Pauta Auxiliar 3

Miércoles 30 de Marzo de 2011

Problema 1

1. **Variables de decision:**

$$\begin{aligned} x_i &: \text{ 1 si instalo centro en ubicacion i, 0 si no.} \\ y_{ij} &: \text{ 1 si envío productos de centro i a cliente j, 0 si no.} \\ f_{ij} &: \text{ Cantidad de productos a enviar desde i hasta j.} \end{aligned}$$

Función Objetivo:

$$\min \sum_{i,j} d_{ij} y_{ij}$$

Restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_i x_i &= D \\ \sum_i f_{ij} &\geq Q_j \quad \forall j \\ \sum_j f_{ij} &\leq K \quad \forall i \\ f_{ij} &\leq K \cdot y_{ij} \quad \forall i,j \\ y_{ij} &\leq x_i \quad \forall i,j \\ x_i, y_{ij} &\in \{0,1\} \quad \forall i,j \\ f_{ij} &\geq 0 \quad \forall i,j \end{aligned}$$

La primera restricción obliga a instalar D centros. La segunda es para satisfacer la demanda. La tercera para respetar capacidades. La cuarta y quinta relacionan las variables ("sólo envío productos si es que decido enviar productos" "sólo envío productos de i a j si construí centro en i"). El resto es la naturaleza de las variables.
Recuerden que un problema se puede modelar de varias formas, no es la única solución.

2. Aquí nos obligan a relajar la restricción que relaciona variables continuas con enteras (restricción 4). De todas formas, en la clase vimos que tiene sentido relajar esta restricción. Sea $\mu_{ij} \in \mathbb{R}^+$, entonces:

$$\min \sum_{i,j} d_{ij} y_{ij} + \sum_{i,j} \mu_{ij} \cdot (f_{ij} - K y_{ij})$$

$$
\begin{array}{rcl}
\sum_i x_i & = & D \\
\sum_i f_{ij} & \geq & Q_j \qquad \forall j \\
\sum_j f_{ij} & \leq & K \qquad \forall i \\
y_{ij} & \leq & x_i \qquad \forall i,j \\
x_i, y_{ij} & \in & \{0,1\} \qquad \forall i,j \\
f_{ij}, \mu_{ij} & \geq & 0 \qquad \forall i,j
\end{array}
$$

Para un μ dado, este es un problema en que las variables continuas y discretas ya no están relacionadas. Notemos que podemos construir 2 subproblemas:

$$
\min \sum_{i,j} \mu_{ij} \cdot f_{ij}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\sum_i f_{ij} & \geq & Q_j \qquad \forall j \\
\sum_j f_{ij} & \leq & K \qquad \forall i \\
f_{ij}, & \geq & 0 \qquad \forall i,j
\end{array}
$$

y el otro subproblema queda:

$$
\min \sum_{i,j} (d_{ij} - \mu_{ij} K) y_{ij}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\sum_i x_i & = & D \\
y_{ij} & \leq & x_i \qquad \forall i,j \\
x_i, y_{ij} & \in & \{0,1\} \qquad \forall i,j
\end{array}
$$

El primero se puede resolver fácilmente. En cambio, el segundo es más complejo. Un método para encontrar el óptimo de este subproblema se presenta a continuación:

- Calcular $\nu_i = \sum_{j \in S_i} (d_{ij} - \mu_{ij} K)$, donde $S_i = \{j | d_i j - K * ij < 0\}$ (en palabras, calculamos un vector ν_i para cada cliente, que consiste de la suma de todos los costos del problema, pero solo si dichos costos son negativos.
- Hacemos $x_i = 1$ para los D menores valores del vector ν_i, es decir, para los D valores más negativos, pues son los que más aportan a mi problema de minimización. Es posible que construya un centro (o varios) en ubicaciones donde los costos son cero y mediante el cuál quizás no atienda a ningún cliente, pero ahí no hay nada que hacer. la restricción me obliga a construir exactamente D centros.
- Si $x_i = 1$, hacemos $y_i j = 1$ para todo j tal que $j \in S_i$.

Ojo que con este método no estamos garantizando que el punto es factible en el problema original, simplemente estamos explicando como llegar al óptimo del subproblema que era lo que se pedía.

3. EN CLASE

4. La solución con $\mu = 0$ es $x_1 = x_2 = 1$ y $x_3 = 0$ con $y_{ij} = 0$ para todo i,j, ya que todos los coeficientes que acompañan a estas variables en la función objetivo son positivos. Notar que pudimos elegir otras variables x_i como 1 ó 0, lo importante es que la suma nos dé 2 como dice la restricción.

   Para la parte del problema con f, cualquier valor de f es óptimo, ya que la función objetivo es cero. Por ejemplo: $f_{11} = 30$, $f_{12} = 20$ y $f_{23} = 25$ con el resto en cero es factible y, por ende, óptima.

   Para actualizar los multiplicadores, se debe hacer:

   $$\mu'_{ij} = \mu_{ij} + \theta(f_{ij} - Ky_{ij})$$

   que en este caso corresponde a:

   $$\mu'_{ij} = 0 + (30, 20, 0, 0, 0, 25, 0, 0, 0) * 1/2$$

   (ojo, esto es un vector recuerden que hay un μ para cada par (i,j).

5. Recordando que el lagrangeano nos entrega una cota inferior (en el caso de un problema de minimización) al problema original, basta con decir que el óptimo del problema de la parte 3 es una cota inferior.

   Para encontrar una cota superior, simplemente debemos encontrar una solución factible del problema original. Dado que es un problema de minimización, cualquier solución factible representa una cota superior, a menos que justo encontremos el óptimo del problema al ojo. Por ejemplo, si seteamos $y_{11} = y_{12} = y_{23} = 1$ para que $f_{ij} \leq K \cdot y_{ij}$ sea factible, entonces podemos setear $x_1 = x_2 = 1$ y dejar $x_3 = 0$. La solución f,x,y así definida es factible y tiene valor en la función objetivo original igual a 30, que es una cota superior.