Auxiliar 1: Matemáticas Discretas para la Computación

Profesor: Pablo Barceló
Auxiliares: Javiera Urrutia - Mauro Escobar
23 de marzo de 2011

P1. Muestre que existen Σ y α tal que $\Sigma \not\models \alpha$ y $\Sigma \not\models \neg\alpha$.

P2. Sean $\Sigma \subset L(P)$, $\phi, \theta, \alpha \in L(P)$. Pruebe que si $\phi \to \alpha$ es una tautología, entonces

$$\Sigma \cup \{\phi, \alpha\} \models \theta \;\Leftrightarrow\; \Sigma \cup \{\phi\} \models \theta.$$

P3. Sea $\Sigma \subset L(P)$, con $|P| = \infty$. Decimos que Σ es finitamente satisfacible si todo subconjunto finito de Σ es satisfacible. Sea $p \in P$, muestre que si Σ es finitamente satisfacible, entonces $\Sigma \cup \{p\}$ es finitamente satisfacible o $\Sigma \cup \{\neg p\}$ es finitamente satisfacible.

P4. Decimos que una fórmula está en CNF si es de la forma

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n_i} l_{ij}.$$

Además, decimos que una fórmula está en 3-CNF si $n_i = 3$, $\forall i$. Pruebe que para toda fórmula α en CNF, existe otra fórmula β en 3-CNF tal que α es satisfacible si y solo si β es satisfacible.

P5. Sea G un grafo. Un conjunto $I \subset V(G)$ se dice independiente si ningún par de vértices en I está conectado por un arco de G. Pruebe que para toda fórmula α en 3-CNF, existe un grafo G tal que α es satisfacible si y solo si G tiene un conjunto independiente I de tamaño al menos m, donde m es el número de cláusulas de α.