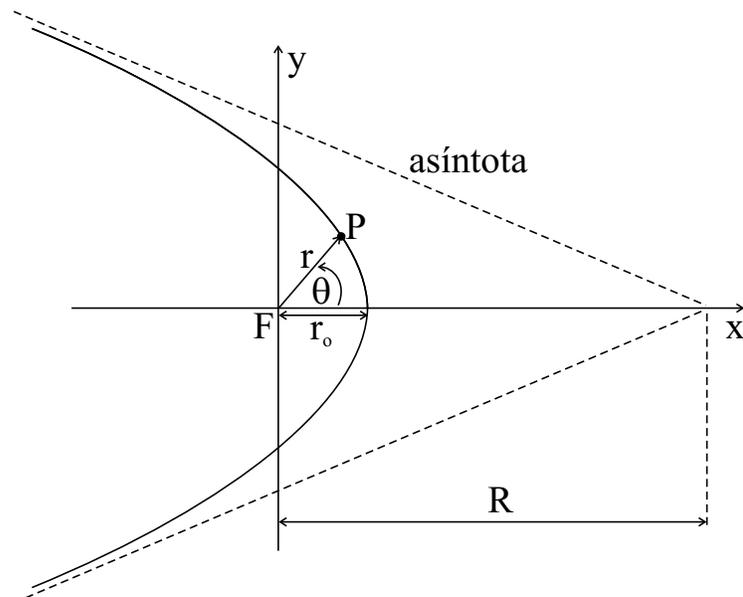


Figura 1.4: Esquema de una órbita hiperbólica.

1.4.4 Órbita hiperbólica

Las órbitas hiperbólicas corresponden a las condiciones

$$e > 1, \quad (1.68)$$

$$\epsilon > 0. \quad (1.69)$$

Estas órbitas también son abiertas y se aproximan asintóticamente a rectas cuando el radio tiende a infinito (ver Figura 1.4). Un análisis cuidadoso de este límite permite encontrar la distancia, R , entre la intersección de las rectas asíntotas y el foco (centro de fuerzas):

$$R = r_0 \frac{e}{e - 1}. \quad (1.70)$$

1.5 Diagramas paramétricos

Realizaremos en esta sección gráficos que nos indiquen los tipos de órbitas gravitacionales que se obtienen, en función de distintos parámetros.

1.5.1 Órbitas según excentricidad

El diagrama paramétrico más simple es el que distingue el tipo de órbita según la excentricidad. En este caso los valores posibles del parámetro van de 0 a infinito y el tipo de órbita queda completamente definido a partir de su valor (Figura 1.5).

1.5.2 Órbitas según energía y momento angular

Si conocemos los valores de ϵ y h , qué tipo de órbita tendremos? La respuesta a esta pregunta la podemos graficar en un diagrama paramétrico en que las coordenadas son ϵ y h . Las condiciones de cada tipo de órbita las derivamos en la sección anterior, y pueden resumirse en

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{C^2}{2h^2} && \text{para órbita circular,} \\ \epsilon &< 0 && \text{para órbita elíptica,} \\ \epsilon &= 0 && \text{para órbita parabólica,} \\ \epsilon &> 0 && \text{para órbita hiperbólica.} \end{aligned}$$

La condición de la órbita circular proviene de la ecuación 1.43, y en el diagrama (ϵ, h) corresponde a la curva mostrada en la Figura 1.6. Podemos ver que para un momento angular dado (h fijo) la órbita circular es la órbita de menor energía mecánica total.

El diagrama (ϵ, h) nos sugiere preguntarnos qué pasa con la condición $h = 0$. En este caso la partícula no tiene momento angular y su trayectoria es una recta, es decir, la partícula se mueve en la dirección del centro de fuerza (cae o sube verticalmente).

1.5.3 Órbitas según rapidez y dirección en un punto

Consideremos una partícula que cuando se encuentra a una distancia R del centro de fuerza tiene una velocidad caracterizada por una magnitud v_o y una dirección α (ver Figura 1.7). En este caso podemos crear un diagrama cuyas coordenadas estén relacionadas con v_o y α , y en él indicaremos los distintos tipos de órbitas que pueden ocurrir. Para determinar las regiones es conveniente calcular los parámetros físicos de la trayectoria en función de los datos $(R, v_o$ y $\alpha)$:

$$\epsilon = \frac{1}{2}v_o^2 - \frac{C}{R} \quad (1.71)$$

$$h = v_o R \sin \alpha. \quad (1.72)$$

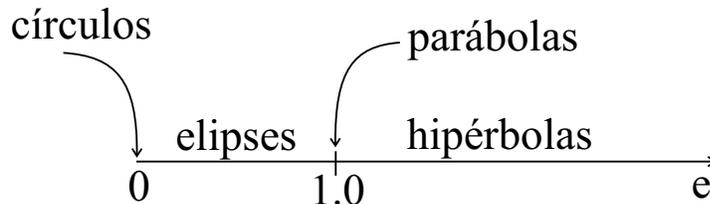


Figura 1.5: Tipos de órbitas según excentricidad.

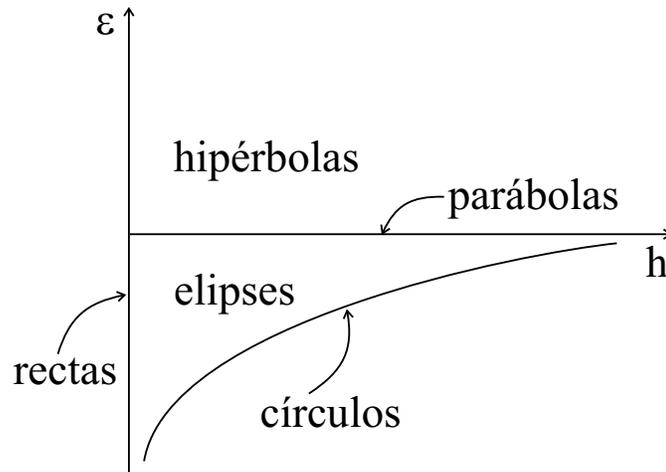


Figura 1.6: Tipos de órbitas según momento angular y energía mecánica total.

A continuación podemos calcular la excentricidad en función de estos parámetros físicos, usando la ecuación 1.36:

$$e^2 = 1 + 4 \left(\frac{1}{2} v_o^2 \frac{R}{C} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} v_o^2 \frac{R}{C} \right) \sin^2 \alpha. \quad (1.73)$$

La Figura 1.8 muestra un diagrama cuyas coordenadas son $(\frac{1}{2} v_o^2 R/C)$ y $\sin \alpha$ y en el cual se han graficado isolíneas de e^2 , obtenidas usando 1.73. A partir de los valores de la excentricidad en cada región se ha identificado los tipos de órbita correspondientes.

1.5.4 Órbitas según potencial efectivo

La ecuación de movimiento 1.9 aplicada al caso de la fuerza gravitacional puede escribirse como

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{C}{r^2}. \quad (1.74)$$

Como vimos en el capítulo previo del curso, esta ecuación puede interpretarse en términos de un potencial efectivo V_* , tal que

$$-\frac{dV_*}{dr} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{C}{r^2}. \quad (1.75)$$

Integrando esta ecuación en r y asumiendo un potencial de referencia $V_*(r \rightarrow \infty) = 0$ encontramos la expresión del potencial efectivo

$$V_*(r) = \frac{h^2}{2r^2} - \frac{C}{r}. \quad (1.76)$$



Figura 1.7: Esquema de partícula a distancia R del centro de fuerza y con velocidad arbitraria.

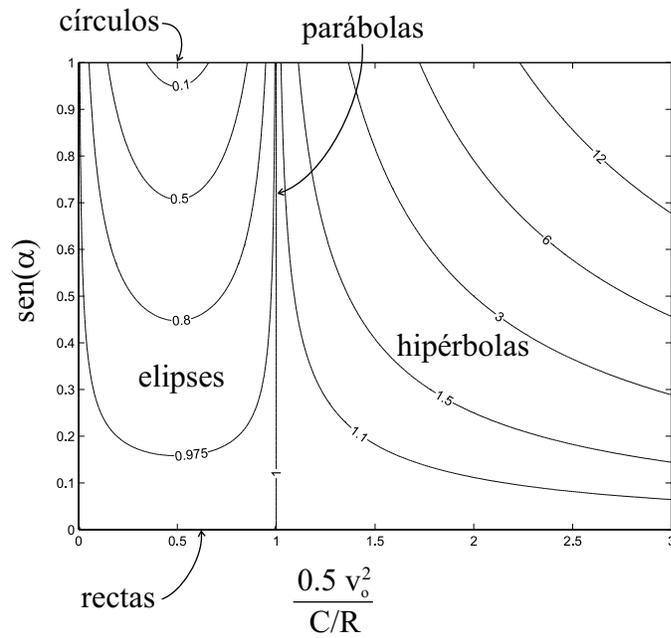


Figura 1.8: Tipos de órbitas según dirección y rapidez de la partícula en radio R . Las isólineas corresponden a valores de e^2 calculados usando 1.73.

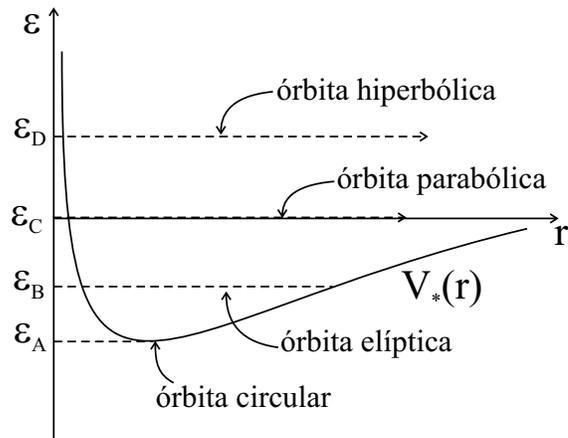


Figura 1.9: Gráfico del potencial efectivo en función de la distancia radial para un valor del momento angular, h , fijo. Dependiendo de la energía mecánica total de la partícula, ϵ , su órbita puede ser circular (caso A), elíptica (caso B), parabólica (caso C), o hiperbólica (caso D).

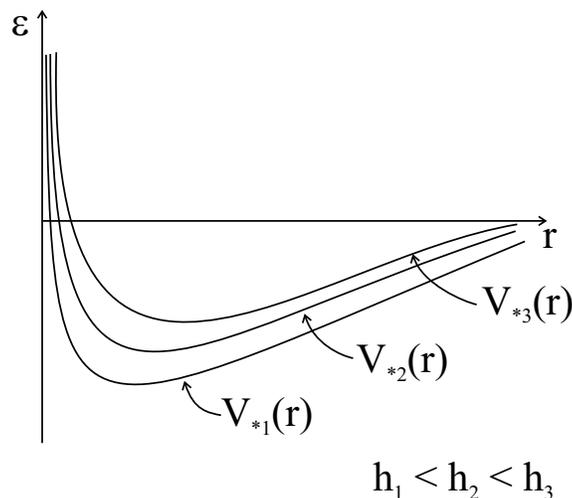


Figura 1.10: Distintas curvas de potencial efectivo para distintos valores del momento angular, h .

La forma gráfica de este potencial efectivo se muestra en la Figura 1.9. Notemos que la curva se realiza para un momento angular fijo, h . La trayectoria específica de una partícula dada, dependerá además del valor de su energía mecánica total (ϵ). Dependiendo del valor de ϵ se pueden obtener los distintos tipos de trayectoria. Cuando la energía es mínima (para el valor de h dado) se obtiene la órbita circular en que el radio permanece constante (caso A en Figura 1.9). Para $\epsilon_{\min} < \epsilon < 0$ la trayectoria es una elipse y el radio se mueve entre un valor máximo y un valor mínimo (caso B). Cuando la energía $\epsilon = 0$ se obtiene una órbita parabólica (Caso C), y en cualquier caso con $\epsilon > 0$ la trayectoria es hiperbólica y la partícula pasa por un radio mínimo pero luego no retorna jamás (Caso D).

Aunque la forma de las curvas $V_*(r)$ es siempre la misma, su posición exacta depende del valor del momento angular, h . La Figura 1.10 muestra una familia de curvas $V_*(r)$, para distintos valores del momento angular. Podemos ver que en la medida que el momento angular crece, el radio de la órbita circular aumenta.

1.6 Leyes de Kepler

1.6.1 Primera ley

Los planetas tienen órbitas elípticas alrededor del Sol, y éste se ubica en uno de los focos de la elipse.

Esto es correcto para el caso $m \ll M$. Para el caso más general el foco es el Centro de Masa de ambas partículas, según se explicará en el capítulo de Sistemas de Partículas.

1.6.2 Segunda ley

El vector posición de los planetas (medido respecto al Sol) barre áreas iguales en tiempos iguales.

Esta propiedad se basa en la conservación del momento angular. Recordemos primero que la magnitud del producto cruz entre dos vectores está relacionada con el área del triángulo formado por ambos vectores (ver Figura 1.11). Por lo tanto,

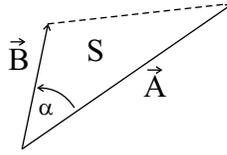


Figura 1.11: Esquema para mostrar que la magnitud del producto cruz de 2 vectores es el doble del área del triángulo que forman (S en la figura).

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin \alpha = 2S \quad (1.77)$$

donde α es el ángulo entre ambos vectores y S es el área del triángulo.

Aplicando la propiedad anterior al momento angular por unidad de masa

$$h = \|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\| = 2\frac{dS}{dt}, \quad (1.78)$$

donde dS es el elemento de área barrido por el vector posición al desplazarse un elemento $d\vec{r}$. De este modo, dado que h es constante en el movimiento de la partícula, entonces 1.78 implica que dS/dt es constante, lo cual demuestra la segunda ley de Kepler.

Un corolario de la segunda ley es que el periodo T de la órbita, el área S de ella y el momento angular están relacionados por

$$T = \frac{2S}{h}. \quad (1.79)$$

1.6.3 Tercera ley

El cuadrado del periodo de los planetas es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita.

El área de una elipse es $S = \pi ab$, donde a y b son sus semiejes mayor y menor, respectivamente. Reemplazando esta expresión en 1.79

$$T = \frac{2\pi ab}{h}. \quad (1.80)$$

Las ecuaciones 1.37, 1.55 y 1.60 permiten obtener la relación

$$\frac{b}{h} = \sqrt{\frac{a}{C}} \quad (1.81)$$

lo que reemplazado en 1.80 nos entrega la tercera ley de Kepler en la forma

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{C} a^3. \quad (1.82)$$

1.7 Resumen

Como será evidente a estas alturas, la materia de este capítulo tiene una gran cantidad de fórmulas y ecuaciones, en las cuales es extremadamente fácil ahogarse y perderse. En mi opinión, la forma de evitar el caos es preocuparse en comprender perfectamente las dos

ecuaciones básicas de la trayectoria de la partícula, que hemos llamado las fórmulas física y geométrica (ecuaciones 1.31 y 1.32), y que repetimos aquí para mayor abundancia:

$$r(\theta) = \frac{h^2/C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2eh^2}{C^2} \cos \theta}}, \quad (1.83)$$

$$r(\theta) = \frac{r_o(1 + e)}{1 + e \cos \theta}. \quad (1.84)$$

Estas dos ecuaciones no se deben memorizar, pues estarán en la hoja del control. Sin embargo, se debe comprender estas ecuaciones completamente. De partida, se debe saber a qué corresponde cada uno de los términos presentes en ellas. Se debe entender la forma en que ellas indican las relaciones entre los parámetros físicos y geométricos de las órbitas, y finalmente cómo de ellas se derivan las condiciones para obtener cada uno de los tipos de órbitas.