Métodos Lógicos para Ciencia de la Computación - CC51N
Tarea 1

1. Una cláusula (es decir, una disyunción de literales) se dice que es de *Horn* si contiene a lo más un literal positivo. Por ejemplo, $(p \vee \neg q \vee \neg r)$ y $(\neg q \vee \neg r)$ son cláusulas de Horn, mientras $(p \vee q \vee \neg r)$ no lo es.

   Sea $\textsc{Ptime}$ el conjunto de problemas que pueden ser resueltos en tiempo polinomial por una máquina de Turing determinista. Demuestre que el problema de verificar si un conjunto de cláusulas de Horn es satisfacible es $\textsc{Ptime}$-completo. Esto es, demuestre que el problem puede ser resuelto en $\textsc{Ptime}$, y que cualquier problema en $\textsc{Ptime}$ puede ser reducido en tiempo polinomial a el.

2. Asuma que $\alpha \rightarrow \beta$ es una tautología, i.e. es el caso que $\models \alpha \rightarrow \beta$. Demuestre que existe θ tal que $\models \alpha \rightarrow \theta$, $\models \theta \rightarrow \beta$, y θ solo menciona variables proposicionales que aparecen tanto en α como en β. Tal oración θ se llama un *interpolante* de $\alpha \rightarrow \beta$.

3. En este problema se pide demostrar que si junto con la regla de resolución podemos usar tautologías en cualquier parte de una demostración, entonces el sistema resultante es completo. Vale decir, si C es una cláusula y Σ es un conjunto de cláusulas tal que $\Sigma \models C$, entonces $\Sigma \vdash C$.

   Formalmente, una demostración por resolución de la cláusula C desde el conjunto de cláusulas Σ es una secuencia $C_1, \ldots, C_n$ tal que $C_n = C$ y para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que:

   - $C_i \in \Sigma$, o
   - C_i es una tautología, o
   - existen $j, k < i$ tal que C_i es obtenido desde C_j y C_k usando regla de resolución.

   Como antes, si existe demostración por resolución de C desde Σ escribimos $\Sigma \vdash C$.

   Note que si C es tautología entonces trivialmente se tiene que $\Sigma \vdash C$. Por tanto, para demostrar que el sistema es completo le basta con demostrar lo siguiente:

   a) Si Σ es inconsistente entonces $\Sigma \vdash C$ para toda cláusula C.
   b) Si Σ es consistente, C no es tautología y $\Sigma \models C$, entonces $\Sigma \vdash C$.

4. Sea P un conjunto de variables proposicionales. Definimos la *lógica infinitaria* sobre P, denotada por $L_\infty(P)$, como el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

   - Si $\Sigma \subseteq L(P)$ entonces $(\bigwedge \Sigma) \in L_\infty(P)$.
   - Si $\phi \in L_\infty(P)$ entonces $(\neg \phi) \in L_\infty(P)$.

- Si $\phi, \psi \in L_\infty(P)$ entonces $(\phi \vee \psi) \in L_\infty(P)$.

Por ejemplo, si $P = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ y $\Sigma = \{(\neg p_i) \mid p_i \in P\}$, entonces $\bigwedge \Sigma$ y $(\neg \bigwedge \Sigma)$ son fórmulas en $L_\infty(P)$. La primera fórmula dice que todas las variables proposicionales son falsas, mientras la segunda dice que al menos una variable proposicional es verdadera.

Definimos formalmente la semántica de $L_\infty(P)$ como sigue. Sea $\sigma : P \to \{0, 1\}$ una valuación y ϕ una fórmula en $L_\infty(P)$:

- Si $\phi = (\bigwedge \Sigma)$ y $\Sigma \subseteq L(P)$, entonces $\sigma(\phi) = 1$ si y sólo si para cada $\psi \in \Sigma$ se tiene que $\sigma(\psi) = 1$.
- Si $\phi = (\neg \alpha)$, entonces $\sigma(\phi) = 1$ si y sólo si $\sigma(\alpha) = 0$.
- Si $\phi = (\alpha \vee \beta)$, entonces $\sigma(\phi) = 1$ si y sólo si $\sigma(\alpha) = 1$ o $\sigma(\beta) = 1$.

¿Es el teorema de compacidad válido para $L_\infty(P)$? Es decir, dado $\Gamma \subseteq L_\infty(P)$, ¿es cierto que si todo subconjunto finito de Γ es satisfacible entonces Γ es satisfacible?

5. Suponga que existe un algoritmo eficiente para el problema de satisfacibilidad, es decir, un algoritmo que dada una fórmula φ con n letras proposicionales, en n^c pasos retorna 1 si la fórmula es satisfacible y 0 en caso contrario, donde c es una constante fija.

   Encuentre un algoritmo eficiente que dada una fórmula φ retorna una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$ si φ es satisfacible, y retorna 0 en caso contrario.

6. Una cláusula es positiva si no contiene literales negativos. Demuestre que el problema de determinar, dado un conjunto C de cláusulas positivas, si existe una valuación que satisface a exactamente un literal dentro de cada cláusula de C es NP-completo.