Solución Pregunta 2

El desarrollo de esta pregunta fue visto en clase auxiliar de manera algebraica. Para efectos de evaluar, se agregaron un par de valores que faltan en la tabla original, tales como el área transversal del cauce y la velocidad del río. Dichos valores solo sirven para efectos de cálculo de los valores y no afectan el desarrollo algebraico visto en clases.

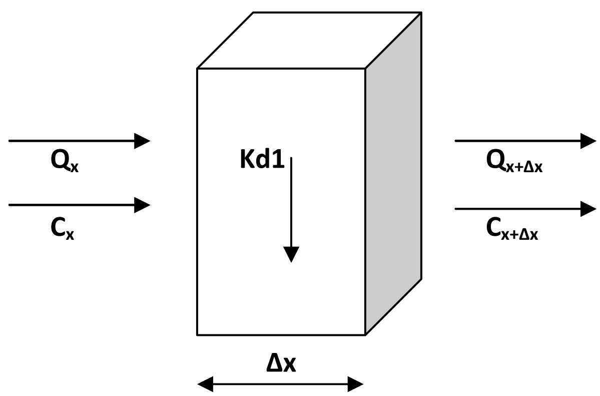
Parte a. Calcule el valor de la concentración del contaminante a la salida del embalse, considerando que el río se comporta como flujo pistón.

Dado que en esta situación no está la industria, es necesario calcular solo dos ecuaciones para ver las concentraciones: un flujo pistón para el largo del río y una mezcla completa para el embalse. La ecuación del flujo pistón entregara entonces la concentración que tiene el río de contaminante justo a la entrada del embalse para poder entonces realizar el balance de mezcla completa.

Luego, los pasos que debemos realizar son los siguientes:

1. Determinar ecuación de flujo pistón para el río.
2. Evaluar $C_{rio}(x=L)$.
3. Realizar balance de masa para el embalse por medio de mezcla completa.

Partamos con la ecuación de la concentración cauce, para lo cual debemos plantear la ecuación de flujo pistón:



De esto, planteamos la ecuación de balance de masa y de volumen:

$$Q_x = Q_{x+\Delta x} \qquad [Ec. 1]$$

$$Q_x * C_x = Q_{x+\Delta x} * C_{x+\Delta x} + k_{d1} * V * C_{x+\frac{\Delta x}{2}} \qquad [Ec. 2]$$

La idea es formar un diferencial del tipo $\frac{dQ*C}{dx}$, para lo cual desarrollamos:

$$Q_{x+\Delta x} * C_{x+\Delta x} - Q_x * C_x = -k_{d1} * \Delta x * A * C_{x+\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\frac{Q_{x+\Delta x} * C_{x+\Delta x} - Q_x * C_x}{\Delta x} = -k_{d1} * C_{x+\frac{\Delta x}{2}}$$

De la Ec. 1 se tiene que el caudal es constante, luego:

$$Q * \frac{C_{x+\Delta x} - C_x}{\Delta x} = -k_{d1} * A * C_{x+\frac{\Delta x}{2}}$$

Si hacemos tender Δx → 0, obtenemos el diferencial:

$$Q * \frac{dC}{dx} = -k_{d1} * A * C$$

$$\frac{dC}{C} = \frac{-k_{d1} * A}{Q} * dx$$

Integrando, en este caso desde un punto inicial donde conocemos la concentración hasta un punto x, para así obtener una ecuación que nos represente la concentración para ese punto, se obtiene:

Q_{rio}

$$\int_{C_o}^{C(x)} \frac{dC}{C} = \int_0^x \frac{-k_{d1} * A}{Q} * dx$$

$$Ln\left(\frac{C(x)}{C_o}\right) = \frac{-k_{d1} * A}{Q} * x$$

$$\frac{C(x)}{C_o} = e^{\frac{-k_{d1} * A}{Q} * x}$$

Notemos ahora que si Q = Q_{rio} y A es el área transversal del cauce, se tiene que:

$$\frac{A}{Q_{rio}} = \frac{1}{v_{rio}}$$

Nos queda finalmente que:

$$C_{rio}(x) = C_0 * e^{\frac{-k_{d1}}{v_{rio}} * x}$$

Al evaluar los valores que se tienen para cada uno de estos parámetros se obtiene:

$$C_{rio}(x = 6000\ [m]) = 0{,}005 * e^{\frac{1}{86400 * 0{,}5} * 6000}$$

$$C_{rio}(x = 6000\ [m]) = 0{,}0043\ \left[\frac{mg}{L}\right]$$

Con este valor de la concentración podemos entonces realizar ahora el cálculo del balance de masa del embalse. Para este caso en que se considera entonces mezcla completa se tienen las siguientes ecuaciones de balance:

$$Q_{rio} = Q_{desc}$$

$$Q_{rio} * C_{rio} = Q_{desc} * C^* + A * v_s * C^* + k_{d2} * V * C^*$$

Luego, al despejar esta ecuación se obtiene:

$$C^* = \frac{Q_{rio} * C_{rio}}{Q_{desc} + A * v_s + k_{d2} * V}$$

Reemplazando los valores se obtiene:

$$C^* = 0{,}00011 \left[\frac{mg}{L}\right]$$

Con lo cual se respecta el límite de concentración máximo que es C_{max} = 0,0002 [mg/L].

Parte b.

En esta situación se tiene que hay nuevos aportes de contaminante en la descarga al embalse directo y que además la ecuación de flujo pistón válida para el tramo del río ya no es válido para toda la longitud de este debido al cambio de condiciones que se producen por culpa del caudal de recirculación.

Luego, los pasos que debemos realizar son los siguientes:

1. Calcular flujo pistón para el río.
2. Calcular C_{rio}(x=2L/3).
3. Realizar balance de masa y volumen en el punto de descarga del caudal de recirculación, para obtener la nueva concentración.
4. Plantear la ecuación de flujo pistón válida para el tramo final del río.
5. Evaluar $C_{rio+rec}$(x=L/3) para obtener concentración del río al final del cauce.
6. Realizar balance de masa con reactor de mezcla en el embalse

Puntos 1 y 2.

Ya tenemos la ecuación de flujo pistón para el primer tramo del río, solo que ahora esta ecuación es válida solo hasta x = 4000[m].

Evaluando C_{rio} (x = 4000 [m]) = 0,00455 [mg/L]

Punto 3. Luego, como hay un cambio de volúmenes de caudal y de concentración, debemos obtener las nuevas condiciones en el punto de intersección:

$$Q_{rio} + Q_{rec} = Q_{rio+rec} \rightarrow Q_{rio+rec} = 3{,}8 \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

$$Q_{rio} * C_{rio} + Q_{rec} * C_{rec} = Q_{rio+rec} * C_{rio+rec}$$

$$C_{rio+rec} = \frac{Q_{rio} * C_{rio} + Q_{rec} * C_{rec}}{Q_{rio+rec}}$$

$$C_{rio+rec} = 0{,}0038\ [\frac{mg}{L}]$$

Punto 4. Esta concentración entonces será la nueva concentración inicial en la ecuación de flujo pistón. Sin embargo, hay que tener otra consideración: dado que cambio el caudal y asumiendo que el área transversal del canal se mantiene constante, entonces se tendrá que la velocidad del canal variará.

El área transversal original se puede obtener de:

$$A = \frac{Q_{rio}}{v_{rio}} \rightarrow A = \frac{3}{0{,}5} = 6\ m^2$$

Luego, suponiendo que el área se mantiene constante, se obtiene la velocidad para el tramo final del río:

$$v_{rio+rec} = \frac{Q_{rio+rec}}{A} = 0{,}633\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

Punto 5. Luego, al desarrollar un equivalente de flujo pistón al desarrollado en la parte a, se obtiene que:

$$C_{rio+rec}(x) = C_1 * e^{\frac{-k_{d1}}{v_{rio+rec}} * x}$$

Donde C_1 = $C_{rio+rec.}$ Al evaluar esta expresión al final del canal, se obtiene entonces:

$$C_{rio+rec}(x = 2000) = 0{,}00367\ \left[\frac{mg}{L}\right]$$

Punto 6. Estamos en condiciones entonces de realizar los balances volumétricos y másicos para el estanque y verificar si es que aún se cumple la restricción para el contaminante.

Balance Volumétrico $Q_{rio} + Q_{rec} + Q_{ind} = Q_{rec} + Q_{desc}$

$$Q_{desc} = Q_{rio} + Q_{ind} = 3{,}2\ \frac{m^3}{s}$$

Balance másico

$$(Q_{rio} + Q_{rec}) * C_{rio+rec}(x = 2000) + Q_{ind} * C_{ind} = Q_{rec} * C^* + Q_{desc} * C^* + Vs * A * C^* + V * k_{d2} * C^*$$

Y despejando de aquí entonces se obtiene:

$$C^* = \frac{(Q_{rio} + Q_{rec}) * C_{rio+rec}(x = 2000) + Q_{ind} * C_{ind}}{Q_{rec} + Q_{desc} + Vs * A + V * k_{d2}}$$

Evaluando, se obtiene:

$$C^* = 0{,}000169\ \left[\frac{mg}{L}\right]$$

Valor con el cual también se respeta la condición de que el valor de C* < 0,0002[mg/L].

Notar que el caudal de recirculación que sale del embalse sale con una concentración C* pero el que llega al río tiene una concentración C_{rec}. Esto se debe al planteamiento del enunciado!

Parámetro	**Unidad**	**Medida**
Q_{rio}	$[m^3/s]$	3
Q_{ind}	$[m^3/s]$	0,2
Q_{rec}	$[m^3/s]$	0,8
C_{rio}	[mg/L]	0,005
C_{ind}	[mg/L]	0,033
C_{rec}	[mg/L]	0,001
Kd_{rio}	[1/día]	1
$Kd_{embalse}$	[1/día]	1,5
Vs	[m/s]	0,005
Área superficial	$[m^2]$	20.000
Volumen	$[m^3]$	1.000.000
Largo L	[m]	6.000
V_{rio}	[m/s]	0,5
Área transversal río	$[m^2]$	6