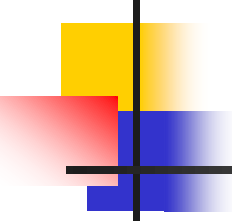


Logística y Producción

IN70L-CI5311 2011

Capítulo 2: Configuración de Redes Logísticas (2)



Problemas Clásicos

- Sin capacidades:

- Decisiones:

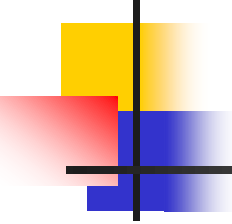
$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se abre planta } i. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

y_{ij} = fracción de la demanda del cliente j que satisface planta i .

- Parámetros:

a_i = costo de abrir la planta i .

b_{ij} = costo de cubrir demanda del cliente j desde planta i
(producción en planta i + transporte).



Problemas Clásicos

- Restricciones:

- Satisfacción de la demanda de los clientes:

$$\sum_i y_{ij} = 1 \quad \forall j$$

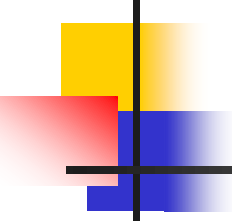
- Producción exige la construcción de plantas:

$$a) \quad y_{ij} \leq x_i \quad \forall i, j. \quad 0$$

$$b) \quad \sum y_{ij} \leq Mx_i \quad \forall i, M : \text{número de clientes.}$$

La formulación (a) lleva a más restricciones, pero es más fuerte (tight) $\Rightarrow$ soluciones menos fraccionarias.

En (b), si un 30% de los clientes usan planta i , $x_i = 0,3$.



Problemas Clásicos

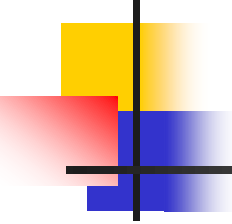
- Naturaleza de las variables:

$$x_i \in \{0,1\}$$

$$y_{ij} \geq 0$$

- Función Objetivo:

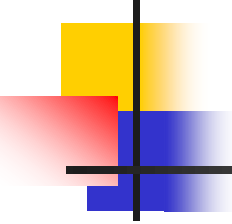
$$\text{Min} \quad \sum_i a_i x_i + \sum_i \sum_j b_{ij} y_{ij}$$



Problemas Clásicos

- Heurística de Redondeo:
 - Consiste en resolver el problema relajando $x_i \in \{0,1\}$, imponiendo $0 \leq x_i \leq 1$.
 - Luego se tendrá (modelo más general):

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij} \\ \text{sa } \sum_i y_{ij} &= 1 \quad \forall j \\ y_{ij} &\leq x_i \quad \forall i. \end{aligned}$$

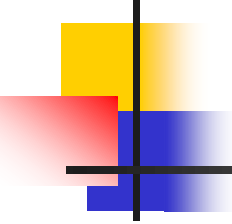


Problemas Clásicos

$$0 \leq y_{ij} \leq 1$$

$$0 \leq x_i \leq 1$$

- En la solución (x,y) tomar las variables x_i con valores fraccionarios y buscar redondeos adecuados en forma heurística.
- Forma Sencilla:
 - Los x_i fraccionarios corresponden a situaciones en las que por costo de transporte conviene abrir fracciones de planta.
 - Una vez fijadas las localizaciones y queda un problema lineal sencillo en los flujos.



Problemas Clásicos

- Ejemplo:
 - Dos plantas y dos clientes.
 - Capacidad de las plantas: $C_1 = C_2 = 1000$.
 - Demanda de los clientes: $q_1 = q_2 = 500$.
 - Costos de transporte: $c_{11} = c_{22} = 2$ y $c_{12} = c_{21} = 10$.
 - Costos de construcción: $F_1 = 10.000$ y $F_2 = 12.000$.

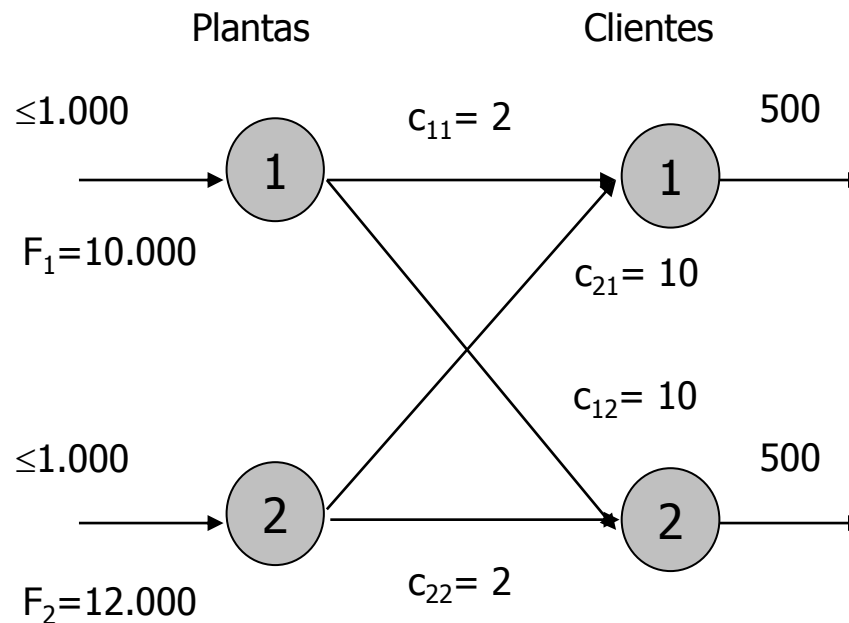
Solución entera $x_1 = 1, x_2 = 0, y_{11} = y_{12} = 500$ y $z = 16.000$.

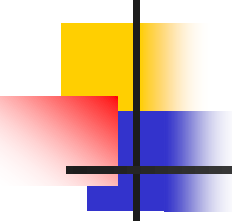
Solución fraccionaria $x_1 = 0.5, x_2 = 0.5, y_{11} = y_{22} = 500$ y $z = 13.000$.

En forma heurística se debe trasladar la producción de las plantas más caras a las más baratas, para de esta manera hacer los valores 0 y 1 respectivamente.

Problemas Clásicos

Ejemplo:





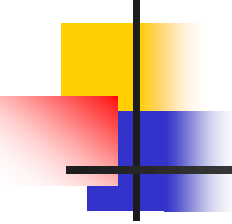
Problemas Clásicos

- Para estos esquemas, se fijan algunas variables en 0 y otras en 1 y se resuelve nuevamente el problema lineal. Después de varias iteraciones se termina fijando todas las variables en 0 y 1.

Cota de la solución: la solución de la primera relajación lineal.

- Otra alternativa:

- Fortalecer la formulación inicial, es decir, agregar restricciones que son satisfechas por el problema entero pero no por una solución lineal (que se aproximen a facetas del poliedro del problema entero).



Problemas Clásicos

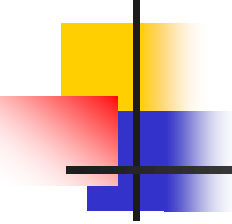
Si se parte con

$$\sum_j y_{ij} \leq Mx_i \quad \forall i.$$

y se agregan las restricciones

$$y_{ij} \leq x_i \quad \forall i, j$$

se fortalece la formulación, es decir, se hace más difícil que los x_i tomen valores fraccionarios.



Problemas Clásicos

- Ejemplo:

Se considera $M=10$ y la siguiente solución de flujos:

$$y_{i1} = 0.6$$

$$y_{i2} = 0.84$$

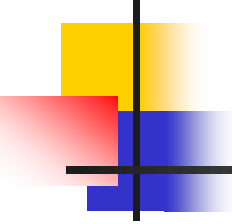
$$y_{i3} = 0.16$$

$$y_{ij} = 0 \quad \forall i, j \text{ restantes.}$$

La solución continua que satisface

$$\sum_j y_{ij} \leq 10x_i \quad \forall i. \quad \text{lleva a que } x_i = 0.16, \text{ pero}$$

agregar $y_{i1} \leq x_i, y_{i2} \leq x_i \wedge y_{i3} \leq x_i$ lleva a $x_i = 0.84$.



Problemas Clásicos

- Con Capacidad:

$$\text{Min } z = \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}$$

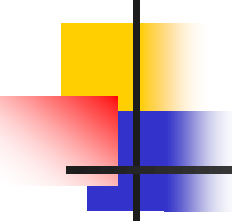
$$\text{sa} \quad \sum_i y_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$\sum_j q_j y_{ij} \leq Q_i x_i \quad \forall i.$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

$$y_{ij} \geq 0$$

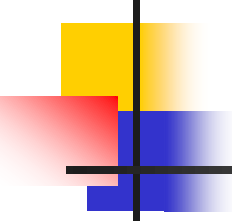
Donde Q_i es la capacidad de la planta i y q_j es la demanda del cliente j .



Problemas Clásicos

- Notas:

- Los costos definidos para transporte, producción e inventario, al evaluar decisiones de localización de más largo plazo, corresponden a aproximaciones teniendo en mente una forma de operación.
- El costo de producción unitario en planta considera un nivel de operación aproximado, que incluye escalas de producción (no es lo mismo operar en promedio al 20% que al 90% de la capacidad instalada) y el mix de productos (están implícitamente considerados los tiempos muertos por cambio de producción).
- El costo de inventario ya considera implícitamente una forma de llevarlo. Las cantidades ordenadas y los stocks de seguridad no se ven explícitamente en estos modelos.

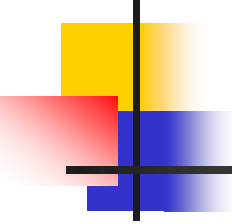


Problemas Clásicos

Por ejemplo, los parámetros de los costos de inventario llevan reflejados un nivel de servicio deseado. Más complejo aún, la solución influye en los costos por inventario, ya que un número mayor de bodegas lleva a un mayor stock de seguridad total (como se verá).

- En el caso del transporte también se asume, para los costos unitarios, una forma de transporte que podría incluso depender de la solución. Por ejemplo, si hay pocas bodegas se tienen más fácilmente camiones llenos.

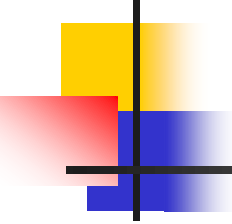
⇒ En este esquema, dada una solución de localización de largo plazo, debe chequearse al nivel operacional para comprobar que los parámetros de costos son consistentes en los dos niveles.



Relajación Lagrangeana

- Notación:

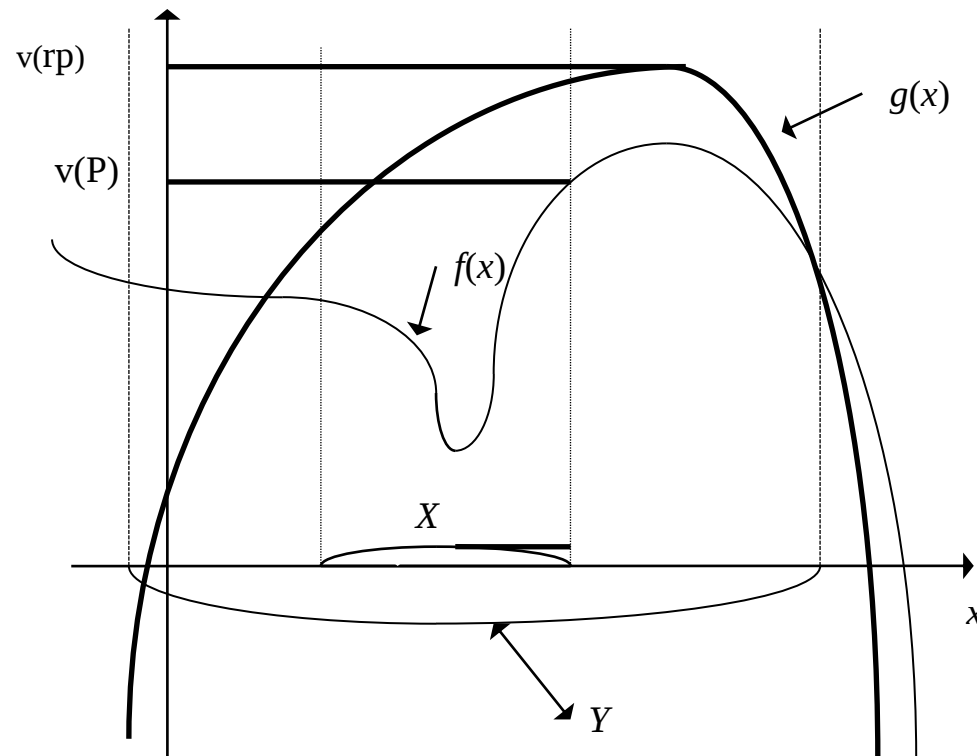
- (P) problema de optimización.
- $FS(P)$ conjunto de soluciones factibles de (P) .
- $OS(P)$ conjunto de soluciones óptimas de (P) .
- $v(P)$ valor óptimo de (P) .
- Max maximización (problema) o máximo (valor).
- Min minimización (problema) o mínimo (valor).



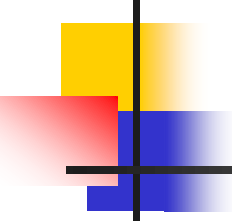
Relajación Lagrangeana

- Definición de relajación:
 - Considere los siguientes problemas:
(P) $\text{Max } \{ f(x) \mid x \in X \}$
(RP) $\text{Max } \{ g(x) \mid x \in Y \}$
 - (RP) es una relajación de (P) si:
 - $Y \supseteq X$, y
 - $\forall x \in X, g(x) \geq f(x)$.
- $\Rightarrow v(\text{RP}) \geq v(\text{P})$.

Relajación Lagrangeana



Relajación para Optimización



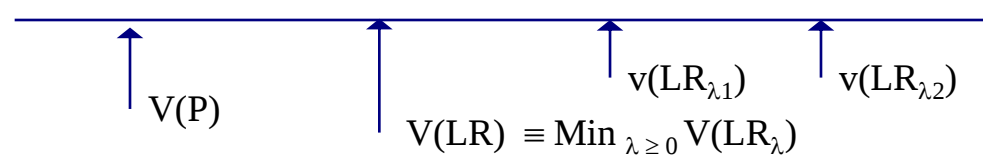
Relajación Lagrangeana

- Relajación Lagrangeana para Problemas Lineales Enteros (*Held and Karp 1970*):

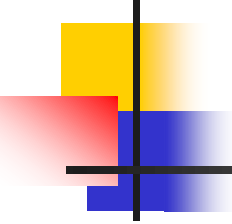
- Sea (P) $\text{Max}_x \{f x \mid Ax \leq b, Cx \leq d, x \in X\}$
 - Restricciones complicadas. (pointing to $Ax \leq b$)
 - Restricciones sencillas. (pointing to $Cx \leq d$)
 - Restricciones de integralidad. (pointing to $x \in X$)
- Si sabemos resolver $\text{Max}_x \{f x \mid Cx \leq d, x \in X\}$, se puede contruir una Relajación Lagrangeana de (P):
 - Sea $\lambda \geq 0$ un vector de multiplicadores, y sea (LR_λ) el siguiente problema $\text{Max}_x \{f x + \lambda(b - Ax) \mid Cx \leq d, x \in X\}$.

Relajación Lagrangeana

- (LR_λ) es una relajación de (P) :
 - $FS(LR_\lambda) \supseteq FS(P)$.
 - $\forall x \in FS(P), f^*x + \lambda(b - Ax) \geq f^*x$.
 - $\Rightarrow v(LR_\lambda) \geq v(P)$, para todo $\lambda \geq 0$.
- (LR) es Ilanado Dual Lagrangeano.



Representación Gráfica



Relajación Lagrangeana

- Interpretación Geométrica:

- El Dual Lagrangeano (LR) es equivalente a la relajación primal

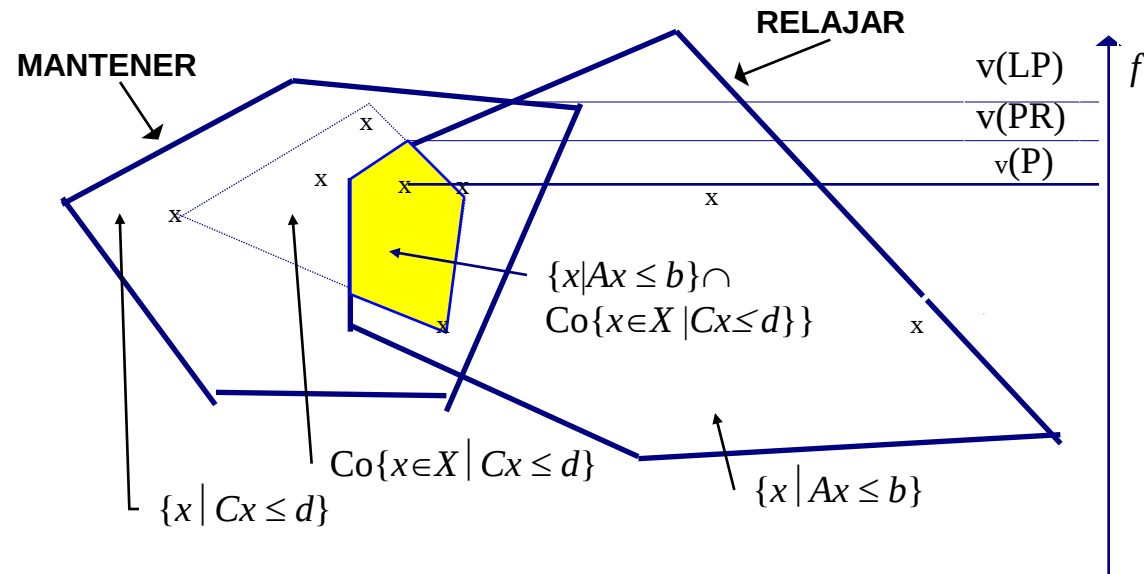
(PR) $\text{Max}_x \{fx \mid Ax \leq b, x \in \text{Co}\{x \in X \mid Cx \leq d\}\},$
es decir, $v(\text{LR}) = v(\text{PR})$.

(demostración basada en dualidad del LP)

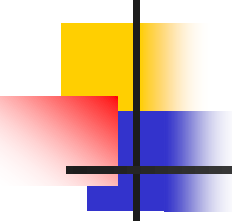
- Si $\text{Co}\{x \in X \mid Cx \leq d\} = \{x \mid Cx \leq d\}$, entonces $v(P) \leq v(\text{PR}) = v(\text{LR}) = v(\text{LP})$. Uno dice que (LR) tiene la Propiedad de Integralidad, y en este caso la cota de la Relajación Lagrangeana es igual a la cota del (LP).

Relajación Lagrangeana

- Si $\text{Co}\{x \in X \mid Cx \leq d\} \subset \{x \mid Cx \leq d\}$, entonces $v(P) \leq v(PR) = v(LR) \leq v(LP)$, y la cota de la Relajación Lagrangeana puede ser estrictamente mejor que la cota del (LP).



Representación Gráfica

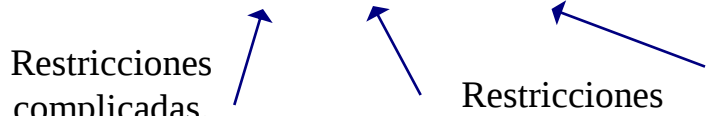


Relajación Lagrangeana

- Para el problema:

$$(P) \quad \text{Max}_x \{f x \mid Ax \leq b, Cx \leq d, x \in X\}$$

Restricciones complicadas. Restricciones sencillas. Restricciones de integralidad.

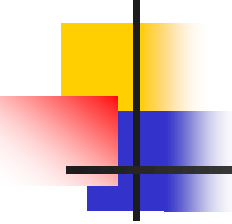


se construye una Relajación Lagrangeana

$$(LR_\lambda) \quad \text{Max}_x \{f x + \lambda(b - Ax) \mid Cx \leq d, x \in X\}$$

y el correspondiente Dual Lagrangeano

$$(LR) \quad \text{Min}_{\lambda \geq 0} v(LR_\lambda).$$



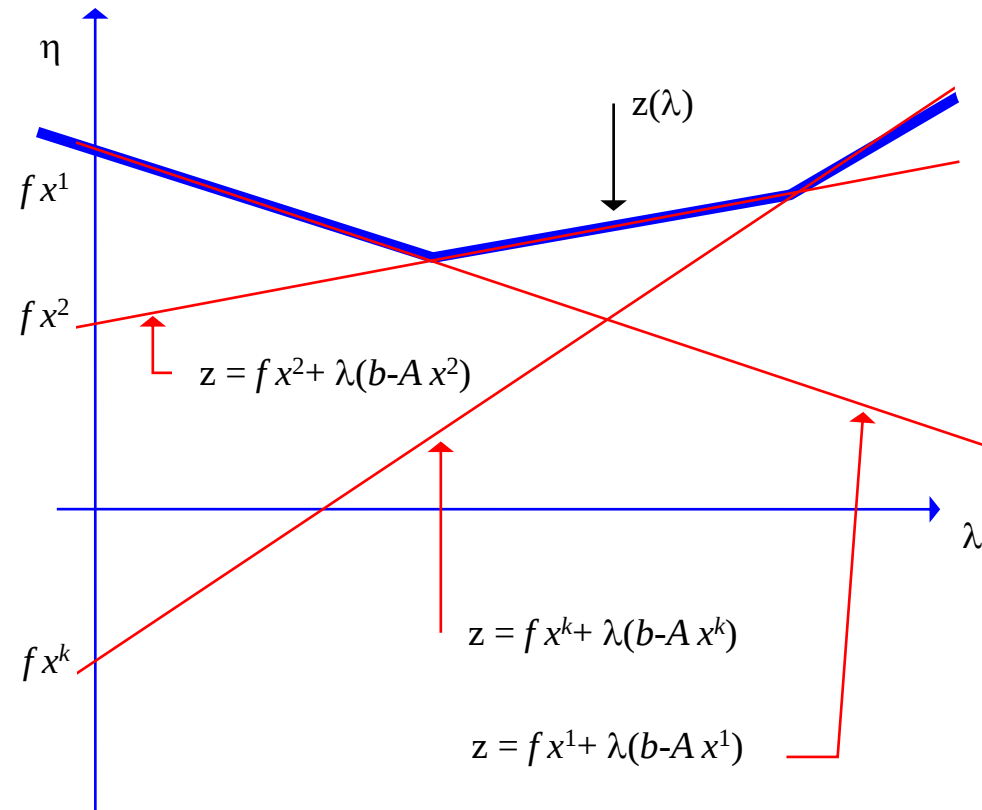
Relajación Lagrangeana

- De esta manera la Función Lagrangeana es $z(\lambda) = v(LR_\lambda)$, que corresponde a una función implícita de λ .

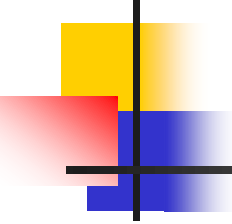
- Sea $\{ x \in X \mid Cx \leq d \} = \{ x^1, x^2, \dots, x^K \}$, entonces
$$\begin{aligned} (LR_\lambda) \text{ Max}_x \{ f x + \lambda(b - Ax) \mid Cx \leq d, x \in X \} \\ = \text{Max}_{k=1, \dots, K} \{ f x^k + \lambda(b - Ax^k) \} \end{aligned}$$

y $z(\lambda)$ es la envolvente superior de una familia de funciones lineales de λ , y por lo tanto una función convexa de λ .

Relajación Lagrangeana



Función Lagrangeana

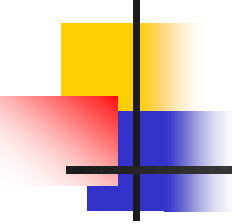


Relajación Lagrangeana

- (LR)
$$\begin{aligned} \text{Min}_{\lambda \geq 0} v(\text{LR}_\lambda) &= \text{Min}_{\lambda \geq 0} z(\lambda) \\ &= \text{Min}_{\lambda \geq 0} \text{Max}_{k=1, \dots, K} \{f x^k + \lambda(b - A x^k)\} \\ &= \text{Min}_{\lambda \geq 0, \eta} \{\eta \mid \eta \geq f x^k + \lambda(b - A x^k), k=1, \dots, K\} \end{aligned}$$

$v(\text{LR})$ corresponde al mínimo de una función lineal convexa por tramos, conocida solo implícitamente.

- Esta función $z(\lambda)$ tiene puntos de quiebre donde no es diferenciable. Sus conjuntos de nivel $C(\alpha) = \{\lambda \geq 0 \mid z(\lambda) \leq \alpha\}$, α escalar, son conjuntos poliedrales convexos.

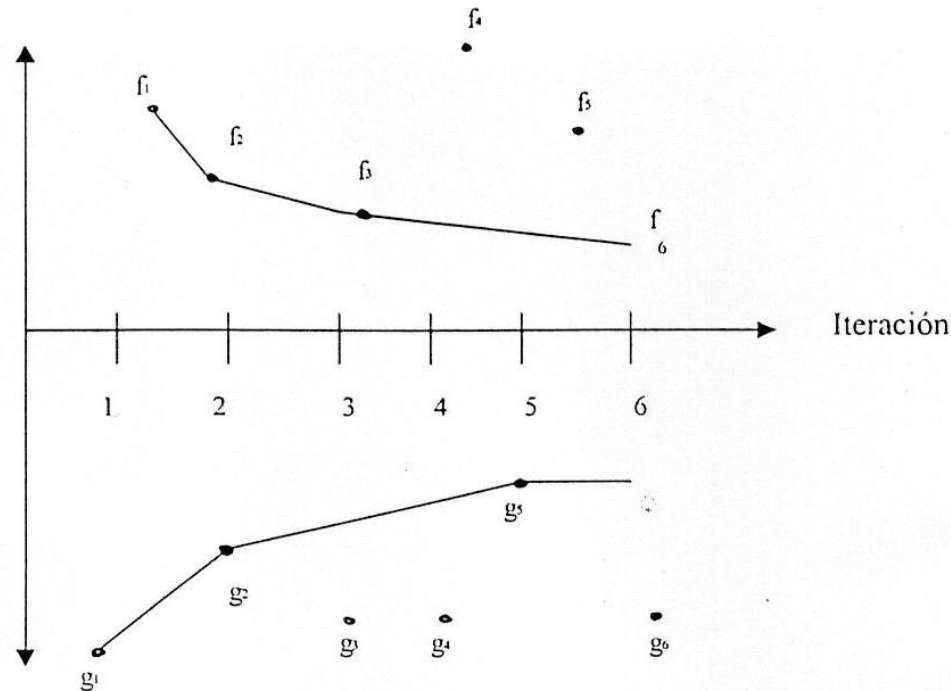


Relajación Lagrangeana

- Algoritmo:

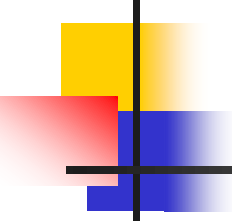
- Paso 0: Fijar valor de λ^0 .
 - Variables duales de la relajación lineal del problema.
- Paso 1: Dado λ^k , determinar x^k y $f^k = v(LR_{\lambda^k})$ de $(LR_{\lambda^k}) \text{ Max}_x \{f^k x + \lambda^k(b - Ax) \mid Cx \leq d, x \in X\}$.
- Paso 2: Con x^k , f^k y f^+ determinar λ^{k+1} , según la fórmula del subgradiente.
- Paso 3: Determinar una solución factible $\hat{x}^k$ y su valor $f(\hat{x}^k) = g^k$ con heurísticas.
- Paso 4:
 - Si $f^k - g^k < \varepsilon$, fin.
 - Si no, ir a Paso 1 con λ^{k+1} .

Relajación Lagrangeana



Representación Gráfica

Se toman las envolventes para determinar en cada iteración la mejor solución factible y cota. De esta manera se obtienen mejores valores de f^+ entre f y g .

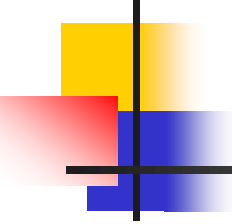


Relajación Lagrangeana

- Método del Subgradiente (*Held and Karp 1970*):
 - Sea una solución con λ^k tal que x^k es la solución óptima de (LR_{λ^k}) .
 - Sea $s^k = (b - Ax^k)$, f^k el valor de la función objetivo en la iteración k y f^+ una estimación del óptimo.
 - El próximo valor de λ estará dado por:

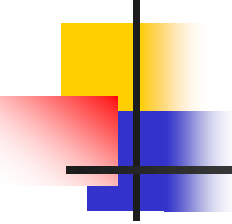
$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{s^k \cdot \varepsilon_k (f^+ - f^k)}{\|s^k\|^2}$$

donde ε es un parámetro en $[0,2]$.



Relajación Lagrangeana

- (LR_λ) da una cota para la solución del problema.
- Sea x una solución factible, entonces $f(x) - (LR_\lambda^k)$ da una cota de error (la diferencia entre una solución factible y una cota del óptimo).
- La solución lagrangeana si es factible, es la óptima. Si no, se deben utilizar heurísticas para encontrar una solución factible.



Relajación Lagrangeana

- Problema de Localización de Plantas sin Capacidad:

- Decisiones:

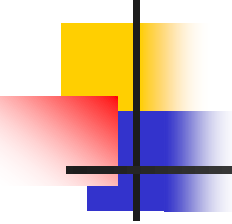
$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se abre planta } i. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

y_{ij} = fracción de la demanda del cliente j que satisface planta i .

- Parámetros:

f_i = costo de abrir la planta i .

c_{ij} = costo de cubrir demanda del cliente j desde planta i
(producción en planta i + transporte).



Relajación Lagrangeana

- Restricciones:

- Satisfacción de la demanda de los clientes:

$$\sum_i y_{ij} = 1 \quad \forall j \quad (1)$$

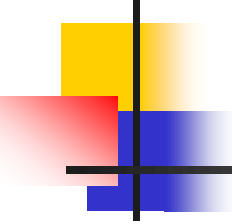
- Producción exige la construcción de plantas:

$$y_{ij} \leq x_i \quad \forall i, j \quad (2)$$

- Naturaleza de las variables:

$$x_i \in \{0,1\}$$

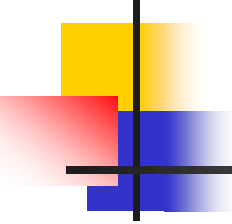
$$y_{ij} \geq 0$$



Relajación Lagrangeana

- Función Objetivo:

$$\text{Min} \quad \sum_i f_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}$$



Relajación Lagrangeana

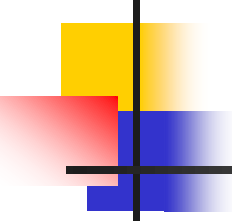
- Alternativa de resolución para el Problema de Localización Sin Capacidad:
 - Relajar restricción (2):

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \sum_i f_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij} + \sum_i \sum_j \lambda_{ij} (y_{ij} - x_i) \\ &= \sum_i \sum_j (c_{ij} + \lambda_{ij}) y_{ij} + \sum_i (f_i - \sum_j \lambda_{ij}) x_i \\ \text{sa } \sum_i y_{ij} &= 1 \quad \forall j \quad (1) \end{aligned}$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

$$y_{ij} \geq 0$$

Nota: Para $\lambda_{ij} \geq 0$ se escribe $y_{ij} - x_i \geq 0$ en Minimización.



Relajación Lagrangeana

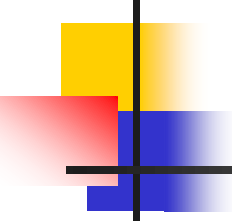
- La solución es trivial:
 - Cada cliente se abastece de la planta con menor costo $(c_{ij} + \lambda_{ij})$ para y_{ij} , dado que no hay restricciones sobre las variables x_i .
 - Para determinar las plantas que se abren se procede de la siguiente manera:

$$x_i = 1 \quad \text{si} \quad (f_i - \sum_j \lambda_{ij}) < 0.$$

$$x_i = 0 \quad \text{si} \quad (f_i - \sum_j \lambda_{ij}) \geq 0.$$

Nota: La solución no necesariamente es factible. Pueden haber $y_{ij} > 0$ con $x_i = 0$.

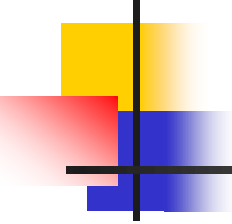
- Lo anterior da una solución (x^k, y^k) para un λ^k dado.
- Considerando $s^k = (x_i^k - y_{ij}^k)$ se determina λ^{k+1} .



Relajación Lagrangeana

- Determinación de una solución factible:
 - La solución lagrangeana es infactible por no respetar la restricción (2), pueden existir flujos $y_{ij} > 0$ con $x_i = 0$.
 - Una heurística simple es fijar $x_i = 1$ al haber flujo $y_{ij} > 0$.
 - Una heurística más fuerte puede utilizar la solución anterior para hacer búsqueda local:

Para una planta i , que abastece los clientes $j_1, j_2, \dots, j_k$ se ve si el costo f_i es mayor que el costo de abastecer los clientes desde otras plantas abiertas. De esta manera se puede evaluar el cierre de plantas.



Relajación Lagrangeana

- Localización de Plantas Con Capacidad:

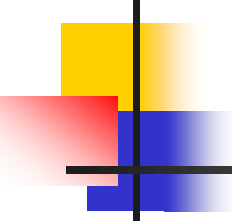
$$\text{Min } z = \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}$$

$$\begin{matrix} sa \\ (s_j) \end{matrix} \quad \sum_i y_{ij} = 1 \quad \forall j. \quad (1)$$

$$\begin{matrix} (w_i) \end{matrix} \quad \sum_j q_j y_{ij} \leq Q_i x_i \quad \forall i. \quad (2)$$

$$x_i \in \{0,1\}, y_{ij} \geq 0.$$

Donde Q_i es la capacidad de la planta i , q_j es la demanda del cliente j , s_j y w_i son las variables duales asociadas a las restricciones.

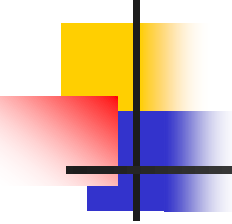


Relajación Lagrangeana

- Si relajamos (1), la satisfacción de demanda de los clientes:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij} + \sum_j s_j (1 - \sum_i y_{ij}) \\ &= \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j (c_{ij} - s_j) y_{ij} + \sum_j s_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sa} \quad & \sum_j q_j y_{ij} \leq Q_i x_i \quad \forall i. \quad (2) \\ & x_i \in \{0,1\}, y_{ij} \geq 0. \end{aligned}$$

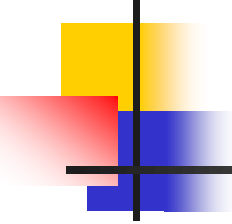


Relajación Lagrangeana

- El problema se puede resolver de la siguiente forma:
 - Si $x_i = 1$, su contribución a la función objetivo es equivalente al costo de la planta i más los costos asociados a cada cliente.

$$a_i = F_i + \sum_j \min(0, c_{ij} - s_j)$$

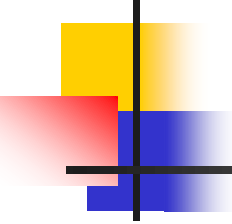
De esta manera se abren las plantas para las cuales $a_i < 0$.



Relajación Lagrangeana

- Conociendo los valores de x_i se pueden determinar los valores para y_{ij} :
 - $y_{ij} = 1$ si $c_{ij} - s_j < 0$.
 - $y_{ij} = 0$ si $c_{ij} - s_j \geq 0$.
- Con (x, y) se determinan los nuevos valores de las variables lagrangeanas (s, w) .

El problema es encontrar una solución factible: una solución generalmente no va a cumplir con la restricción de satisfacción de demanda. Si la cumpliera sería una solución óptima, ya que es igual a la cota.



Relajación Lagrangeana

- Una heurística simple sería resolver:

$$\text{Min } z = \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}$$

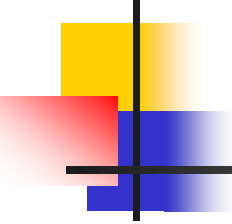
$$\text{sa } \sum_i y_{ij} = 1 \quad \forall j.$$

$$\sum_j q_j y_{ij} \leq Q_i x_i^+ \quad \forall i.$$

$$0 \leq y_{ij} \leq 1.$$

donde $x_i^+ = 1$ para las plantas de la solución relajada.

Si la capacidad no alcanza, abrir plantas adicionales de menor costo.

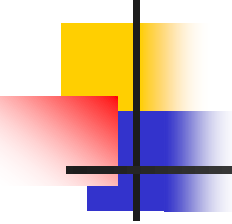


Relajación Lagrangeana

- Si relajamos (2), la capacidad de las plantas:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij} + \sum_i w_i (Q_i x_i - \sum_j q_j y_{ij}) \\ &= \sum_i (F_i + w_i Q_i) x_i + \sum_i \sum_j (c_{ij} - w_i q_j) y_{ij} \\ \text{sa } \sum_i y_{ij} &= 1 \quad \forall j. \quad (1) \\ x_i &\in \{0,1\}, y_{ij} \geq 0. \end{aligned}$$

De esta relajación resulta un problema lineal sencillo.



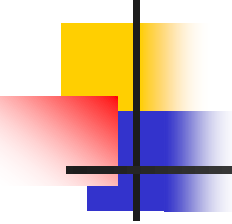
Relajación Lagrangeana

- El problema se puede resolver de la siguiente forma:
 - $x_i = 1$ si $(F_i + w_i Q_i) < 0$.
 - Los valores de y_{ij} se determinan a partir de un PL.
 - Teniendo (x, y) se determinan los nuevos valores de las variables lagrangeanas (s, w) .

La solución obtenida posiblemente viole la capacidad de la planta.

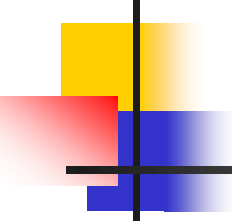
- Una heurística sencilla para obtener una solución factible sería considerar las plantas en que:

$$\sum_j q_j y_{ij} = Q_i^* > Q_i$$



Relajación Lagrangeana

- Luego, tomar el exceso ($Q_i^* - Q_i$) más caro desde la planta y asignar cada cliente asociado a éste a plantas con capacidad residual más barata.
- Si es necesario, abrir plantas adicionales considerando aquellas con menor costo de inversión y transporte. Para esto se deben ranquear las plantas cerradas de menor a mayor costo total asociado (inversión más costo de envío a los clientes de cantidades $Q_i^* - Q_i$).



Relajación Lagrangeana

- Producción e Inventarios con Múltiples Productos y Períodos:

- Variables:

x_k^t : producción del producto k en el período t .

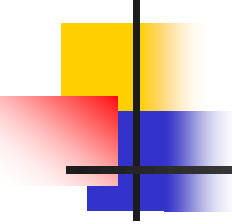
h_k^t : inventario del producto k del período t al $t + 1$.

$$\delta_k^t = \begin{cases} 1 & \text{si se produce el producto } k \text{ en el período } t. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- Parámetros:

A^t : capacidad de la planta en el período t [HH].

B^t : capacidad de la bodega del período t al $t + 1$ [m³].



Relajación Lagrangeana

a_k : HH requeridas por cada unidad del producto k en la planta.

b_k : m^3 que requiere cada unidad del producto k en bodega.

c_k^t : costo unitario de producción del producto k en el período t .

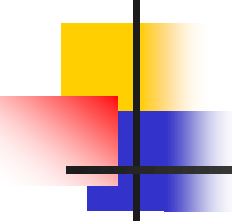
d_k^t : costo unitario de inventario del producto k de t a $t + 1$.

e_k^t : costo fijo de producción del producto k en el período t .

DD_k^t : demanda por el producto k en el período t .

■ Función Objetivo:

$$\text{Min } z = \sum_t \sum_k (c_k^t x_k^t + d_k^t h_k^t + e_k^t \delta_k^t)$$



Relajación Lagrangeana

- Restricciones:

- Capacidad de la planta:

$$\sum_k a_k x_k^t \leq A^t \quad \forall t. \quad (1)$$

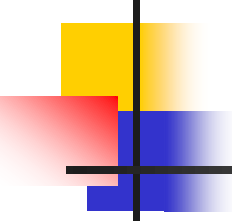
- Capacidad de la bodega:

$$\sum_k b_k h_k^t \leq B^t \quad \forall t. \quad (2)$$

- Producción del producto k:

$$a_k x_k^t \leq A^t \delta_k^t \quad \forall k, t. \quad (3)$$

Para producir el producto k en el período t se debe incurrir en un costo fijo. Su producción máxima es A^t/a_k .



Relajación Lagrangeana

- Conservación de flujo:

$$x_k^t + h_k^{t-1} - h_k^t = DD_k^t \quad \forall k, t. \quad (4)$$

- Naturaleza de las variables:

$$x_k^t, h_k^t \geq 0, \delta_k^t \in \{0, 1\} \quad \forall k, t.$$

- Supuestos:

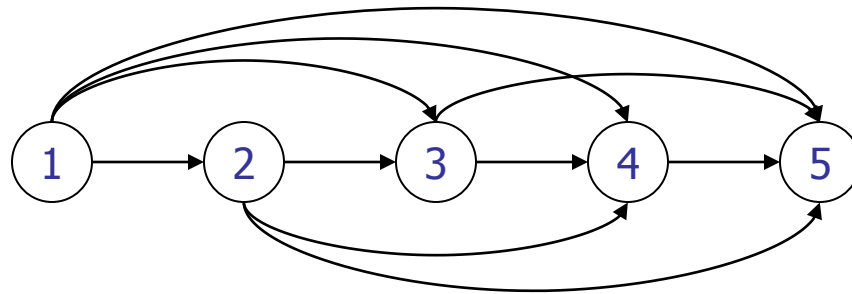
K : número de productos = 1.000.

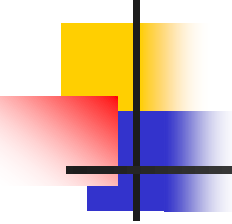
T : número de variables = 20.

⇒ El problema tiene 20.000 variables binarias, 40.000 variables continuas y 40.040 restricciones.

Relajación Lagrangeana

- Alternativas de solución:
 - Si se relajan las restricciones (1) y (2) quedan 1.000 problemas pequeños, uno por producto, con 20 variables binarias y 40 restricciones cada uno. Estos problemas son fáciles de resolver ya que en cualquier solución óptima sólo se produce para cubrir la demanda completa (de todos los períodos).
 - Ejemplo: 4 períodos.





Relajación Lagrangeana

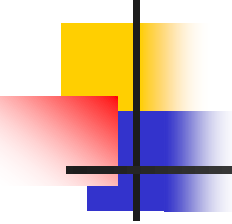
- El arco (i,j) , $i < j$, representa la producción en el período i para cubrir la demanda de los períodos $i, \dots, j-1$. De esta manera:

$$\text{Costo arco } (1,2) = \delta_k^1 + c_k^1 DD_k^1$$

$$\text{Costo arco } (1,5) = \delta_k^1 + c_k^1 \sum_{t=1}^4 DD_k^t + \sum_{t=1}^3 d_k^t \left(\sum_{l=t+1}^4 DD_k^l \right)$$

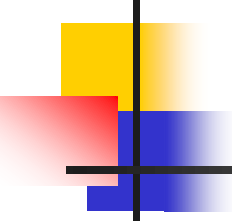
$$\text{Costo arco } (3,4) = \delta_k^3 + c_k^3 DD_k^3$$

- La solución lagrangeana violaría las capacidades de las plantas y bodegas. Para evitar lo anterior se utilizan heurísticas sencillas para encontrar soluciones factibles:



Relajación Lagrangeana

- Si se viola la capacidad de la planta, adelantar la producción a un período en que haya capacidad disponible y guardar ésta en bodega.
- Si se viola la capacidad de la bodega, reducir inventarios y producir en período posteriores (aumenta costo fijo).
- Otra forma de proceder es relajar la restricciones (4), perdiendo la conservación de flujos.
Queda un problema por período, cada uno con 1.000 variables binarias y 1.002 .



Relajación Lagrangeana

- Los problemas quedan:

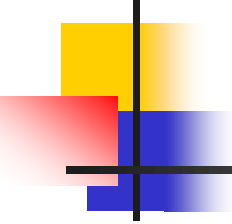
$$\text{Min } z = \sum_k (\bar{c}_k^t x_k^t + \bar{d}_k^t h_k^t + e_k^t \delta_k^t)$$

$$\text{sa} \quad \sum_k a_k x_k^t \leq A^t$$

$$\sum_k b_k h_k^t \leq B^t$$

$$a_k x_k^t \leq A^t \delta_k^t \quad \forall k.$$

Se pueden resolver por análisis.



Relajación Lagrangeana

- Para x_k^t , tomar el producto k más rentable, es decir, el que minimiza:

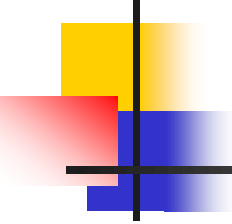
$$R_k^t = \bar{c}_k^t \left(\frac{A^t}{a_k} \right) + e_k^t$$

Si $R_k^t < 0$, $\delta_k^t = 1$ y $x_k^t = \frac{A^t}{a_k}$. Para los restantes, $x_k^t = 0$.

Si $R_k^t \geq 0$, $\delta_k^t = 0$ y $x_k^t = 0$ para todos.

- Para h_k^t , tomar el producto k que minimiza:

$$S_k^t = \bar{d}_k^t \left(\frac{B^t}{b_k} \right)$$



Relajación Lagrangeana

Si $S_k^t < 0$, $h_k^t = \frac{B^t}{b_k}$. Para los restantes, $h_k^t = 0$.

Si $S_k^t \geq 0$, $h_k^t = 0$ para todos.

- No es una solución que aporte mucho ya que se produce y almacena sólo un producto, sin consideraciones de demanda.