

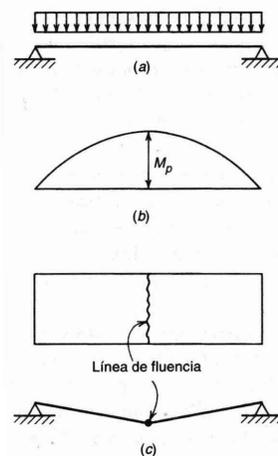
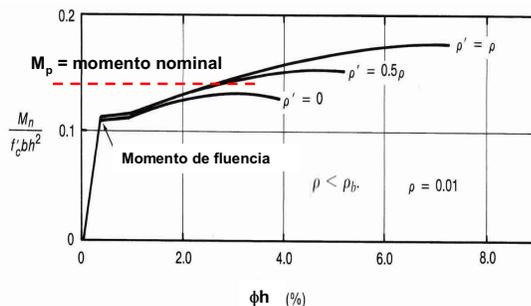
Líneas de Fluencia en Losas

- **Otros métodos**
 - Usualmente se basan en métodos lineales y elásticos
 - Generalmente consideran configuraciones regulares
 - Losas casi-cuadradas (forma única)
 - Apoyos y vigas en todas las caras (ej.: método de los coeficientes)
 - Tamaño de aberturas menores
- **Líneas de fluencia**
 - Metodología que considera el comportamiento no-lineal de los materiales (formación de rótulas plásticas) y que permite diseñar losas para su estado último.
 - El estado último asume una falla por flexión.
 - Diseño en estado último requiere verificar que exista la capacidad de rotación. En losas, usualmente de baja cuantía de armadura, tienen gran ductilidad lo que simplifica el problema, no requiriendo esta verificación.
- **Ventajas**
 - Versatilidad (gran variedad de casos posibles de estudio)
 - Considera el comportamiento plástico (no-lineal) y redistribución de momentos



Líneas de Fluencia en Losas

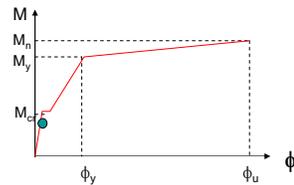
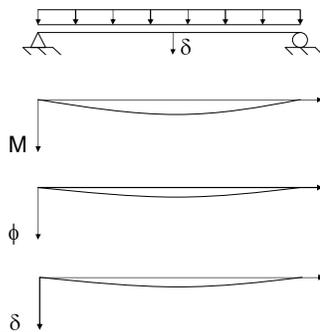
- **Losa en 1 dirección simplemente apoyada (viga)**
 - Losa sub-armada ($\rho < \rho_b$) con falla por flexión
 - En el rango lineal, el diagrama de momento tiene la misma distribución que el diagrama de curvatura a lo largo de la losa
 - En el rango no-lineal se concentra la curvatura en la zona de momento máximo (centro) formando la rótula plástica
 - Para esta estructura estáticamente determinada, la rótula plástica genera el colapso



Líneas de Fluencia en Losas

- **Ductilidad en flexión**

- Rótulas plásticas: concentración de deformaciones plásticas que generan grandes deformaciones (relativas a las elásticas)



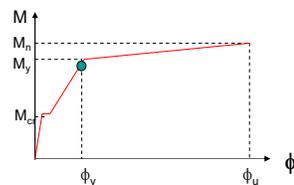
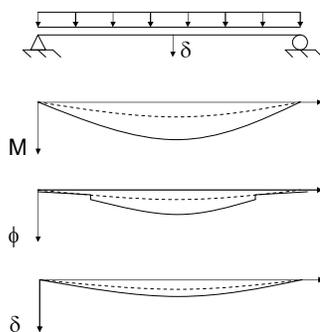
$$\phi = \frac{M}{EI_{NF}}$$

$$\delta = \iint \phi$$

Líneas de Fluencia en Losas

- **Ductilidad en flexión**

- Rótulas plásticas: concentración de deformaciones plásticas que generan grandes deformaciones (relativas a las elásticas)



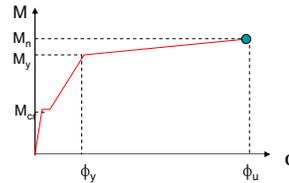
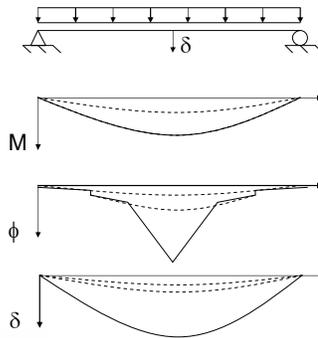
$$\phi = \frac{M}{EI_F}$$

$$\delta = \iint \phi$$

Líneas de Fluencia en Losas

- **Ductilidad en flexión**

- Rótulas plásticas: concentración de deformaciones plásticas que generan grandes deformaciones (relativas a las elásticas)



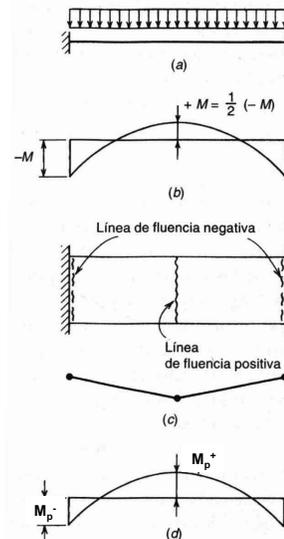
$$\phi \neq \frac{M}{EI}$$

$$\delta = \iint \phi$$

Líneas de Fluencia en Losas

- **Losa en 1 dirección empotrada**

- Losa sub-armada ($\rho < \rho_b$) con falla por flexión
- Rótula se forma primero donde se alcanza la capacidad nominal (M_p)
- Ante el aumento de carga, las rótulas plásticas aparecen en las zonas de momento máximo positivo y negativo (supone refuerzo uniforme)
- Para esta estructura estáticamente indeterminada, sólo las tres rótulas plásticas generan el colapso
- La condición de indeterminación se traduce en una posible redistribución de momentos. El diagrama de momento en el colapso puede diferir del diagrama de momento para el comportamiento lineal y elástico



Líneas de Fluencia en Losas

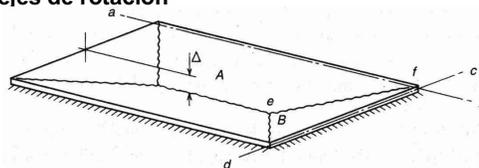
- Teorema del límite inferior: si para una determinada carga externa es posible encontrar una distribución de momentos en equilibrio (sin exceder fluencia) y que cumple las condiciones de borde, entonces la carga es un límite inferior
- Teorema del límite superior: si para un pequeño incremento en desplazamiento, el trabajo interno es igual al externo (con rótulas plásticas en fluencia y cumpliendo las condiciones de borde), entonces la carga es un límite superior
- La metodología de líneas de fluencia se basa en el “teorema del límite superior” por lo que la selección errónea del mecanismo de falla podría resultar en capacidades mayores a las reales
- La posible imprecisión del método lo categoriza como un método de “pre-diseño”



Líneas de Fluencia en Losas

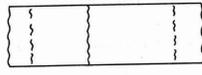
- Losa en 2 direcciones simplemente apoyada
 - La determinación de las líneas de fluencia no es tan evidente como en el caso de losa en 1 dirección
 - Pautas para determinar líneas de fluencia
 - Las líneas de fluencia son rectas
 - Las líneas de fluencia representan ejes de rotación
 - Los bordes de losa corresponden a ejes de rotación, que en caso de empotramiento corresponden a líneas de fluencia negativa
 - Un eje de rotación pasará sobre cualquier columna de apoyo
 - Las cargas concentradas forman líneas de fluencia radiales
 - Una línea de fluencia entre segmentos de losa puede pasar por la intersección de los ejes de rotación

Ej: eje “cd” y “ab” son ejes de rotación que requieren de la línea de fluencia “ef” para permitir la rotación



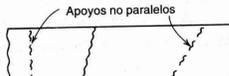
Patrones comunes de líneas de fluencia

Ubicación de las líneas de fluencia depende de las solicitaciones y distribución del refuerzo



Losa continua de apoyos paralelos

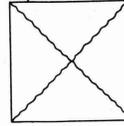
La compatibilidad geométrica de deformaciones obliga a la línea de fluencia positiva a tener un punto común con las negativas



(b)

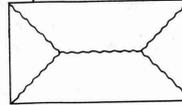
Losa continua de apoyos no paralelos

Apoyos simples en todos los lados

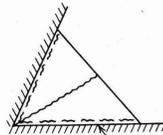


(c)

Apoyos simples en todos los lados

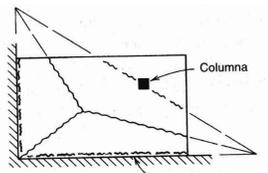


(d)

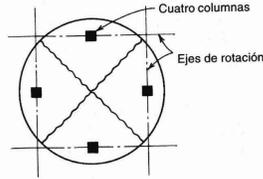


Apoyos empotrados en dos lados
(e)

Patrones comunes de líneas de fluencia



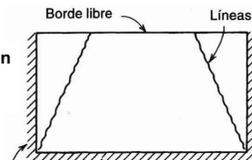
(f)



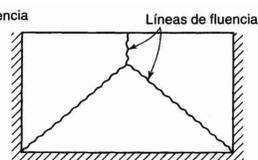
(g)

Los ejes de rotación de los apoyos y el eje de rotación de la columna (estimado) fijan la ubicación de las líneas de fluencia

Modos de falla posible que pueden dar la capacidad correcta o una sobrestimación de la capacidad



(a)



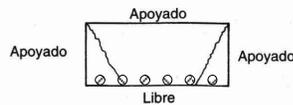
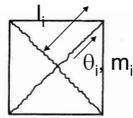
(b)

Líneas de Fluencia en Losas

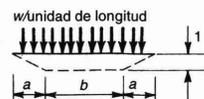
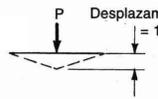
- **Análisis por el método de los trabajos virtuales**
 - Asumiendo que el equilibrio está establecido un aumento infinitesimal de la carga producirá un aumento infinitesimal de la deformación. Así,

$$W_{\text{ext, desplazamiento virtual}} = W_{\text{int, deformación virtual compatible}} = \sum_i m_i l_i \theta_i$$

Ej: w_{ext}



$$w_{\text{ext}} = P \cdot 1$$

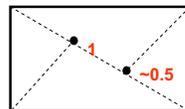
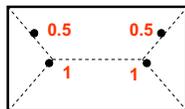
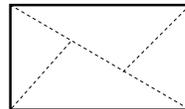
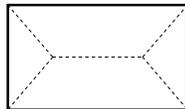


$$w_{\text{ext}} = 2wa/2 + wb = w(a+b)$$



Líneas de Fluencia en Losas

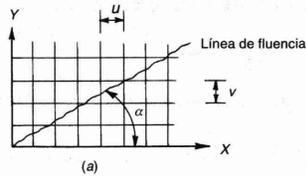
- **Ejemplo de deformación “de cuerpo rígido” inadmisibles**



Líneas de Fluencia en Losas

- Refuerzo ortotrópico

- El refuerzo en losas es habitualmente ortogonal en 2 direcciones. Además, la cantidad de refuerzo suele no ser la misma en esas 2 direcciones, y en algunos casos varía a lo largo de la línea de fluencia



$$m_{\alpha,x} = \frac{m_x u \cos \alpha}{u / \cos \alpha} = m_x \cos^2 \alpha$$

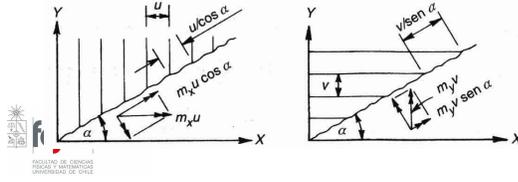
$$m_{\alpha,y} = \frac{m_y v \sin \alpha}{v / \sin \alpha} = m_y \sin^2 \alpha$$

$$m_\alpha = m_{\alpha,y} + m_{\alpha,x} = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha$$

Si, $m_{\alpha,x} = m_{\alpha,y} = m$,

$$m_\alpha = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha = m(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = m$$

En cuyo caso, el refuerzo se considera isotrópico

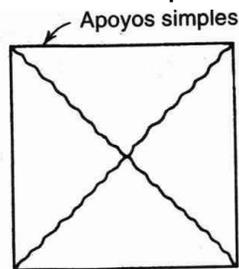


INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

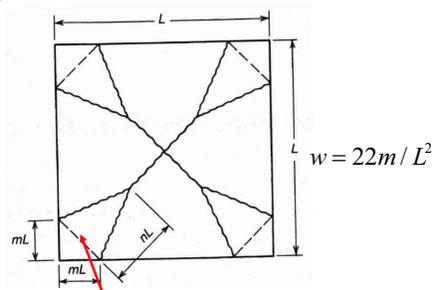
Líneas de Fluencia en Losas

- Condiciones especiales

- Las líneas de fluencia no son necesariamente rectas. Estas pueden desviarse cerca de los bordes donde existe cero momento
- Las esquinas también pueden dar pie a patrones diferentes de falla. Estos pueden producir bifurcación de las líneas de fluencia, e incluso requerir refuerzo negativo.



$$w = 24m / L^2$$



Refuerzo negativo requerido en caso de bifurcación cercano a esquina (palanca de esquina)

fcfm Ingeniería Civil
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Método de las franjas en Losas

- **Losa apoyada en el lado (viga): Hillerborg (1975)**
 - Uso del teorema del límite inferior. Considera un estado de esfuerzos estáticamente admisible, y seguro.
 - Estimación conservadora de la capacidad en flexión

$$\sum F \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = -w$$

$$\sum M \quad \frac{\partial m_x}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = V_y \quad \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = V_x$$

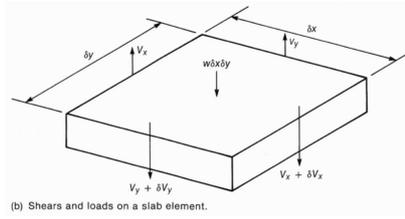
$$m_{xy} = m_{yx} \quad (\sigma_{xy} = \sigma_{yx})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -w$$

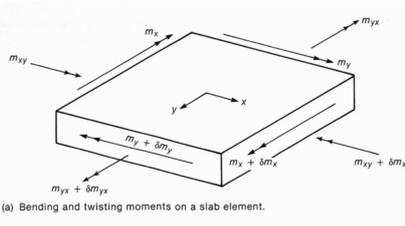
- **Método avanzado: Losa apoyada en la esquina (columna)- Hillerborg (1982)**



No se verá en el curso



(b) Shears and loads on a slab element.



(a) Bending and twisting moments on a slab element.

Método de las franjas en Losas

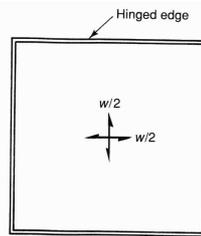
- **Solución posible**
 - No hay efectos de torsión $m_{xy} = 0$
 - Si separamos las cargas en X e Y, tal que $w = w_x + w_y$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -w_x \quad (\text{viga en 1 dirección})$$

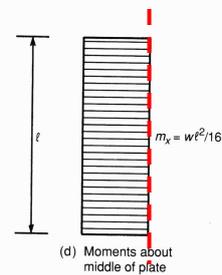
$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -w_y$$

En el ejemplo 1:

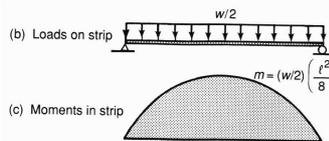
- Losa cuadrada, isótropa, simplemente apoyada en todo el perímetro, cargada uniformemente en el área
- Dada la simetría, la carga se asume idéntica en cada dirección (w/2)
- Sobre-estimación del momento



(a) Division of load w



(d) Moments about middle of plate



(c) Moments in strip

$$m_{x_avg} = 0.0625 w l^2$$



Ingeniería Civil

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas Universidad de Chile

Método de las franjas en Losas

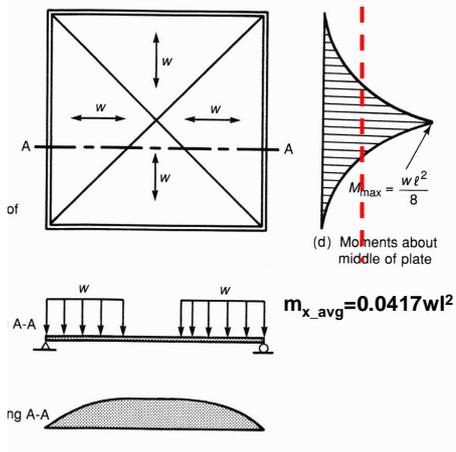
Ejemplo 2:

- Solución alternativa (misma losa)

$$\frac{\partial^2 m_i}{\partial^2 i} = -w_i, \quad i = x \text{ ó } y \quad (\text{viga en 1 dirección})$$

En el ejemplo:

- La flecha indica dirección de la carga (x ó y)
- La suma de las cargas en x e y en cada punto suman "w"
- Puesto que las soluciones son conservadoras (teorema del límite inferior), esta distribución de cargas resulta en una sobre-estimación del momento máximo en la zona central, aunque el valor medio se acerca a la solución de línea de fluencia
- Solución impráctica para distribución de armadura



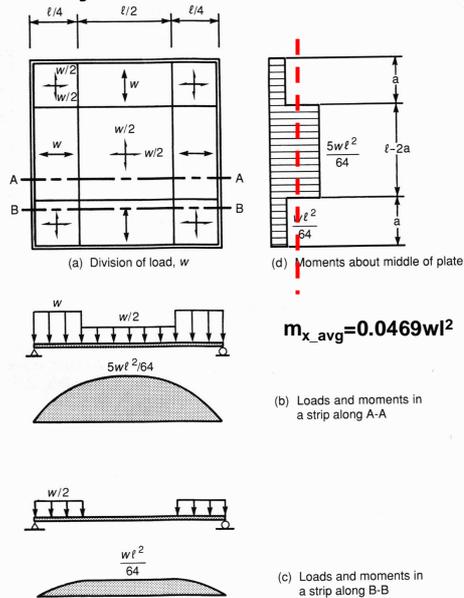
Método de las franjas en Losas

Ejemplo 3:

- Solución alternativa (misma losa)

En el ejemplo:

- Segmentos cuadrados: distribución simétrica de carga
- Segmentos rectangulares: la carga se distribuye (mayoritariamente) en la dirección corta
- Disminuye el momento máximo en la zona central, y el valor medio se acerca a la solución de línea de fluencia
- Solución práctica para distribución de armadura (2 franjas distintas)
- Franja menor = (lado corto)/4



Método de las franjas en Losas

- **Losa rectangular**

En el ejemplo:

- Se puede asumir que gran parte de la carga se va al lado largo. Sin embargo, cercano a los apoyos cortos (lado b) la carga se dirigen en esta dirección. Esto habitualmente no se quiere obviar. Sin embargo una solución con líneas de distribución de carga oblicua resulta en distribuciones de armadura impracticable.
- Franjas paralelas a los apoyos resultan en soluciones prácticas.
- Franja menor = (lado corto)/4

