7. Máquinas Síncrónicas

7.1 Introducción

Las máquinas sincrónicas (o sincrónicas) son maquinas cuyo estator se encuentra alimentado por corriente alterna, en tanto el rotor tiene alimentación continua ya sea a través de un enrollado de campo o bien mediante imanes permanentes.

En términos prácticos, las máquinas sincrónicas tienen su mayor aplicación en potencias elevadas, particularmente como generadores ya sea a bajas revoluciones en centrales hidroeléctricas, o bien a altas revoluciones en turbinas de vapor o gas.

Cuando la máquina se encuentra conectada a la red, la velocidad de su eje depende directamente de la frecuencia de las variables eléctricas (voltaje y corriente) y del número de polos. Este hecho da origen a su nombre, ya que se dice que la máquina opera en sincronismo con la red. Por ejemplo, una máquina con un par de polos conectada a una red de 50 [Hz] girará a una velocidad fija de 3000 [RPM], si se tratara de una máquina de dos pares de polos la velocidad sería de 1500 [RPM] y así sucesivamente, hasta motores con 40 o más pares de polos que giran a bajísimas revoluciones.

En la operación como generador desacoplado de la red, la frecuencia de las corrientes generadas dependen directamente de la velocidad mecánica del eje. Esta aplicación ha sido particularmente relevante en el desarrollo de centrales de generación a partir de recursos renovables como la energía eólica.

Las máquinas sincrónicas también se emplean como motores de alta potencia (mayores de 10.000 [HP]) y bajas revoluciones. Un ejemplo particular de estas aplicaciones es al interior de la industria minera como molinos semiautógenos (molinos SAG) o como descortezadores de la industria maderera.

Adicionalmente a la operación como motor y generador, el control sobre la alimentación del rotor hace que la máquina sincrónica pueda operar ya sea absorbiendo o inyectando reactivos a la red en cuyo caso se conocen como reactor o condensador síncrónico respectivamente. Particularmente este última aplicación es utilizada para mejorar el factor de potencia del sistema eléctrico el cual tiende a ser inductivo debido a las características típicas de los consumos.

En el presente capítulo se describe el principio de funcionamiento de la máquina sincrónica tanto como generador, motor, condensador y reactor y se detalla su modelo matemático a través de dos ejes ficticios denominados ejes directo y en cuadratura. Además se comentan algunos aspectos constructivos de este tipo de máquinas y se explica el modelo equivalente de esta máquina junto a su comportamiento en régimen permanente.

7.2. Principio de funcionamiento del generador sincrónico

7.2.1. Generador desacoplado de la red.

Considérese un generador monofásico como el de la figura 7.1. El rotor del generador consiste en un imán permanente que genera un campo magnético B constante y se encuentra rotando (gracias a una máquina impulsora externa) a una velocidad angular ω. Si medimos la tensión *e(t)* se observa la curva sinusoidal mostrada a la derecha de la Figura 7.1

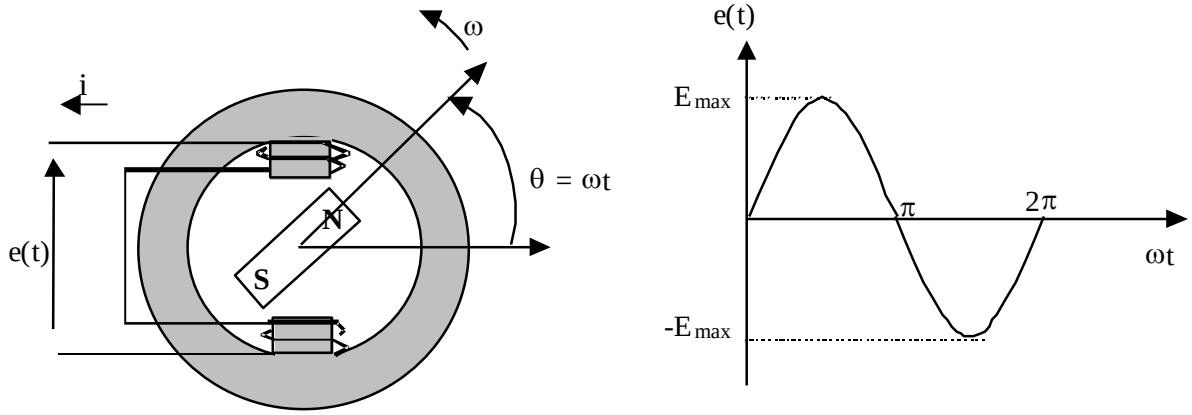

Figura 7.1. Generador monofásico desacoplado de la red

El giro del eje del rotor hace que el flujo enlazado por la bobina del estator sea variable de modo que la tensión generada en sus terminales se debe a la variación temporal de dicho flujo, es decir:

$$e = -N\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Suponiendo que el flujo enlazado tiene la forma $\phi = BA\cos(\omega t)$, el voltaje inducido es

$$e(t) = k \cdot B \cdot \omega \cdot sen(\omega t) = E_{max} sen(\omega t) \qquad \textbf{(7.1)}$$

Donde:
k es una constante de diseño de la máquina (depende del área de la sección A, del número de vueltas N y en general de la geometría del enrollado).
B es la densidad de flujo magnético generada por el rotor.
ω es la velocidad mecánica del rotor.

De acuerdo con la ecuación (7.1), la tensión inducida en los terminales de la bobina del estator corresponde a una sinusoide de frecuencia equivalente a la velocidad de giro del eje y magnitud proporcional a la densidad de flujo magnético.

La ecuación 7.1 revela que si es posible controlar el campo B entonces es posible controlar el valor máximo del voltaje inducido. Esto se logra agregando un enrollado en el rotor, el cual se alimenta con una corriente contínua I_R, según se muestra en la Figura 7.2

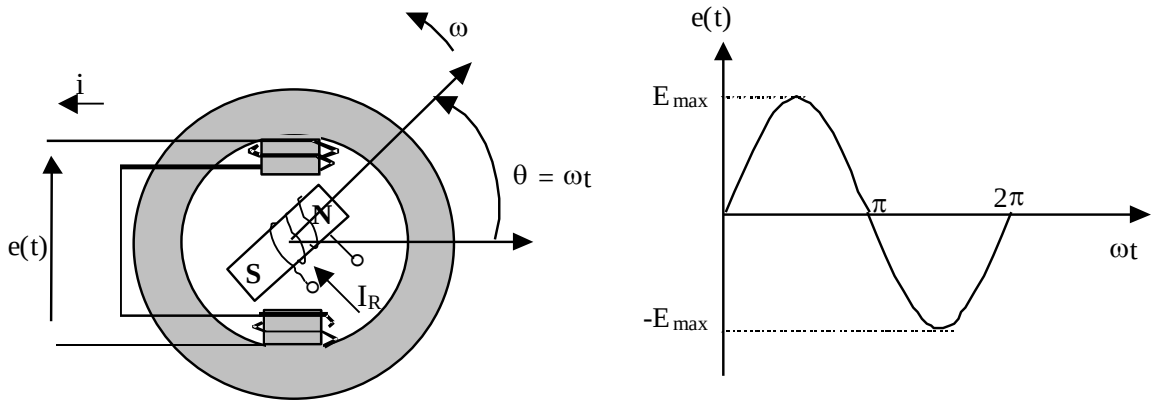

Figura 7.2. Generador monofásico desacoplado de la red

Ahora el flujo enlazado se relaciona con las dos corrientes a través de la ecuación $\phi = L_{11}i + L_{12}I_R$, en donde L_{11} es la inductancia propia y L_{12} es la inductancia mutua. Dado que las inductancias son función de la posición, el flujo enlazado por el enrollado de estator es función del ángulo θ y de la corriente I_R. Con ello le fem inducida tiene la expresión

$$e = \frac{\partial \phi}{\partial t} = L_{11}\frac{\partial i}{\partial t} + i\frac{\partial L_{11}}{\partial t} + L_{12}\frac{\partial I_R}{\partial t} + I_R\frac{\partial L_{12}}{\partial t}$$

$$e = L_{11}\frac{\partial i}{\partial t} + i\frac{\partial L_{11}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} + L_{12}\frac{\partial I_R}{\partial t} + I_R\frac{\partial L_{12}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Sabemos que la corriente I_R del rotor es constante, luego $\frac{\partial I_R}{\partial t} = 0$. Con ello podemos escribir

$$e = L_{11}\frac{\partial i}{\partial t} + i\omega\frac{\partial L_{11}}{\partial \theta} + I_R\omega\frac{\partial L_{12}}{\partial \theta}$$

Supongamos ahora que las inductancias se pueden aproximar mediante las siguientes expresiones:

$$L_{11} = L + l\sin 2\theta$$
$$L_{12} = M\sin\theta$$

Luego, la expresión para el voltaje inducido es

$$e = (L + l\sin 2\theta)\frac{\partial i}{\partial t} + i\omega 2l\cos 2\theta + I_R\omega M\cos\theta$$

y dado que $\theta = \omega t$ podemos escribir,

$$e = (L + l\sin 2\omega t)\frac{\partial i}{\partial t} + i\omega 2l\cos 2\omega t + I_R \omega M \cos \omega t$$

Para interpretar esta ecuación haremos una simplificación adicional. Supondremos que el rotor es cilíndrico, con ello en la expresión de L_{11} desaparece la componente *l* variante con el ángulo. Obtenemos:

$$e = L\frac{\partial i}{\partial t} + I_R \omega M \cos \omega t$$

Esta ecuación indica que el voltaje inducido tiene dos componentes. La primera es la expresión usual que relaciona el voltaje inducido con la inductancia propia, mientras que el segundo relaciona el voltaje inducido con la velocidad (y el ángulo) de giro del rotor. A medida que aumenta I_R aumenta el voltaje inducido y viceverza. En la situación más sencilla cuando el generador esta en vacío, no hay corriente y el voltaje inducido es

$$e_{vacio} = E = I_R \omega M \cos \omega t$$

Un circuito equivalente de este generador, se muestra en la Figura 7.3

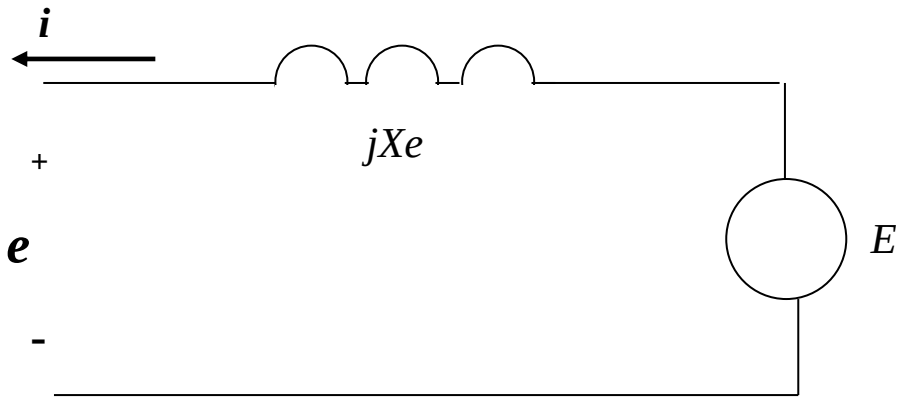

Figura 7.3 Modelo eléctrico de un generador monofásico.

La reactancia corresponde a la inductancia propia del estator, es decir, j$Xe = j\omega L$. Este modelo es similar al que obtendremos para el generador sincrónico de rotor cilíndrico en las secciones siguientes.

Cuando el rotor no es cilíndrico, es decir, cuando $l \neq 0$ no es posible obtener un circuito eléctrico equivalente. Más adelante veremos que este caso corresponde al generador de polos salientes.

Si en lugar de una bobina, se sitúan 3 enrollados en el estator espaciados físicamente en 120º geométricos, entonces el resultado es un generador trifásico cuyos voltajes estarán desfasados en 120º uno respecto del otro y tendrán una frecuencia eléctrica equivalente a la velocidad de giro del eje.

Dado que la frecuencia del voltaje generado es igual a la velocidad angular de giro, ci deseamos obtener una frecuecnia de 50Hz se require hacer girar el rotor a *n=50*60=3000* [rpm]. Esta velocidad de giro es muy elevada, sobretodo si deseamos usar un flujo de agua para darle impulso al eje del generador mediante una turbina hidráulica. Por ello en la práctica se recurre a un artificio técnico que permite entregar la misma frecuencia eléctrica con velocidades menores, la cual consiste en aumentar el número de polos en el rotor. Se obtiene que en el caso de un generador con más pares de polos, la frecuencia eléctrica será equivalente a:

$$f = \frac{n \cdot p}{120} \left[Hz \right] \qquad \textbf{(7.2)}$$

Donde:
f es la frecuencia eléctrica.
n es la velocidad de giro del eje en [RPM].
p es el número de polos del generador.

7.2.2. Generador conectado a la red.

Si el generador se encuentra conectado a la red eléctrica, la frecuencia de los voltajes y corrientes generados quedan impuestas por la red al igual que la velocidad de giro del eje. Esta última dependerá del del número de pares de polos que posea la máquina de acuerdo a la ecuación:

$$n = \frac{120 f}{p} \left[RPM \right] \qquad \textbf{(7.3)}$$

Donde:
f es la frecuencia eléctrica de la red a la que está interconectada el generador.
n es la velocidad de giro del eje.
p es el número de polos del generador.

En esta condición, la potencia mecánica aplicada al eje no variará la velocidad del rotor sino que se transformará en potencia eléctrica que será entregada a la red. El factor de potencia, con que la red va a recibir la potencia mecánica aplicada al eje, va a depender de la corriente de excitación de la máquina. De este modo, si la corriente de excitación es baja (la máquina se encuentra subexcitada) la tensión inducida será baja y por lo tanto el generador necesitará consumir reactivos para operar a cierta potencia activa, contrariamente si el generador está sobrexcitado se entregarán reactivos a la red. En medio de estas dos condiciones de operación es factible hacer funcionar la máquina con factor de potencia unitario [(1)].

([1]) En secciones posteriores se analizarán estas formas de operación.

7.3. Principio de funcionamiento del motor síncrono.

Al igual que la máquina de inducción el estator de la máquina sincrónica se encuentra alimentado con corrientes alternas. Esto hace que se produzca un campo magnético rotatorio el cual induce en los enrollados de estator una fuerza magnetomotriz dada por la ecuación [(2)]:

$$F_e = \frac{3}{2} \cdot F_m \cos(\omega t - \theta) \qquad \textbf{(6.5)}$$

Donde:
F_e es la fuerza magnetomotriz del estator.
F_m es la fuerza máxima equivalente a $N \cdot I_{max}$ (N es el número de vueltas de las bobinas del estator e I_{max} el valor máximo de la corriente de alimentación)
ω es la velocidad sincrónica.
θ es el ángulo que determina la posición del punto del entrehierro donde se está calculando la fuerza magnetomotriz.

La expresión anterior implica que el máximo de la fuerza magnetomotriz (cuando $\cos(\omega t - \theta) = 0$) se desplaza a través del entrehierro a velocidad $\dot{\theta} = \omega$, es decir a la velocidad sincrónica.

Esta velocidad sincrónica, también denotada como ω_s, corresponde a la frecuencia de la red cuando la máquina posee un par de polos o a $\frac{\omega}{\left(p/2\right)}$ cuando la máquina tiene "p" polos.

En el caso del rotor de la máquina sincrónica, éste se encuentra alimentado por una corriente continua (o bien tiene imanes permanentes) lo cual hace que el fuerza magnetomotriz del rotor sea de magnitud constante y se encuentre fija a él. En estas condiciones, el campo magnético del rotor tiende a alinearse con el campo magnético rotatorio de estator haciendo que el eje gire a la velocidad sincrónica.

La expresión para el torque instantáneo de la máquina está dado por:

$$\mathrm{T}(t) = K_T \cdot F_e \cdot F_r \cdot sen(\delta) \qquad \textbf{(7.4)}$$

Donde:
K_T es una constante de diseño de la máquina.
F_e es la fuerza magnetomotriz del estator.
F_r es la fuerza magnetomotriz del rotor.
δ es el ángulo entre las fuerzas magnetomotrices del estator y rotor.

[(2)] Para mayor detalle de cómo se obtiene esta fórmula conviene revisar el capítulo anterior, sección 6.1.1.

De la expresión (7.4) es factible comprobar que la existencia de torque medio está supeditada a la condición de que el ángulo entre las fuerzas magnetomotrices (δ) sea constante, lo cual se cumple ya que ambos campos magnéticos giran a la velocidad sincrónica. Adicionalmente, la magnitud del torque dependerá del valor del ángulo entre las fuerzas magnetomotrices siendo este valor máximo cuando $\delta = 90^o$ (caso teórico).

Conforme a lo anterior, en el caso del motor síncrono, la característica torque velocidad es la que se muestra en la figura 7.2.

De la figura es posible apreciar que este tipo de motor no posee torque de partida por lo cual requiere de mecanismos adicionales que permitan el arranque hasta llevarlo a la velocidad sincrónica.

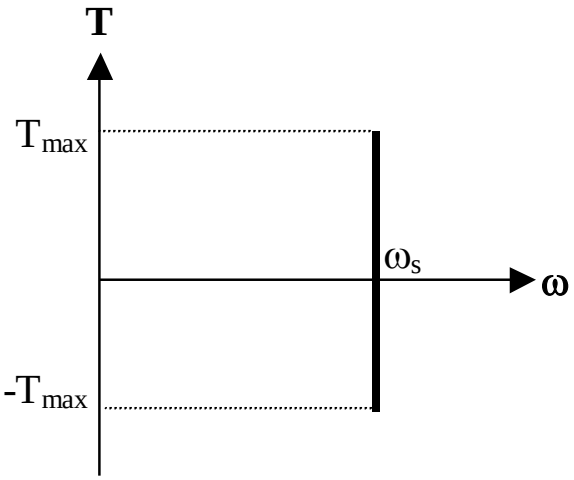

Figura 7.2. Característica Torque velocidad del motor síncrono

7.4. Operación en los cuatro cuadrantes.

La figura 7.3 muestra la operación de una máquina sincrónica en los cuatro cuadrantes de un diagrama P-Q. En el diagrama se considera potencia activa positiva cuando ésta es suministrada a la red, con lo cual los cuadrantes I y IV corresponden a la máquina operando como generador. En el caso de la potencia reactiva, ésta es positiva si se está inyectando a la red, lo cual se consigue en los cuadrantes I y II.

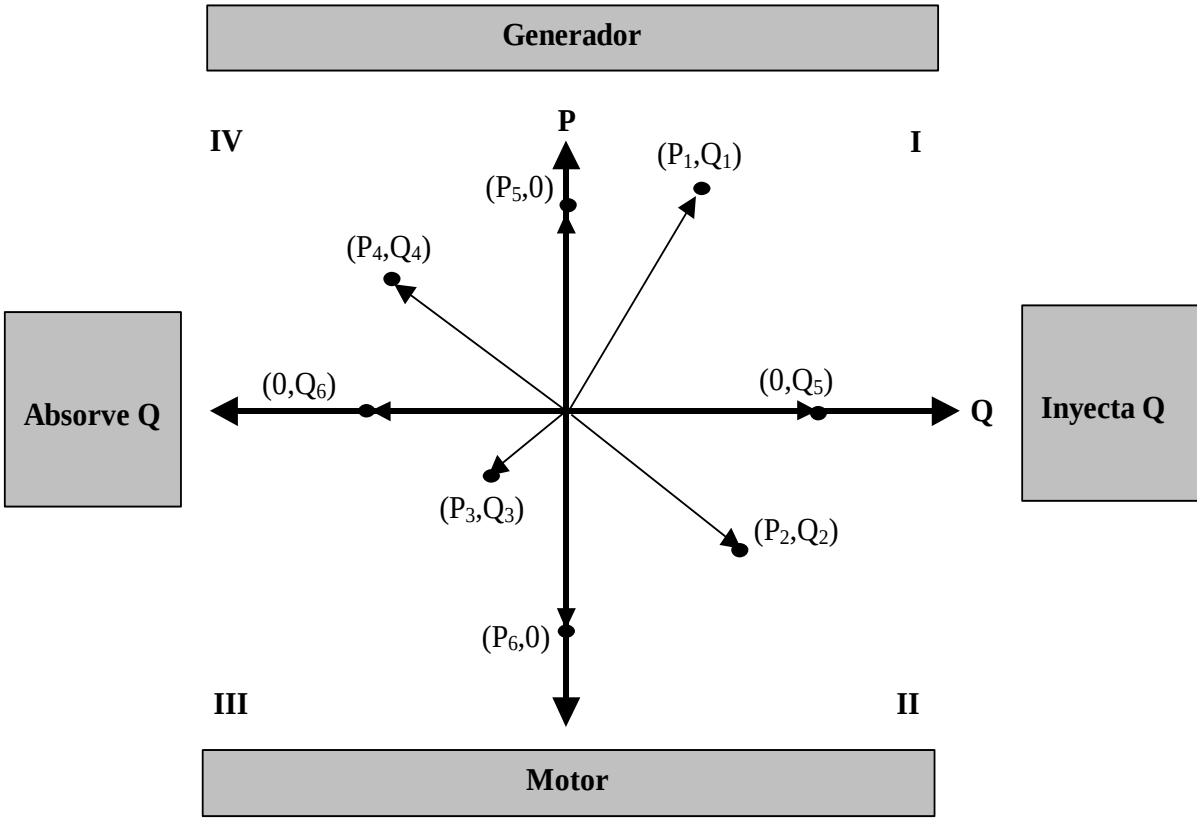

Figura 7.3. Operación de la máquina sincrónica en el diagrama P-Q

Los puntos señalados en el diagrama corresponden a las condiciones de operación definidas en la Tabla 1.

Tabla 1: Operación de la máquina sincrónica en el diagrama P-Q

PUNTO	OPERACIÓN
(P_1,Q_1)	Generador sobrexcitado o generador inductivo ($P_1>0$, $Q_1>0$)
(P_2,Q_2)	Motor sobrexcitado o motor capacitivo ($P_2<0$, $Q_2>0$)
(P_3,Q_3)	Motor subexcitado o motor inductivo ($P_3<0$, $Q_3<0$)
(P_4,Q_4)	Generador subexcitado o generador capacitivo ($P_4>0$, $Q_4<0$)
$(0,Q_5)$	Condensador síncrono ($P=0$, $Q_5>0$)
$(0,Q_6)$	Reactor síncrono ($P=0$, $Q_6<0$)
$(P_5,0)$	Generador operando con factor de potencia unitario ($P_5>0$, $Q=0$)

(P_6,0)	Motor operando con factor de potencia unitario(P_6<0, Q=0)

En el caso particular de la máquina sincrónica operando como generador (su configuración más ampliamente utilizada), es posible establecer un diagrama de operación práctico como el que muestra la figura 7.4.

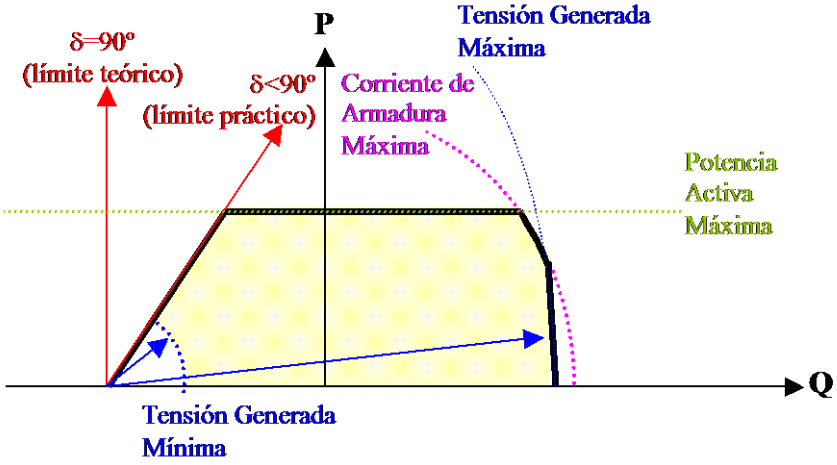

Figura 7.4. Diagrama de operación de un generador síncrono.

En la figura, el área coloreada en amarillo corresponde a la zona donde el generador es factible de ser operado, los límites están dados por condiciones prácticas tales como:

- Máximo ángulo entre las fuerzas magnetomotrices: el límite teórico, tal como muestra la ecuación (7.4), es 90º, sin embargo en la práctica se opera con ángulos menores ya que se debe garantizar la estabilidad en la operación (si el ángulo δ llegase a sobrepasar los 90º la máquina se sale de sincronismo y se acelera peligrosamente).

- Potencia activa máxima: corresponde al límite de potencia activa que es capaz de entregar la máquina operando en condiciones nominales (límite dado por el fabricante del generador) .

- Tensión generada mínima y máxima: el generador requiere una excitación mínima en el rotor para poder generar tensión y puede generar hasta un límite práctico dado por la máxima corriente rotórica de la máquina.

- Máxima corriente de estator (armadura): corresponde al límite de corriente que puede circular por la armadura en condiciones nominales. Exceder este límite perjudica la vida útil de la máquina debido al calentamiento y posible fallas en aislaciones de la máquina.

7.5. Características constructivas

7.5.1. Características del estator

Dada la alimentación alterna de la armadura, el estator de la máquina sincrónica es muy similar al estator de la máquina de inducción, por lo cual las características constructivas del mismo no se repetirán en esta sección [3] (3).

7.5.2. Características del rotor

El rotor de una máquina sincrónica puede estar conformado por:

- Imanes permanentes
- Rotor de polos salientes
- Rotor cilíndrico

Los imanes permanentes representan la configuración más simple ya que evita el uso de anillos rozantes para alimentar el rotor, sin embargo su aplicación a altas potencias se encuentra limitada ya que las densidades de flujo magnético de los imanes no es, por lo general, alta. Adicionalmente, los imanes permanentes crean un campo magnético fijo no controlable a diferencia de los rotores con enrollados de excitación donde se puede controlar la densidad de flujo magnético.

Dentro de los rotores con enrollados de excitación se tienen los de tipo cilíndrico y los de polos salientes, ambos ilustrados en la figura 7.5.

La figura 7.5(a) muestra el diagrama del estator de una máquina sincrónica, la figura 7.5(b) corresponde a un rotor de polos salientes, en tanto que el dibujo 7.5(c) muestra el esquema de un rotor cilíndrico. Por su parte, en las figuras 7.5(d) y (e) se observan la apariencia de una máquina sincrónica vista desde fuera y la representación de los enrollados de rotor y estator, respectivamente.

[3] Los detalles de las características constructivas del estator se describen en la sección 6.2 del capítulo anterior.

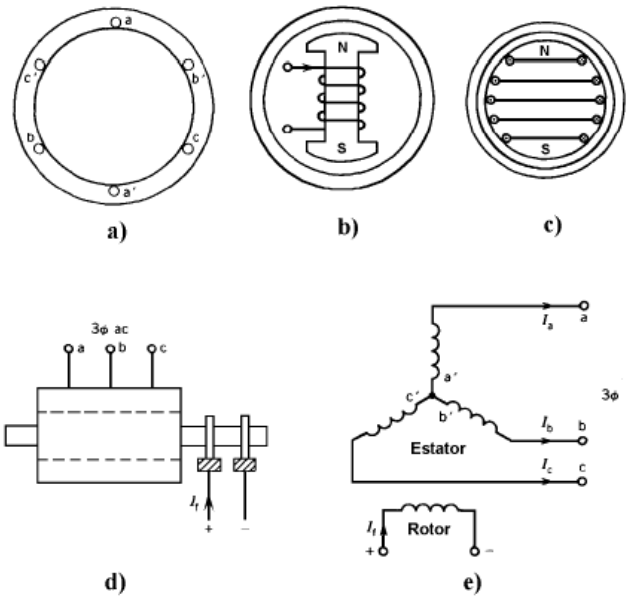

Figura 7.5. Rotores de máquina sincrónica

Desde el punto de vista de modelamiento el rotor cilíndrico es bastante más simple que el rotor de polos salientes ya que su geometría es completamente simétrica. Esto permite establecer las relaciones para los voltajes generados respecto de las inductancias mutuas del rotor y estator, las cuales son constantes.

En el caso del rotor de polos salientes, su geometría asimétrica provoca que el modelamiento de las inductancias propias de estator y rotor, así como las inductancias mutuas entre ambos, tengan un desarrollo analítico bastante complejo.

7.5.3. Generadores síncronos.

Dependiendo de la aplicación los generadores síncronos tienen características constructivas bastante diferentes:

- En el caso de generadores de centrales hidroeléctricas se utilizan máquinas de eje vertical, con un rotor de polos salientes corto pero de gran diámetro. Puesto que la velocidad de rotación es bastante lenta (300-350 [RPM]) se requiere de un gran número de polos para efectuar la generación.

- En el caso de centrales térmicas o de ciclo combinado se emplean máquinas de eje vertical con un rotor cilíndrico largo pero de poco diámetro. Estas características constructivas permiten que el eje del generador rote a altas velocidades, ya sea 1.500 o 3.000[RPM] dependiendo del numero de polos (usualmente dos).

7.5.4. Motores síncronos.

De acuerdo con lo estudiado, los motores síncronos no pueden arrancar en forma autónoma lo cual hace que requieran mecanismos adicionales para la partida:

- Una máquina propulsora externa (motor auxiliar).
- Barras amortiguadoras.

Particularmente en el segundo caso, se intenta aprovechar el principio del motor de inducción para generar torque a la partida. Constructivamente, en cada una de las caras polares del rotor (polos salientes), se realizan calados donde se colocan una barras, denominadas amortiguadoras, que le dan al rotor una característica similar a los segmentos tipo jaula de ardilla del motor de inducción (ver figura 7.6).

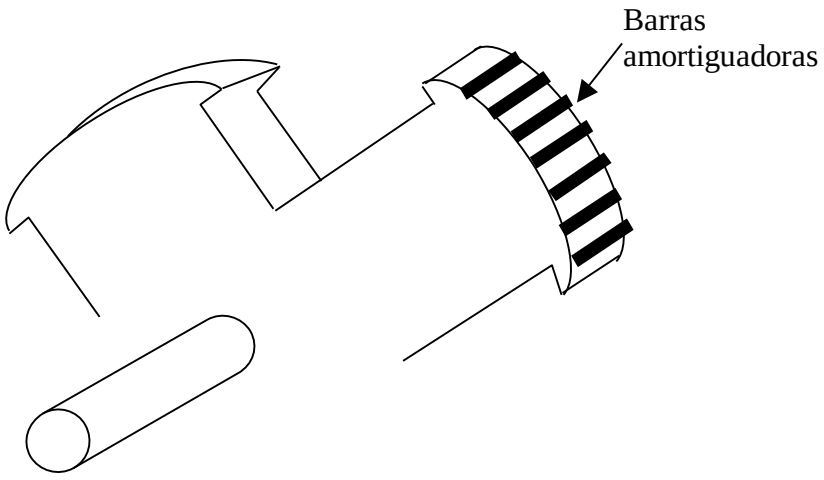

Figura 7.6. Barras amortiguadoras en motor síncrono

De este modo, el motor se comporta como una máquina de inducción hasta llegar a la velocidad sincrónica. Es importante notar que el circuito de compensación se construye de modo que el campo magnético rotatorio inducido en el rotor sea débil comparado con el campo magnético fijo del rotor (producido por la alimentación con corriente continua). De este modo se evita que el efecto de inducción perturbe la máquina en su operación normal.

7.6. Ejes directo y en cuadratura

El estudio del comportamiento de las máquinas sincrónicas se simplifica al considerar dos ejes ficticios denominados eje directo y eje en cuadratura, que giran solidarios al rotor a la velocidad de sincronismo (ver figura 7.7):

- El eje directo es aquel que se define en la dirección Norte-Sur del rotor, con su origen en el centro magnético y en dirección hacia el Norte.

- El eje en cuadratura tiene el mismo origen que el anterior pero su dirección es perpendicular a éste.

Las corrientes por ambos enrollados ficticios (I_d e I_q) están desfasadas en 90º eléctricos y la suma de ambas es equivalente a la corriente por fase en los enrollados reales.

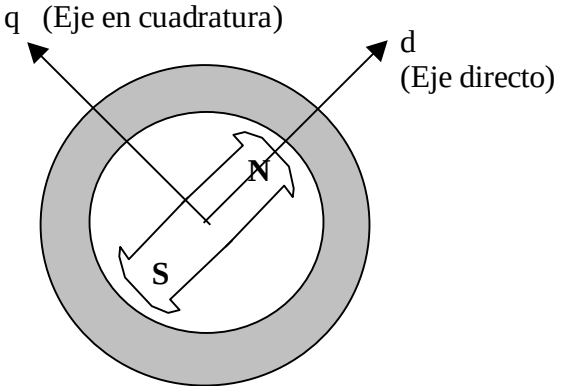

Figura 7.7. Ejes directo y en cuadratura

El uso de estos enrollados ficticios permite simplificar el análisis de las máquinas sincrónicas. En particular, en el caso de la máquina con rotor cilíndrico que posee una geometría simétrica es posible establecer un circuito eléctrico equivalente para definir el comportamiento de esta máquina.

En el caso del rotor de polos salientes, si bien no se puede esquematizar el comportamiento de la máquina a través de un circuito eléctrico equivalente, el empleo de los ejes directo y en cuadratura contribuye a simplificar notablemente el desarrollo analítico y las ecuaciones debido a que permite independizarse del ángulo de posición entre el rotor y los ejes de las fases.

En la sección siguiente se presenta el desarrollo analítico del comportamiento de la máquina de polos salientes (más compleja) y posterior a ello se analiza el comportamiento de la máquina con rotor cilíndrico a partir de su circuito equivalente.

7.7. Flujos enlazados en las bobinas del rotor y estator

Para llevar a cabo el desarrollo de las ecuaciones que definen los flujos enlazados del rotor y estator de la maquina sincronía, se han realizado las siguientes simplificaciones:

- Los enrollados del estator tienen una distribución sinusoidal a lo largo del entre hierro.
- Las ranuras del estator causan una no despreciable variación en la inductancia con respecto a la variación de la posición del rotor
- La histéresis magnética es despreciable
- Los efectos de la saturación magnética son despreciables

Las simplificaciones a), b), y c) son razonables. Y su principal justificación viene dada por la comparación de los resultados teóricos obtenidos y mediciones del funcionamiento de las maquinas. La simplificación d) está mas bien echa por conveniencia del análisis, esto ya que no siempre es particularmente cierto la línealidad de las relaciones flujo-corriente.

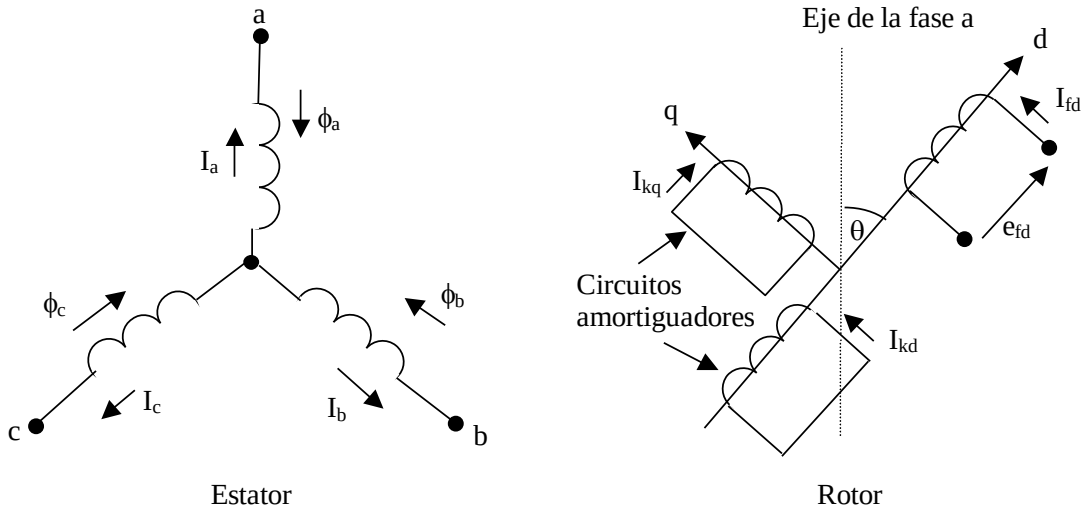

Figura 7.8. Circuitos de estator y rotor

En la figura 7.8 se muestra el circuito relacionado con el análisis de la maquina sincrónica. En el circuito del estator se muestran los enrollados y las corrientes pertenecientes a cada una de las tres fases. En el diagrama del rotor se muestra el enrollado del campo que está conectado a una fuente de corriente continua y los enrollados de amortiguación, que se modelan cortocircuitados

El ángulo θ esta definido como el ángulo entre el eje directo y el centro del enrollado de la fase "a", en la dirección de rotación. De este modo, el ángulo crece en forma continua y se relaciona con la velocidad angular y el tiempo a través de $\theta = \omega t$.

De la misma figura podemos establecer las siguientes variables:

Tabla 2: Variables eléctricas y magnéticas de una máquina sincrónica

VARIABLE	DEFINICIÓN
e_a, e_b, e_c	voltaje instantáneo en el estator (fase – neutro)
i_a, i_b, i_c	corriente instantánea en las fases a, b, y c
e_{fd}	voltaje en el campo del rotor
i_{fd}	corriente en el circuito de campo
i_{kd}, i_{kq}	corriente en los circuitos amortiguadores
L_{aa}, L_{bb}, L_{cc}	inductancia propias de los enrollados del estator
L_{ab}, L_{bc}, L_{ca}	inductancias mutuas entre los enrollados del estator
$L_{jfd}, L_{jkd}, L_{jkq}, \quad j: a,b,c$	inductancias mutuas entre los enrollados de estator y rotor
L_{fd}, L_{kd}, L_{kq}	inductancias propias de los enrollados del rotor
L_{fkd}	inductancia mutuas entre los enrollados del rotor
R_a	resistencia de armadura por fase
R_{fd}	resistencia rotórica
R_{kd}	resistencia del circuito amortiguador directo
R_{kq}	resistencia del circuito amortiguador en cuadratura

Conforme a las definiciones anteriores en posible determinar las ecuaciones que definen el comportamiento del estator y rotor respecto de los flujos enlazados en las respectivas bobinas.

Ecuaciones del estator:

El voltaje en cada una de las tres fases esta dado por:

$$\begin{aligned} e_a &= \frac{\partial \phi_a}{\partial t} - R_a \cdot i_a \\ e_b &= \frac{\partial \phi_b}{\partial t} - R_a \cdot i_b \\ e_c &= \frac{\partial \phi_c}{\partial t} - R_a \cdot i_c \end{aligned} \qquad \textbf{(7.5)}$$

Los flujos enlazados por cada bobina del estator son:

$$\begin{aligned} \phi_a &= -L_{aa} \cdot i_a - L_{ab} \cdot i_b - L_{ac} \cdot i_c + L_{afd} \cdot i_{fd} + L_{akd} \cdot i_{kd} + L_{akq} \cdot i_{kq} \\ \phi_b &= -L_{ba} \cdot i_a - L_{bb} \cdot i_b - L_{bc} \cdot i_c + L_{afd} \cdot i_{fd} + L_{akd} \cdot i_{kd} + L_{akq} \cdot i_{kq} \end{aligned} \qquad \textbf{(7.6)}$$

$$\phi_c = -L_{ca} \cdot i_a - L_{bc} \cdot i_b - L_{cc} \cdot i_c + L_{afd} \cdot i_{fd} + L_{akd} \cdot i_{kd} + L_{akq} \cdot i_{kq}$$

En las ecuaciones anteriores, el signo negativo asociado a las corrientes de los enrollados del estator es por la conveniencia de tomar estas direcciones.

Ecuaciones del rotor:

Las ecuaciones del circuito del rotor son las siguientes:

$$\begin{aligned} e_{fd} &= \frac{\partial \phi_{fd}}{\partial t} + R_{fd} \cdot i_{fd} \\ 0 &= \frac{\partial \phi_{kd}}{\partial t} + R_{kd} \cdot i_{kd} \\ 0 &= \frac{\partial \phi_{kq}}{\partial t} + R_{kq} \cdot i_{kq} \end{aligned} \qquad \textbf{(7.7)}$$

Las ecuaciones que expresan los flujos enlazados por las bobinas del rotor son:

$$\begin{aligned} \phi_{fd} &= L_{fd} \cdot i_{fd} + L_{fkd} \cdot i_{kd} - L_{afd} \left[i_a \cos\theta + i_b \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ \phi_{kd} &= L_{fkd} \cdot i_{fd} + L_{kd} \cdot i_{kd} - L_{akd} \left[i_a \cos\theta + i_b \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ \phi_{kq} &= L_{kq} \cdot i_{kq} + L_{akq} \left[i_a sen\theta + i_b sen\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c sen\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \end{aligned} \qquad \textbf{(7.8)}$$

7.7.1. inductancias propias del estator.

La inductancia propia del enrollado "a", es igual a la razón entre el flujo de la fase a, y la corriente por el enrollado de esta fase, cuando la corriente en todos los otros circuitos es igual a cero. La inductancia es directamente proporcional a la permeabilidad y es posible entender que la inductancia L_{aa} estará en un valor máximo cuando θ=0º, y un valor mínimo cuando θ=90º, un máximo nuevamente cuando θ=180º, y así sucesivamente.

Despreciando efectos armónicos, la fuerza magnetomotriz de la fase "a" tiene una distribución sinusoidal en el espacio con un máximo centrado en el eje de la fase a. Este valor máximo esta dado por $N_a \cdot i_a$, donde N_a son las vueltas efectivas del enrollado.

En la figura 7.9 se muestra la descomposición de la fuerza magnetomotriz en los ejes de referencia directo y de cuadratura, quedando el valor máximo proyectado en los ejes de la siguiente manera:

$$F_{ead\max} = N_a \cdot i_a \cos(\theta)$$
$$F_{eaq\max} = N_a \cdot i_a \cos(\theta + 90^o) = -N_a \cdot i_a sen(\theta) \qquad \textbf{(7.9)}$$

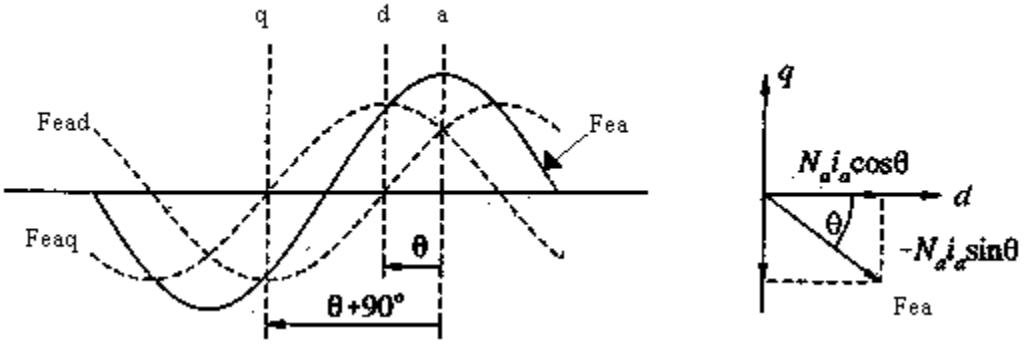

Figura 7.9. Descomposición de la fuerza magnetomotriz (fase a)

La razón para expresar la fuerza magneto motriz en términos de los ejes directo y de cuadratura es por que en cada instante se puede definir adecuadamente la geometría del entrehierro.

La figura 7.10 muestra la distribución interna del flujo magnético de una maquina sincrónica cuando sólo esta circulando corriente por la bobina "a". De este modo es posible obtener las inductancias propias en el estator, analizando la variación de flujo magnético en las bobinas de acuerdo al movimiento del rotor.

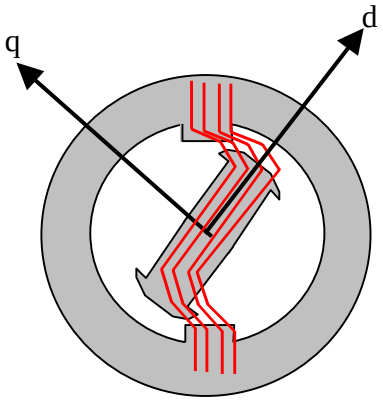

Figura 7.10. Flujo magnético en el entrehierro (fase a)

Es posible definir la trayectoria del flujo magnético en el entrehierro (ϕ^{eh}) respecto de los ejes directo y en cuadratura como:

$$\phi_{ad}^{eh} = (N_a \cdot i_a \cos\theta) P_d$$
$$\phi_{aq}^{eh} = (-N_a \cdot i_a sen\theta) P_q \qquad \textbf{(7.10)}$$

Donde P_d y P_q son los coeficientes de permeabilidad de los ejes directo y de cuadratura respectivamente.

El total del flujo enlazado en el entrehierro es:

$$\phi_{aa}^{eh} = \phi_{ad}^{eh}\cos\theta - \phi_{aq}^{eh} sen\theta = N_a \cdot i_a \left(P_d \cos^2\theta + P_q sen^2\theta\right)$$
$$\therefore\ \phi_{aa}^{eh} = N_a \cdot i_a \left(\frac{P_d + P_q}{2} + \frac{P_d - P_q}{2}\cos 2\theta\right) \qquad \textbf{(7.11)}$$

La inductancia propia L_{aa} corresponde a:

$$L_{aa} = \frac{N_a \cdot (\phi_{aa}^{eh} + \phi_a^{fuga})}{i_a} \qquad \textbf{(7.12)}$$

Donde:

ϕ_{aa}^{eh} es el flujo enlazado en el entrehierro.

ϕ_a^{fuga} es el flujo de fuga no enlazado en el entrehierro.

Con ello:

$$L_{aa} = L_0 + L_1\cos(2\theta)$$

$$L_0 = N_a{}^2\left(\frac{P_d + P_q}{2}\right) + \frac{N_a \cdot \phi_a^{fuga}}{i_a} \qquad \textbf{(7.13)}$$
$$L_1 = N_a{}^2\left(\frac{P_d - P_q}{2}\right)$$

De esta misma manera se pueden encontrar las inductancias propias para las fases b y c, estando desplazadas en 120º y en 140º respectivamente:

$$L_{bb} = L_0 + L_1\cos\left[2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \qquad \textbf{(7.14)}$$
$$L_{cc} = L_0 + L_1\cos\left[2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

La variación de la inductancia propia de los enrollados del estator se muestra en la siguiente figura, en donde se puede apreciar la dependencia de esta con el ángulo θ

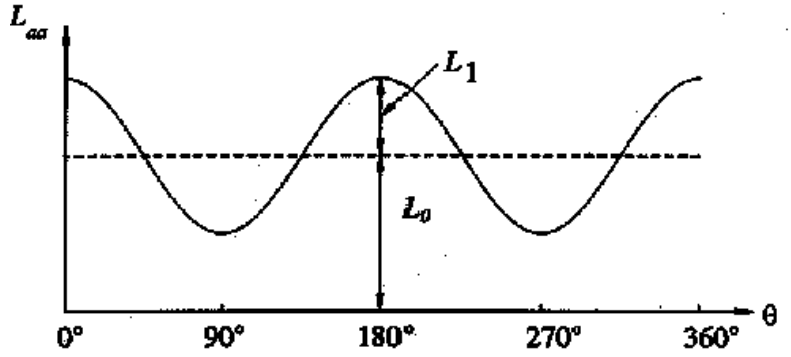

Figura 7.11. Variación de la inductancia propia de los enrollados del estator.

7.7.2. inductancias mutuas del estator.

La inductancia mutua L_{ab}, es posible de evaluar encontrando el flujo en el entrehierro ϕ_{ab}^{eh} que es enlazado por la fase "b" cuando solo la fase a es excitada. Esto se consigue reemplazando el valor de θ en la ecuación (7.11) por $(\theta - 2\pi/3)$ de modo de proyectar las variables al eje de la fase "b", quedando la siguiente ecuación:

$$\phi_{ba}^{eh} = \phi_{ad}^{eh}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \phi_{aq}^{eh} sen\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = N_a \cdot i_a \left[\left(-\frac{P_d + P_q}{4}\right) + \left(\frac{P_d - P_q}{2}\right)\cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \quad \textbf{(7.15)}$$

De esta manera la inductancia mutua entre las fases a y b es:

$$L_{ab} = \frac{N_a \cdot (\phi_{ab}^{eh} + \phi_{ab}^{fuga})}{i_a} = L_{ba} \quad \textbf{(7.16)}$$

$$L_{ab} = -L_{0m} + L_1 \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = -L_{0m} - L_1 \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

Similarmente:

$$L_{bc} = L_{cb} = -L_{0m} - L_1 \cos(2\theta - \pi)$$
$$L_{ca} = L_{ac} = -L_{0m} - L_1 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \quad \textbf{(7.17)}$$

En general, para circuitos balanceados el término L_{0m} es aproximadamente $L_0/2$.

De acuerdo con la ecuación (7.5), la variación de la inductancia mutua entre las fases a y b corresponde a lo mostrado en la figura 7.12.

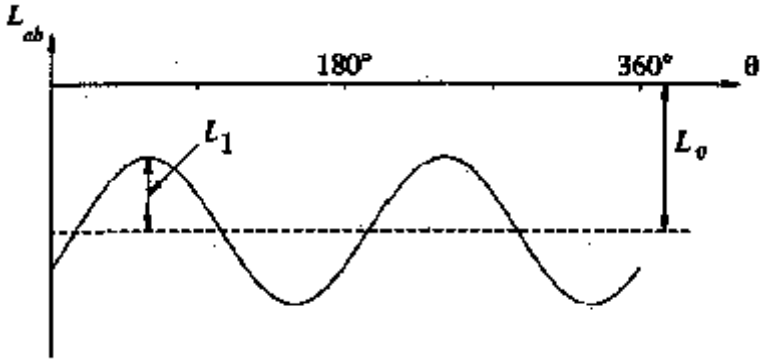

Figura 7.12. Variación de la inductancia mutua de los enrollados de las fases a y b.

7.7.3. inductancias mutuas entre rotor y estator.

Para este cálculo se considera:

- Las variaciones en el entrehierro debido a las ranuras del estator son despreciables.
- El circuito del estator tiene una permeabilidad constante.
- La variación de la inductancia mutua se debe al movimiento relativo entre los enrollados.

Cuando el enrollado del rotor y del estator están el línea el flujo enlazado por ambos es máximo, sin embargo, cuando se encuentran en forma perpendicular no hay flujo entre los dos circuitos y la inductancia mutua es cero.

De este modo, la inductancia mutua de la fase "a" del estator y los enrollados del rotor son:

$$\begin{aligned} L_{afd} &= L_{afd\max}\cos\theta \\ L_{akd} &= L_{akd\max}\cos\theta \\ L_{akq} &= L_{akq\max}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -L_{akq\max}sen\theta \end{aligned} \qquad \textbf{(7.18)}$$

Para considerar la inductancia entre la fase "b" y el rotor se debe reemplazar el valor de θ, de las ecuaciones anteriores por $\theta - 2\pi/3$, y en al caso de la fase "c" se debe remplazar por $\theta + 2\pi/3$.

El análisis anterior permite establecer una ecuación final para los flujos enlazados por las bobinas del estator:

$$\phi_a = -i_a\left[L_0 + L_1\cos(2\theta)\right] + i_b\left[L_{0m} + L_1\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right] + i_c\left[L_{0m} + L_1\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right] \quad \textbf{(7.19)}$$
$$+ i_{fd}\cdot L_{afd\max}\cos(\theta) + i_{kd}\cdot L_{akd\max}\cos(\theta) - i_{kq}\cdot L_{akq\max} sen(\theta)$$

Análogamente para las fases “b” y “c”:

$$\phi_b = i_a\left[L_{0m} + L_1\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right] - i_b\left[L_0 + L_1\cos\left\{2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right\}\right] + i_c\left[L_{0m} + L_1\cos(2\theta - \pi)\right] \quad \textbf{(7.20)}$$
$$+ i_{fd}\cdot L_{afd\max}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_{kd}\cdot L_{akd\max}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - i_{kq}\cdot L_{akq\max} sen\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\phi_c = i_a\left[L_{0m} + L_1\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right] + i_b\left[L_{0m} + L_1\cos(2\theta - \pi)\right] - i_c\left[L_0 + L_1\cos\left\{2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right\}\right] \quad \textbf{(7.21)}$$
$$+ i_{fd}\cdot L_{afd\max}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + i_{kd}\cdot L_{akd\max}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - i_{kq}\cdot L_{akq\max} sen\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

7.8. Transformación DQ0

Las ecuaciones anteriores, asociadas al circuito del estator rotor, permiten describir completamente el funcionamiento de la maquina sincrónica, sin embargo estas ecuaciones contienen inductancias que varían en función del ángulo θ, el cual depende del tiempo. Esto introduce una considerable complicación en la resolución de las ecuaciones que rigen el comportamiento de las maquinas sincrónicas, por lo cual se propone transformar los valores asociados a las fases a un nuevo sistema denominado DQ0.

Considerando en forma conveniente las corrientes de estator proyectadas sobre los ejes d-q, se tiene la siguiente transformación de variables:

$$\begin{aligned} i_d &= k_d\left[i_a \cos\theta + i_b \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ i_q &= -k_q\left[i_a sen\theta + i_b sen\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c sen\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(7.22)}$$

Donde k_d y k_q son constantes arbitrarias, que se toman de manera de simplificar los desarrollos numéricos en las ecuaciones. En general k_d y k_q se toman iguales a $2/3$.

Si se considera $i_a=I_m \cdot sen(\omega t)$ y consecuentemente las restantes fases, las ecuaciones anteriores pueden rescribirse como:

$$\begin{aligned} i_d &= k_d \cdot I_m\left[sen(\omega t)\cdot\cos\theta + sen\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + sen\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ i_d &= k_d \frac{3}{2} I_m \cos(\omega t - \theta) \end{aligned} \qquad \textbf{(7.23)}$$

Se puede notar que el valor máximo para la corriente i_d esta dado por I_m, siempre y cuando se cumple que $k_d = 2/3$. De manera análoga para la corriente del eje de cuadratura:

$$i_q = -k_q \frac{3}{2} I_m \cos(\omega t - \theta) \qquad \textbf{(7.24)}$$

También es conveniente considerar una secuencia de variable cero i_0 asociado a la simetría de las componentes eléctricas (corrientes en el estator).

$$i_0 = \frac{1}{3}(i_a + i_b + i_c) \qquad \textbf{(7.25)}$$

En condiciones de balance $(i_a + i_b + i_c) = 0$, entonces i_0 =0.

Finalmente, la transformación de las variables de estator a,b,c a las variables d,q,0 se puede presentar resumida en la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - 2\pi/3\right) & \cos\left(\theta + 2\pi/3\right) \\ -sen\theta & -sen\left(\theta - 2\pi/3\right) & -sen\left(\theta + 2\pi/3\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \tag{7.26}$$

La transformada inversa esta dada por:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 1 \\ \cos\left(\theta - 2\pi/3\right) & -sen\left(\theta - 2\pi/3\right) & 1 \\ \cos\left(\theta + 2\pi/3\right) & -sen\left(\theta + 2\pi/3\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \tag{7.27}$$

Al aplicar la transformación anterior a las ecuaciones previamente obtenidas para lo flujos del estator (ecuaciones (7.19) a (7.21)) se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_d &= -\left(L_0 + L_{0m} + \frac{3}{2} L_1 \right) i_d + L_{afd} \cdot i_{fd} + L_{akd} \cdot i_{kd} \\ \phi_q &= -\left(L_0 + L_{0m} - \frac{3}{2} L_1 \right) i_d + L_{akd} \cdot i_{kd} \\ \phi_0 &= -\left(L_0 - 2L_{0m} \right) \cdot i_0 \quad {}^{(4)} \end{aligned} \tag{7.28}$$

Definiendo una nueva inductancia:

$$\begin{aligned} L_d &= L_0 + L_{0m} + \frac{3}{2} L_1 \\ L_q &= L_0 + L_{0m} - \frac{3}{2} L_1 \\ L_0 &= L_0 - 2L_{0m} \end{aligned} \tag{7.29}$$

Con ello, las ecuaciones de flujo son:

$$\begin{aligned} \phi_d &= -L_d i_d + L_{afd} i_{fd} + L_{akd} i_{kd} \\ \phi_q &= -L_q i_q + L_{akq} i_{kq} \end{aligned} \tag{7.30}$$

(4) Esta igualdad es cero cuando el sistema esta balanceado

$$\phi_0 = -L_0 i_0$$

De manera similar es posible encontrar las ecuaciones para el flujo enlazado por el rotor expresados en función de las componentes d-q.

$$\begin{aligned}
\phi_{fd} &= L_{fd} i_{fd} + L_{fkd} i_{kd} - \frac{3}{2} L_{afd} i_d \\
\phi_{kd} &= L_{fkd} i_{fd} + L_{kd} i_{kd} - \frac{3}{2} L_{akd} i_d \\
\phi_{kq} &= L_{kq} i_{kq} - \frac{3}{2} L_{akq} i_q
\end{aligned} \qquad \textbf{(7.31)}$$

7.8.1. voltajes en el estator en términos de los ejes d-q

$$\begin{aligned}
e_d &= \frac{\partial \phi_d}{\partial t} - \phi_q \frac{\partial \theta}{\partial t} - R_a i_d \\
e_q &= \frac{\partial \phi_q}{\partial t} - \phi_d \frac{\partial \theta}{\partial t} - R_a i_q \\
e_0 &= \frac{\partial \phi_0}{\partial t} - R_a i_0
\end{aligned} \qquad \textbf{(7.32)}$$

7.8.2. Potencia y torque en términos de los ejes d-q

La potencia instantánea trifásica a la salida del estator es:

$$P_t = e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c \qquad \textbf{(7.33)}$$

Con ello:

$$P_t = \frac{3}{2}\left(e_d i_d + e_q i_q + e_0 i_0\right) \qquad \textbf{(7.34)}$$

En condiciones de equilibrio, se cumple que $e_0 = i_0 = 0$ obteniendo la siguiente expresión para la potencia eléctrica cuando se trata de un sistema equilibrado.

$$P_t = \frac{3}{2}\left(e_d i_d + e_q i_q\right) \qquad \textbf{(7.35)}$$

El torque electromagnético se puede determinar considerando las acciones de las fuerzas en los conductores producto del flujo por la corriente.

Considerando las ecuaciones (7.32) que expresan los voltajes en términos de los flujos enlazados y las corrientes y la igualdad $\partial\theta/\partial t = \omega_r$ (velocidad de giro del rotor), la relación para que torque eléctrico es:

$$P_t = \frac{3}{2}\left[\left(i_d \frac{\partial \phi_d}{\partial t} + i_q \frac{\partial \phi_q}{\partial t} + 2i_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial t}\right) + \left(\phi_d i_d - \phi_q i_q\right)\omega_r - \left(i_d{}^2 + i_q{}^2 + 2i_0{}^2\right)R_a\right] \quad \textbf{(7.36)}$$

Donde conceptualmente:

$\left(i_d \frac{\partial \phi_d}{\partial t} + i_q \frac{\partial \phi_q}{\partial t} + 2i_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial t}\right)$ representa la tasa de variación de la energía magnética en la armadura

$\left(\phi_d i_d - \phi_q i_q\right)\omega_r$ corresponde a la potencia transferida a través del entre hierro

$\left(i_d{}^2 + i_q{}^2 + 2i_0{}^2\right)R_a$ representa las perdidas de potencia en la armadura

7.9. Circuito equivalente de la máquina sincrónica

La existencia de los ejes ficticios directo y en cuadratura permiten modelar eléctricamente las variables del estator a través de la resistencia del estator y las reactancias del eje directo y en cuadratura.

Particularmente, si el rotor es de polos salientes las reactancias en ambos ejes son diferentes y su cálculo supone un desarrollo complejo como el presentado precedentemente. En el rotor cilíndrico, sin embargo, se define una única reactancia: $X_s=X_d=X_q$ por lo cual es posible establecer un circuito como el de la figura 7.13.

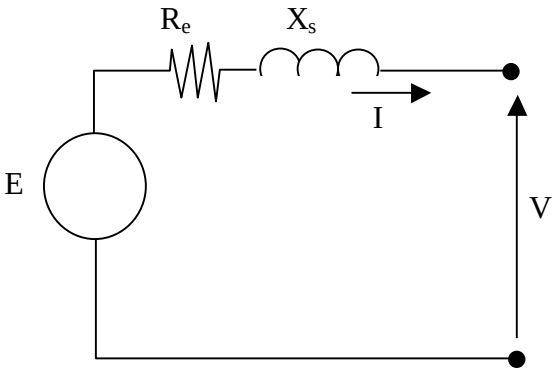

Figura 7.13. Circuito equivalente por fase de la máquina sincrónica.

A partir de la figura se define:

$$E = L^{er} \cdot I_r \cdot \omega \cdot sen(\omega t)$$
$$L^{er} = \frac{N_e \cdot N_r}{R} \qquad \textbf{(7.37)}$$

Donde:
E es la tensión inducida de la máquina
R_e es la resistencia en los enrollados del estator.
L^{er} es la inductancia mutua entre rotor y estator.
N_e, N_r son el número de vueltas de los enrollados de estator y rotor respectivamente.
R es la reluctancia del circuito magnético.
I_r es la corriente rotórica (de excitación).

En el caso de la máquina operando como generador se tiene:

$$\vec{E} = R_e \cdot \vec{I} + j \cdot X_s \cdot \vec{I} + \vec{V} \qquad \textbf{(7.38)}$$

El diagrama fasorial correspondiente se muestra en la figura 7.14.

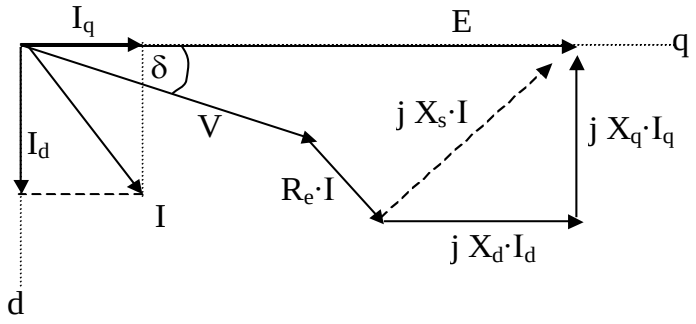

Figura 7.14. Diagrama fasorial de una máquina sincrónica operando como generador.

En la figura δ representa el ángulo de torque, es decir, el ángulo entre las fuerzas magnetomotrices del estator y rotor.

En el caso de la operación como motor se tiene:

$$\vec{V} = R_e \cdot \vec{I} + j \cdot X_s \cdot \vec{I} + \vec{E} \qquad \textbf{(7.39)}$$

El diagrama fasorial correspondiente se muestra en la figura 7.15.

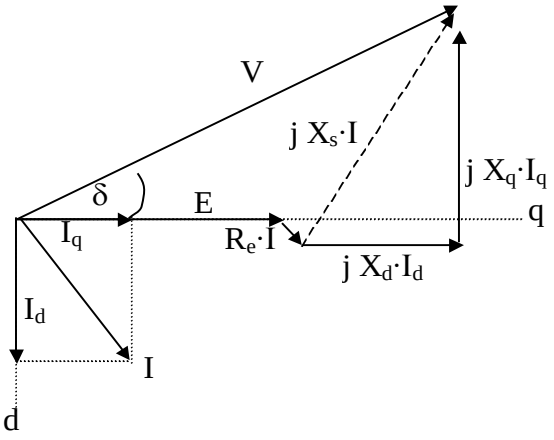

Figura 7.15. Diagrama fasorial de una máquina sincrónica operando como motor.

La expresión para la potencia eléctrica generada por fase (caso de operación como generador) es (R_e se desprecia):

$$P = V \cdot I \cdot \cos(\varphi) = \frac{E \cdot V}{X_s} sen\delta \qquad \textbf{(7.40)}$$

La ecuación (7.40)muestra que la potencia activa inyectada a la red depende por una parte del ángulo entre las fuerzas magnetomotrices y principalmente de la tensión inducida "E" la cual es controlable a través de la corriente de excitación.

Si se consideran los reactivos inyectados o absorbidos de la red se tienen:

$$Q = V \cdot I \cdot sen(\varphi) = \frac{E \cdot V}{X_s} \cos\delta - \frac{V^2}{X_s} \tag{7.41}$$

En el caso del torque generado en la operación como motor se tiene que cada fase aporta con:

$$T = \frac{V \cdot I}{\omega} \cdot \cos(\varphi) = \frac{E \cdot V}{\omega X_s} sen\delta \tag{7.42}$$

En el caso de una máquina con rotor de polos salientes, las ecuaciones (7.40), (7.41) se convierten en:

$$\begin{aligned} P &= \frac{E \cdot V}{X_d} sen(\delta) + \frac{X_d - X_q}{2X_d \cdot X_q} \cdot V^2 sen(2\delta) \\ Q &= \frac{E \cdot V}{X_d} \cos(\delta) - V^2 \left(\frac{\cos^2(\delta)}{X_d} + \frac{sen^2(\delta)}{X_q} \right) \end{aligned} \tag{7.43}$$