Auxiliar 5: Matemáticas Discretas para la Computación

Profesor: Pablo Barceló
Auxiliares: Javiera Urrutia - Mauro Escobar
4 de mayo de 2011

P1. Definimos $\left\{ {n \atop k} \right\}$ ('n subconjunto k') como el número de maneras en que se pueden particionar n elementos en k subconjuntos no vacíos (si $n < k$, entonces $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$).

(i) Encuentre una fórmula explícita para $\left\{ {n \atop 2} \right\}$.

(ii) Demuestre combinatorialmente que (asuma que $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$ y $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$, $\forall n \geq 1$)

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \qquad \forall n > 0,\ \forall k \leq n.$$

P2. Definimos $\left[{n \atop k} \right]$ ('n ciclos k') como el número de maneras que podemos arreglar n elementos en k ciclos. Cuando contamos ciclos, por ejemplo, $[a, b, c, d] = [b, c, d, a] = [c, d, a, b] = [d, a, b, c]$, pero $[a, b, c, d]$ es distinto de $[a, b, d, c]$ o de $[d, c, b, a]$.

(i) Encuentre una fórmula explícita para $\left[{n \atop 1} \right]$.

(ii) Demuestre combinatorialmente que

$$\left[{n \atop k} \right] = (n-1) \left[{n-1 \atop k} \right] + \left[{n-1 \atop k-1} \right] \qquad \forall n > 0,\ \forall k \leq n.$$

(iii) Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] = n! \qquad \forall n > 0.$$

P3. Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par. Demuestre combinatorialmente que $\frac{n!}{2^{n/2}}$ es entero.

P4. Calcule cuantos strings binarios de largo n contienen un número par de ceros. Si los strings ahora son formados con el alfabeto $\{0, 1, 2\}$, muestre que el número de strings donde aparecen un número par de ceros es $\frac{3^n+1}{2}$.

P5. Tenemos 8 mujeres y 6 hombres. Cuántos comités formados por 3 hombres y 3 mujeres podemos hacer si

(i) 2 de los hombres se niegan a trabajar juntos.

(ii) 2 de las mujeres se niegan a trabajar juntas.

(iii) 1 hombre y 1 mujer se niegan a trabajar juntos.

P6. Un clóset contiene 10 pares de zapatos. Si escogemos 8 zapatos al azar, cuál es la probabilidad de que

(i) no haya ningún par completo de zapatos.

(ii) haya exactamente un par completo de zapatos.

P7. Repartimos al azar 52 cartas entre 4 jugadores (naipe inglés). Cuál es la probabilidad de que

(i) uno de los jugadores reciba los 13 corazones.

(ii) cada jugador reciba un as.

P8. Sea un borracho parado en la recta de los enteros. El borrado cada paso se mueve a la derecha o a la izquierda, con probabilidad p y $1-p$, respectivamente. Asumiendo que el borracho parte desde el 0, calcule la probabilidad de que en el paso n el borracho esté nuevamente en el 0.

P9. Demuestre combinatorialmente (es decir, busque algo que contar y argumente que los dos lados de la identidad son formas distintas de contar la misma cosa) que

(i)
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1} \qquad \forall n \geq 1.$$

(ii)
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}k^2 = 2^{n-2}n(n+1) \qquad \forall n \geq 1.$$

(iii)
$$\sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{i} = \binom{n}{i}2^{n-i} \qquad \forall n \geq 1,\ \forall i \leq n.$$

(iv)
$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} \qquad \forall n \geq 1,\ \forall k \leq n.$$