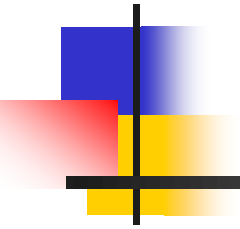


Logística y Producción

Capítulo 2: Configuración de Redes Logísticas (3)

Métodos Heurísticos

- Búsqueda Tabú:
  - 0. Solución factible.
  - 1. Moverse al mejor vecino (aunque sea peor):
    - Definir vecino: cambio mínimo de solución.
      - Ejemplo: abrir o cerrar una planta.
    - Condición: debe haber camino de la solución actual al óptimo.
  - 2. Lista Tabú:
    - No repetir soluciones.
      - Ejemplo: Si se abre una planta, no cerrarla por t iteraciones salvo que la función objetivo de la solución sea mejor que el incumbente.

Métodos Heurísticos

- 3. Diversificación e Intensificación:
  - Diversificación: partir de otra solución factible o hacer cambios que no han sido elegidos.
  - Intensificación: quedarse en la cercanía de buenas soluciones, con cambios locales.
  - Generan buenos resultados.
- 4. Termino:
  - Terminar después de N iteraciones o cuando no haya mejora.

Métodos Heurísticos

- Simulated Annealing:
  - Sea Δ la variación de la función objetivo al moverse a S^1, un vecino de S.
    - Si $\Delta \leq 0$, moverse a S^1.
    - Si $\Delta > 0$, moverse a S^1 si $e^{-(\Delta/KT)} \geq \theta$. Donde θ es un número aleatorio uniformemente distribuido en [0,1] y T es un parámetro de control (la temperatura).

      Típicamente T se va bajando durante a las iteraciones, reduciendo la probabilidad de aceptar peores soluciones. Se puede subir T en el proceso, como diversificación si no aparecen mejores soluciones, para salir de óptimos locales.
  - Permite obtener buenos resultados.

Métodos Heurísticos

- Problema de Localización con Búsqueda Tabú:
  - Se deben definir vecinos:
    - Abrir una planta.
    - Cerrar una planta.
    - Intercambio: una planta se abre y otra se cierra.
  - Lista Tabú:
    - Una planta abierta (cerrada) no se puede cerrar (abrir) por T iteraciones.
  - Diversificación e Intensificación:
    - Diversificación: Partir con soluciones significativamente diferentes o abrir plantas que han aparecido poco.
    - Intensificación: buscar soluciones similares a aquellas con buen costo.

Métodos Heurísticos

- Ejemplo 1:
  - Ocho posibles plantas $x_1 = \ x_3 = \ x_8 = 1$, y los clientes se asignan a la planta más cercana.
  - Se prueban soluciones vecinas:
    - Hacer x_2 o x_4 o x_5 *o* x_6 *o* x_7=1.
    - Hacer x_1 o x_3 o x_8 = 0, esto puede llevar a configuraciones infactibles al no haber capacidad suficiente.
    - Hacer intercambios, por ejemplo abrir 2 y cerrar 1.
    - Ver todas las combinaciones es muy largo.

    En cada caso reasignar clientes y elegir el mejor vecino. Si el número de vecinos es muy alto se puede mirar sólo un subconjunto. Este subconjunto se puede determinar aleatoriamente o según un esquema definido.

Métodos Heurísticos

- La elección de vecinos debe ser tal que desde cualquier solución se puede llegar al óptimo a través de una cadena de éstos.
- Se puede elegir pasar a soluciones infactibles en el algoritmo, siempre que cada cierto número de iteraciones se vuelva a la factibilidad. Se penalizan las infactibilidades.
- El algoritmo termina después de un número máximo de iteraciones, y se elige la mejor solución obtenida en el proceso. También termina si no se producen mejoras en un número determinado de iteraciones, a pesar de diversificaciones.

Métodos Heurísticos

- Ejemplo 2:
  - 5 plantas potenciales, sin restricciones de capacidad.
  - 10 clientes.
  - Variables:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se abre planta } i. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente } j \text{ se abastece desde la planta } i. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

  - Parámetros:

$F_i = \text{costo fijo de la planta } i.$

$c_{ij} = \text{costo de abastecer al cliente } j \text{ desde la planta } i$

Métodos Heurísticos

- Modelo:

$$Min \;\; z = \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}$$

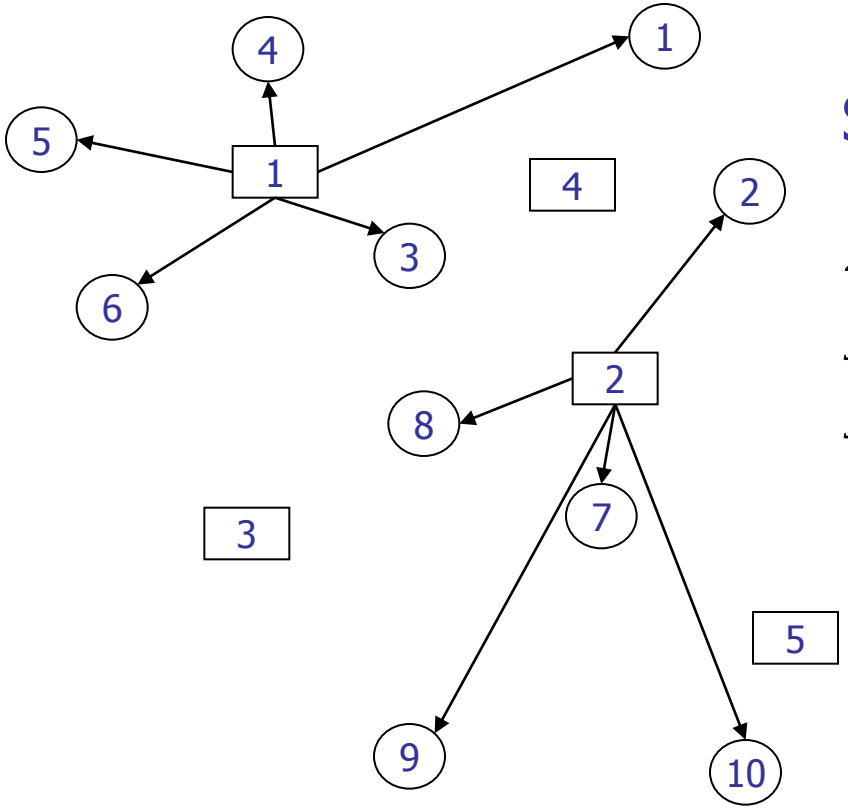
$$sa \qquad \sum_i y_{ij} = 1 \qquad j = 1,\ldots,10.$$

$$y_{ij} \le x_i \qquad i = 1,\ldots,5 \qquad j = 1,\ldots,10.$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

$$y_{ij} \ge 0$$

Métodos Heurísticos



Solución Inicial

$$x_1 = x_2 = 1$$

$$y_{11} = y_{13} = y_{14} = y_{15} = y_{16} = 1$$

$$y_{22} = y_{27} = y_{28} = y_{29} = y_{210} = 1$$

Métodos Heurísticos

- Posibles vecinos:
  - Ingresar una planta. Por ejemplo, hacer $x_5 = 1$.

    Al abrir la planta 5, se ve que algunos clientes quedan más cerca de ésta que de las otras. Sean éstos los clientes 9 y 10. Luego, considerando el costo de la solución anterior,

    $$F_1 + F_2 + c_{11} + c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16} + c_{22} + c_{27} + c_{28} + c_{29} + c_{210}$$

    el cambio se evalúa como:

    $$\Delta(+5) = \underbrace{F_5}_{\text{CostoPlanta}} - \underbrace{[(c_{29} - c_{59}) + (c_{2,10} - c_{5,10})]}_{\text{Ahorrosen Transporte}}$$

    Análogamente, se pueden analizar los casos en que se abren las plantas 3 o 4, dando valores $\Delta(+3)$ y $\Delta(+4)$. Luego se ve cuál es el menor, por ejemplo $\Delta(+5)$.

Métodos Heurísticos

- Cerrar una planta. Por ejemplo, hacer $x_1 = 0$.

  El cierre de la planta 1 se evalúa de la siguiente manera:

$$\Delta(-1) = \underbrace{-F_1}_{\text{Ahorro Costo Planta 1}} + \underbrace{[(c_{21} - c_{11}) + (c_{23} - c_{13}) + (c_{24} - c_{14}) + (c_{25} - c_{15}) + (c_{26} - c_{16})]}_{\text{Aumento en los Costos de Transporte}}$$

  Análogamente, se calcula $\Delta(-2)$. Luego se ve cuál es el valor mínimo, por ejemplo $\Delta(-1)$.

Métodos Heurísticos

- Intercambiar dos plantas. Por ejemplo, hacer $x_5 = 1$ y $x_2 = 0$.

  Para abrir la planta 5 y cerrar la planta 2, se ve como reasignar clientes minimizando los costos de transporte. Supongamos que los clientes 7, 8, 9 y 10 quedan asignados a la planta 5. De esta manera, el cambio ocurrido se evalúa como:

$$\Delta(+5,-2) = \underbrace{F_5 - F_2}_{\text{Diferencia en los Costos de las Plantas}} + \underbrace{[(c_{57} - c_{27}) + (c_{58} - c_{28}) + (c_{59} - c_{29}) + (c_{5,10} - c_{2,10}) + (c_{12} - c_{22})]}_{\text{Cambio de Costos de Transporte al pasar clientes 7, 8, 9 y 10 a la planta 5, y cliente 2 a la planta 1.}}$$

  Análogamente, se analizan todos los otros intercambios. Luego se elige el mínimo, por ejemplo $\Delta(+5,-2)$.

Métodos Heurísticos

En forma posterior a todo lo anterior, se elige el mínimo entre $\{\Delta(+5), \Delta(-2), \Delta(+5,-2)\}$ como la movida a hacer.

Supongamos que el mínimo es $\Delta(+5,-2)$, entonces se ponen nodos 5 y 2 en la Lista Tabú, y no se saca el nodo 5 o agrega el nodo 2 por T iteraciones.

- Notas:
  - Probar cada vecino resulta ser muy fácil (por aritmética). Sin embargo, en algunos casos puede ser muy difícil (por ejemplo, un PL).
    Se pueden hacer aproximaciones heurísticas.
  - Si existen muchos vecinos probar sólo un subconjunto de éstos.

Ramificación y Acotamiento

- Introducción:
  - En muchos casos la enumeración explícita de las soluciones factibles de un problema entero es impracticable debido a que son muchas. Pero, en algunos casos no queda opción.

    $\Rightarrow$ ¿Es posible enumerar las soluciones en forma "inteligente"?
  - Este tipo de algoritmos intentan una enumeración parcial, llamada enumeración implícita, eliminando aquellas soluciones que puedan probarse no óptimas.

Ramificación y Acotamiento

- Concepto:
  - Ramificación: proceso de generar subproblemas de menor tamaño, dividiendo el conjunto factible.
  - Acotamiento: proceso que por medio del análisis de las soluciones obtenidas para los subproblemas establece si es posible obtener mejores soluciones dividiendo nuevamente algún subproblema.

Ramificación y Acotamiento

$$Min \;\; z = c^t x$$
$$sa \quad Ax \le b$$
$$x_j \in N$$

$$(P_0) \;\; z_0 = c^t x \quad s.a. \quad x \in R_0$$
$$R_0 = \{x : Ax \le b, x_j \ge 0 \; \forall j\}$$

$$(P_0^+) \;\; z_0^+ = c^t x \quad s.a. \quad x \in R_0^+ \qquad (P_0^-) \;\; z_0^- = c^t x \quad s.a. \quad x \in R_0^-$$
$$R_0^+ = R_0 \cap \{x : x_k \ge [x_k^0] + 1\} \qquad R_0^- = R_0 \cap \{x : x_k \le [x_k^0]\}$$

Ramificación

$[x_k^0]$ denota la parte entera de x_k^0.

Ramificación y Acotamiento

- Características:
  - De la manera descrita anteriormente es posible construir un árbol en el cual de cada nodo derivan dos ramas.
  - En las ramas finales estarían todas las soluciones factibles o posibles.
  - Cuando un nodo del árbol no requiere más ramificaciones se "poda" esa rama.

Ramificación y Acotamiento

- Razones para no ramificar:
  - El problema en el nodo resulta infactible.
  - La solución en el nodo es factible para el problema entero.
  - El valor óptimo z del nodo es tal que $z \geq z'$, donde z' es el incumbente o mejor solución entera conocida.

Ramificación y Acotamiento

- Algoritmo:
  - 0. L = $\{P_0\}$, $z' = +\infty$.
  - 1. Escoger un problema (nodo) de la lista L (problemas candidatos). Sea (P) el problema seleccionado.
    - Si L = ϕ, TERMINAR con las siguientes conclusiones:
      - Si $z' = +\infty$, entonces el problema entero es infactible.
      - Si $z' \neq +\infty$, la solución de éste es (x', z').
    - Si L $\neq \phi$, resolver el problema (P).
      - Si (P) es infactible, eliminarlo de la lista L (ir a 1).

Ramificación y Acotamiento

- Si (P) es factible, sea z* el valor óptimo y x* una solución óptima.
  - Si $z^* \geq z'$ eliminar el problema (P) de la lista e ir a 1.
  - Si $z^* < z'$ y x* cumple la condición de integralidad, entonces actualizar el valor del incumbente: $z' \leftarrow z^*$ y $x' \leftarrow x^*$, eliminar el problema (P) de la lista e ir a 1.
  - Si $z^* < z'$ y x* no cumple la condición de integralidad, considere $x_k^* \notin N$. Ramificar el problema (P) en (P^+) y (P^-). Estos se construyen agregando $x_k \leq [x_k^*]$ y $x_k \geq [x_k^*] + 1$ al problema (P), respectivamente. Ambos problemas se agregan a la lista L, $L \leftarrow L \cup \{P^-, P^+\}$. Ir a 1.

Ramificación y Acotamiento

- Algunas Etapas con más detalle:
  - ¿Cuál variable elegir para la ramificación?
    - Una buena regla es darle prioridad a aquellas variables con mayor contribución a la función objetivo.
  - De todos los nodos que pueden ser ramificados, ¿cuál elegir?:
    - Una posibilidad es ir llenando los niveles del árbol de problemas, en orden.
    - Otra es explorar en profundidad, eligiendo nodos que derivan de los recién ramificados.
    - Una tercera posibilidad es escoger entre todos los problemas candidatos aquel que tiene mejor valor de la función objetivo.

Ramificación y Acotamiento

- Uso de una buena cota superior:
  - Si al comenzar se contara con alguna solución entera factible, se podría utilizar su valor como incumbente y así eliminar ramas desde un comienzo.
- Resolución eficiente de los subproblemas:
  - El algoritmo Simplex Dual puede ser utilizado para reoptimizar a partir de la solución del nodo padre.

Ramificación y Acotamiento

- Problemas con variables binarias:
  - Si las variables son todas binarias no es necesario agregar restricciones a los subproblemas, es suficiente fijar una variable fraccionaria en 0 ó 1.
  - El número máximo de subproblemas que hay que examinar es $O(2^n)$ para un problema con n variables.
  - La relajación lineal se obtiene reemplazando $x_j \in \{0,1\}$ por $0 \leq x_j \leq 1$, para cada variable.

Ramificación y Acotamiento

- Ejemplo:

$$Max \;\; z = 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

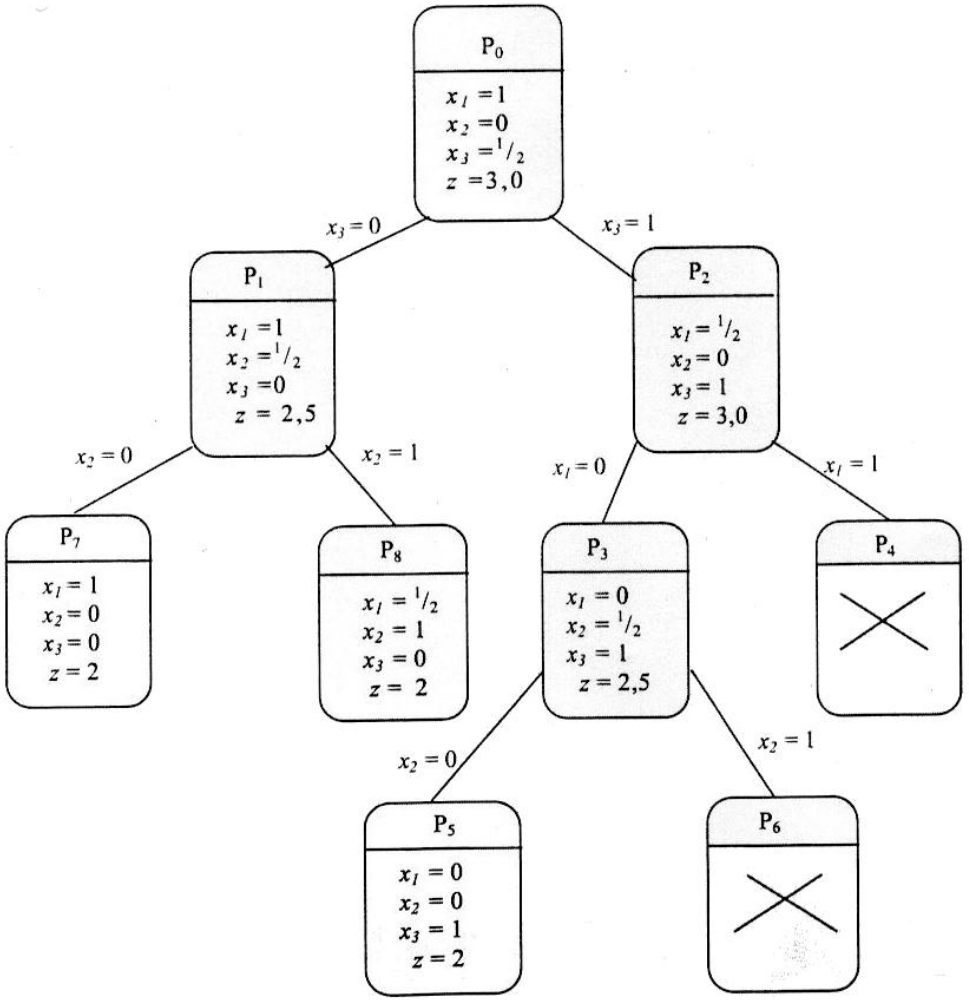
$$sa$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$$

Problema de Programación Lineal Entera

Ramificación y Acotamiento