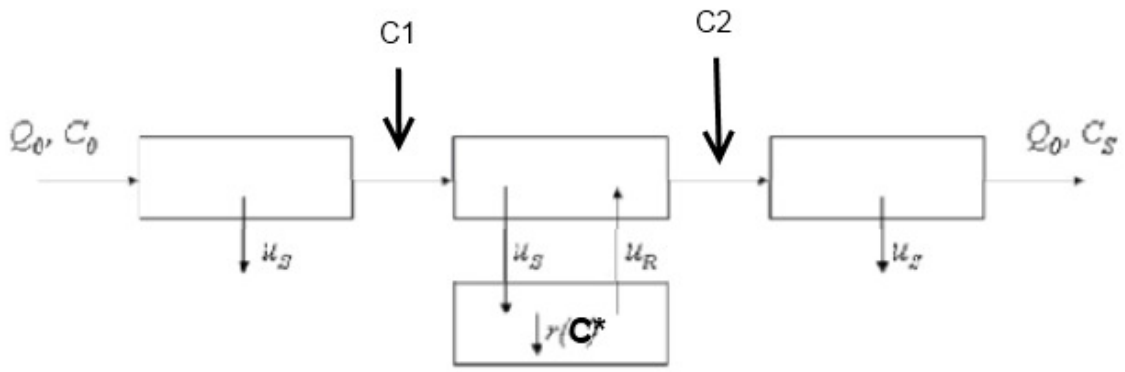
Solución Problema 3.

El lago puede ser modelado como una serie de balances de flujo pistón en su parte superior, y en la sección del medio, parte inferior como un fenómeno de mezcla completa.

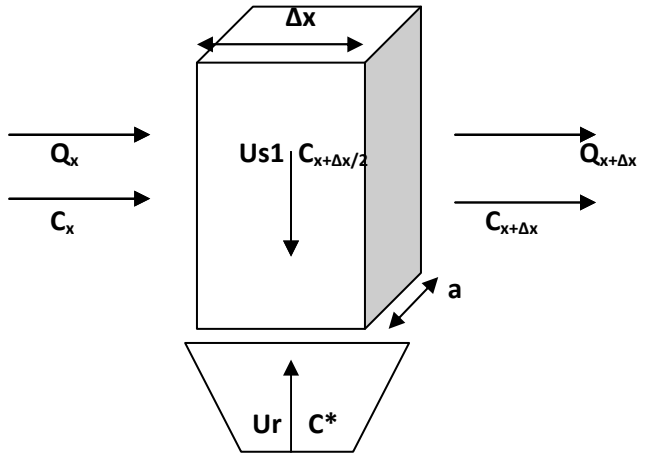
Dado el esquema conceptual que se presenta del lago, se usará la siguiente notación:



Se tiene entonces que al terminar la seción 1 se tiene una concentración C1, al terminar la sección 2 se tendrá una concentración C2 y al terminar la sección 3 se tendrá una concentración Cs.

Por la indicación, realizaremos primero el balance de masa de la sección 2, en sus estratos superior e inferior.

Para el estrato superior se tiene:



Notemos que en el estrato superior la concentración variará con el largo, mientras que en el estrato inferior se tiene mezcla completa por lo que la concentración será uniforme y de valor constante.

Haciendo los balances para este elemento, se tiene que:

$$Balance\ Volumétrico: \quad Q_x = Q_{x+\Delta x}$$

$$Q_x * C_x \ + U_r * a * \Delta x * C^* \ = Q_{x+\Delta x} * C_{x+\Delta x} + U_s * a * \Delta x * C_{x+\frac{\Delta x}{2}}$$

Despejando de tal manera que logremos obtener un diferencial para establecer el flujo pistón se obtiene:

$$Q_{x+\Delta x} * C_{x+\Delta x} - \quad Q_x * C_x = U_r * a * \Delta x * C^* - U_s * a * \Delta x * C_{x+\frac{\Delta x}{2}}$$

$$Q * \frac{[C_{x+\Delta x} -* C_x]}{\Delta x} = U_r * a * C^* - U_s * a * C_{x+\frac{\Delta x}{2}}$$

Si hacemos tender Δx → 0, obtenemos el diferencial:

$$Q * \frac{dC}{dx} = U_r * a * C^* - U_s * a * C$$

$$\frac{dC}{U_r * C^* - U_s * C} = \frac{a * dx}{Q}$$

$$\int_{C_1}^{C2(x)} \frac{dC}{U_r * a * C^* - U_s * a * C} = \int_0^x \frac{a * dx}{Q}$$

$$-\frac{1}{v_s} Ln\left(\frac{U_r * a * C^* - U_s * a * C_{tramo\,2}(x)}{U_r * a * C^* - U_s * a * C_1}\right) = \frac{a * x}{Q}$$

$$\left(\frac{U_r * a * C^* - U_s * a * C_{tramo\,2}(x)}{U_r * a * C^* - U_s * a * C_1}\right) = e^{-\frac{a*Vs*x}{Q}}$$

Al desarrollar y despejar $C_{tramo\,2}(x)$, se obtiene entonces:

$$C_{tramo\,2}(x) = \frac{U_r}{U_s} * C^* - \left(\frac{U_r}{U_s} * C^* - C_1\right) * e^{-\frac{a*Vs*x}{Q}}$$

De lo cual, se tiene entonces que:

$$C_2 = C_{tramo\,2}(x = L) = \frac{U_r}{U_s} * C^* - \left(\frac{U_r}{U_s} * C^* - C_1\right) * e^{-\frac{a*Vs*L}{Q}}$$

Sin embargo, aún nos falta por conocer el valor de C*, que es valor de la concentración en el estrato inferior donde se tiene mezcla completa. Para determinar este valor se realiza el balance de masa en equilibrio para este estrato, ya que por enunciado sabemos que no hay interacción de flujos:

$$\frac{dM}{dt} = 0 \; por\ equilibrio, \rightarrow \; M_{entra} = \; M_{sale}$$

Luego,

$$\int_0^L C_{tramo\,2}(x) * U_s * a * dx = U_r * C^* * a * L + K_0 * a * L * H$$

$$\int_0^L \left[\frac{U_r}{U_s} * C^* - \left(\frac{U_r}{U_s} * C^* - C_1\right) * e^{-\frac{a*Vs*x}{Q}}\right] * U_s * a * dx = U_r * C^* * a * L + K_0 * a * L * H$$

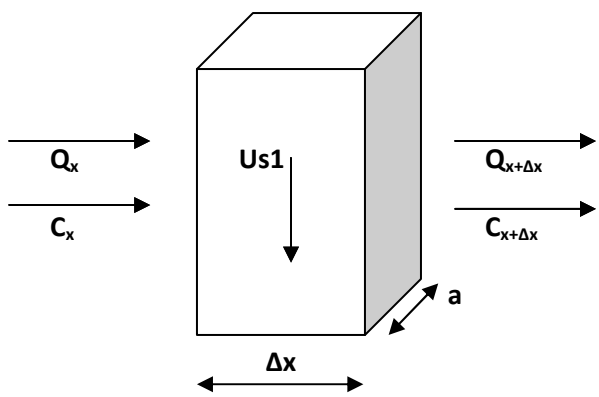
$$\frac{U_r}{U_s} * C^* * U_s * a * L - \frac{\left(\frac{U_r}{U_s} * C^* - C_1\right) * (e^{-\frac{a*Vs*x}{Q}} - 1) * U_s * a}{-\frac{a*Vs*x}{Q}} = U_r * C^* * a * L + K_0 * V$$

$$U_r * C^* * a * L + Q * \left(\frac{U_r}{U_s} * C^* - C_1\right) * \left(e^{-\frac{a*Vs*x}{Q}} - 1\right) = U_r * C^* * a * L + K_0 * V$$

$$\frac{U_r}{U_s} * C^* - C_1 = \frac{K_0 * V}{Q * \left(e^{-\frac{a*Vs*x}{Q}} - 1\right)}$$

$$C^* = \frac{U_s}{U_r} * \left(\frac{K_0 * V}{Q * \left(e^{-\frac{a*Vs*x}{Q}} - 1\right)} + C_1\right)$$

Se tiene que los flujos en las secciones 1 y 3 corresponden a flujo pistón y son simétricas, podemos hacer el mismo desarrollo para ambas, como se presenta a continuación:



De esto, planteamos la ecuación de balance de masa y de volumen:

$$Balance\ Volumétrico: \quad Q_x = Q_{x+\Delta x}$$

$$Balance\ Másico: \quad Q_x * C_x = Q_{x+\Delta x} * C_{x+\Delta x} + U_s * a * \Delta x * C_{x+\frac{\Delta x}{2}}$$

Al desarrollar estas expresiones se tiene que:

$$Q_{x+\Delta x} * C_{x+\Delta x} - Q_x * C_x = -v_s * \Delta x * a * C_{x+\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\frac{Q_{x+\Delta x} * C_{x+\Delta x} - Q_x * C_x}{\Delta x} = -v_s * \Delta x * a * C_{x+\frac{\Delta x}{2}}$$

Del balance volumétrico se tiene que el caudal es constante, luego:

$$Q * \frac{C_{x+\Delta x} - C_x}{\Delta x} = -v_s * \Delta x * a * C_{x+\frac{\Delta x}{2}}$$

Si hacemos tender Δx → 0, obtenemos el diferencial:

$$Q * \frac{dC}{dx} = -v_s * a * C$$

$$\frac{dC}{C} = \frac{-v_s * a}{Q} * dx$$

Integrando esta expresión, se debe hacer una diferencia entre las condiciones iniciales para cada tramo, según la notación definida se obtiene:

Sección 1

$$\int_{C_o}^{C(x)} \frac{dC}{C} = \int_0^x \frac{-v_s * a}{Q} * dx$$

$$Ln\left(\frac{C(x)}{C_o}\right) = \frac{-v_s * a}{Q} * x$$

$$\frac{C(x)}{C_o} = e^{\frac{-v_s * a}{Q} * x}$$

$$C_{tramo\ 1}(x) = C_o * e^{\frac{-v_s * a}{Q} * x}$$

De esta ecuación es posible obtener entonces:

$$C_1 = C_{tramo\ 1}(x = L) = C_o * e^{\frac{-v_s * a}{Q} * L}$$

Sección 3

$$\int_{C_2}^{C(x)} \frac{dC}{C} = \int_0^x \frac{-v_s * a}{Q} * dx$$

$$Ln\left(\frac{C(x)}{C_2}\right) = \frac{-v_s * a}{Q} * x$$

$$\frac{C(x)}{C_2} = e^{\frac{-v_s * a}{Q} * x}$$

$$C_{tramo\ 3}(x) = C_2 * e^{\frac{-v_s * a}{Q} * x}$$

De esta ecuación es posible obtener entonces:

$$C_s = C_{tramo\ 3}(x = L) = C_2 * e^{\frac{-v_s * a}{Q} * L}$$

Entonces, a modo de resumen se tiene que las concentraciones son para cada punto relevante:

Parámetro	Fórmula
C_1	$C_o * e^{\frac{-v_s * a}{Q} * L}$
C^*	$\frac{U_s}{U_r} * \left(\frac{K_0 * V}{Q * \left(e^{-\frac{a * Vs * x}{Q}} - 1 \right)} + C_1 \right)$
C_2	$\frac{U_r}{U_s} * C^* - \left(\frac{U_r}{U_s} * C^* - C_1 \right) * e^{-\frac{a * Vs * L}{Q}}$
C_s	$C_2 * e^{\frac{-v_s * a}{Q} * L}$

b. Al evaluar las expresiones se obtienen los siguientes valores para cada uno de ellos:

C0	0,014	[mg/L]
C1	0,011107	[mg/L]
C*	0,022027	[mg/L]
C2	0,01108	[mg/L]
CS	0,0087	[mg/L]

Se observa entonces que todos las concentraciones de que presentan flujo pistón presentan valores de fósforo menores a 0,015, por lo cual no sufrirían eutroficación. Sin embargo, en el estrato inferior de la sección 2 se tienen valores mayores a 0,015 por lo que en este estrato si se da eutroficación.