

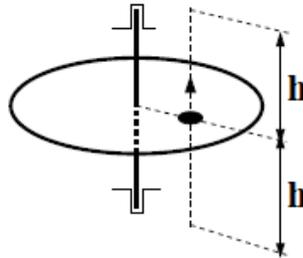
FI1001: Introducción a la física Newtoniana

Profesor: Fernando Lund

Auxiliares: Sebastián Derteano, Néstor Gallegos, Pedro Maldonado

Ejercicio pendiente aux. 1

Un disco delgado dispuesto horizontalmente gira en torno a su eje vertical con velocidad angular constante. El disco tiene una perforación a cierta distancia de su centro. Un proyectil es disparado verticalmente hacia arriba desde un punto situado a una distancia h por debajo del plano del disco y se observa que pasa limpiamente por el agujero, alcanzando una altura h por encima del disco, y volviendo a pasar limpiamente por el mismo agujero luego de una vuelta. calcule el ángulo girado por el disco desde el disparo a la primera pasada del proyectil por la perforación.



Como se puede apreciar en la figura, el movimiento de la partícula en el eje y queda definido por

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$v = v_0 - gt$$

Si consideramos que $t = 0$ cuando se lanza el proyectil, buscaremos el tiempo en que el mismo pasa por el agujero, t^* , lo que ocurre cuando la altura es h :

$$\Rightarrow h = v_0 t^* - \frac{gt^{*2}}{2} \quad (1)$$

Para despejar el tiempo de la ecuación anterior primero debemos conocer V_0 , que no es dato, usaremos las ecuaciones en el punto más alto $2h$, luego para la velocidad tenemos:

$$0 = v_0 - gt_{max}$$

$$\Rightarrow t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Además para la posición:

$$2h = v_0 t_{max} - \frac{gt_{max}^2}{2}$$

Reemplazando t_{max} obtenemos:

$$2h = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \quad \Rightarrow v_0 = 2\sqrt{gh}$$

Si usamos la expresión para v_0 en la ecuación (1) obtenemos:

$$h = 2\sqrt{gh}t^* - \frac{gt^{*2}}{2}$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática para t^* se tiene:

$$t_{1,2}^* = 2\sqrt{\frac{h}{g}} \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Encontramos dos tiempos, el menor (usando el signo -) es cuando atravieza la primera vez y el mayor, la segunda.

Recordemos que lo buscado es el ángulo que gira el disco desde el lanzamiento hasta el primer cruce, o sea el ángulo descrito por el disco en el intervalo de tiempo $[0, t_1^*]$, para encontrar este ángulo podemos usar la expresión de movimiento circular uniforme:

$$\theta = \omega t$$

Como se observa, debemos conocer ω , para obtenerlo usaremos el hecho que el disco gira 1 vuelta completa entre los cruces del proyectil, esto ocurre en el intervalo $[t_1^*, t_2^*]$.

$$\begin{aligned} \therefore 2\pi &= \omega(t_2^* - t_1^*) = \omega \left(2\sqrt{\frac{h}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} - 2\sqrt{\frac{h}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right) \\ &\Rightarrow \omega = \pi\sqrt{\frac{g}{2h}} \\ \therefore \theta &= \pi\sqrt{\frac{g}{2h}} \left(2\sqrt{\frac{h}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \right) = \frac{\pi(2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \pi(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Sebastián Derteano Herrera
Santiago, 24 de Marzo de 2011