

TRANSFERENCIA DE MOMENTUM

MI3010-1 Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva
Prof. Dr. Leandro Voisin A.

Clase # 8

Ejemplo 9

Calcular la velocidad promedio a la cual se mueve un flujo de lava de espesor de 0,5 m bajando por una montaña con un ángulo de 5° respecto a la horizontal. La lava está a una temperatura de 1200 °C, densidad de 2700 kg/m³ y una viscosidad de 25 pa*s.

Solución:

- En esta situación se puede asumir estado estacionario y se puede usar la ecuación desarrollada para un plano inclinado para calcular la velocidad promedio de la lava.
- La velocidad obtenida es mucho más rápida que la velocidad apreciada por los seres humanos.
- No obstante se debe considerar: la velocidad de enfriamiento que aumenta la viscosidad y las singularidades de la montaña que inducen alguna turbulencia y bajan ligeramente las velocidades.

$$u_{prom} = \frac{\rho \operatorname{sen}(\theta) g h^2}{3 \mu} = \frac{2700 * 0,087 * 9,8 * 0,5^2}{3 * 25} \frac{m}{s} = 7,7 \frac{m}{s}$$

Otras aplicaciones de la ecuación de Bernoulli

Aeroplano

- El ascenso requerido por un avión para despegar y volar es debido a las diferencias de presión del aire sobre las alas y bajo estas. Como el avión es empujado hacia adelante por los motores el aire fluye rápidamente por sobre y bajo las alas.
- El diseño de las alas es tal que el aire que fluye sobre la superficie del ala tiene que moverse una distancia más larga que el que fluye bajo el ala.
- Si se ignora cualquier efecto de fricción ó cambios en la elevación se puede usar la ecuación de Bernoulli para describir el comportamiento del flujo:

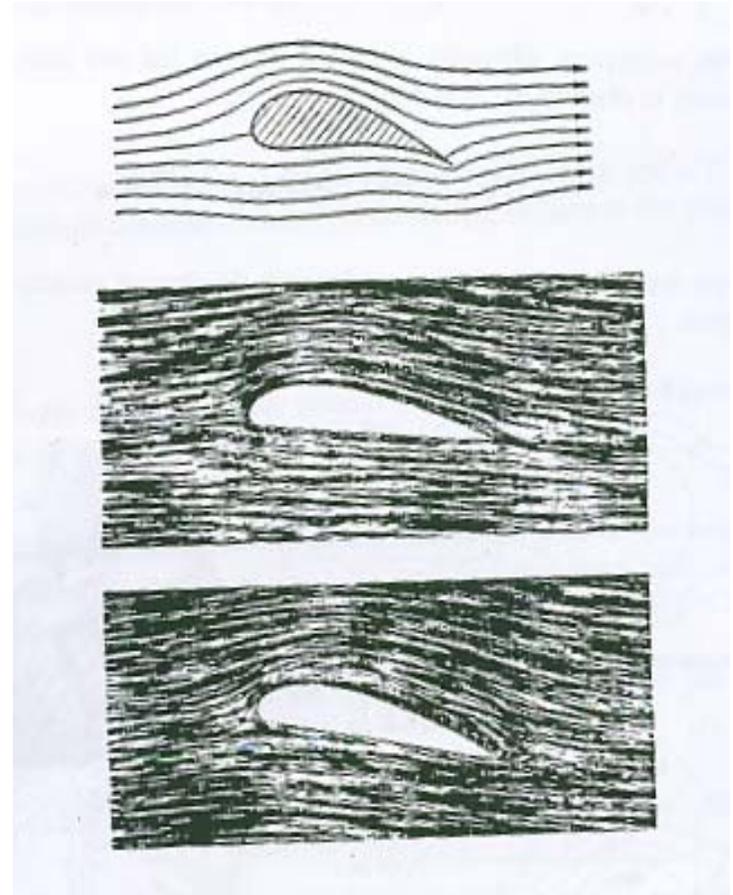


$$\frac{P_{\text{sup}} - P_{\text{inf}}}{\rho_{\text{aire}}} + \frac{1}{2} (u_{\text{sup}}^2 - u_{\text{inf}}^2) = 0$$

Otras aplicaciones de la ecuación de Bernoulli

- La velocidad del aire es más alta sobre el ala que la que está por debajo y la presión es mayor abajo que arriba por lo que las alas experimentan un ascenso.
- Un ala moviéndose a través del aire produce un flujo circulatorio proporcional al ángulo de ataque, el cual es más rápido en la parte superior que en la inferior.
- La deflexión hacia abajo del flujo de aire en el borde de salida produce una fuerza de reacción que también genera sustentación.

$$P_{\text{sup}} - P_{\text{inf}} = \frac{1}{2} (u_{\text{sup}}^2 - u_{\text{inf}}^2) \rho_{\text{aire}}$$



Ley de Stokes

- Cuando una esfera de un sólido es colocada en un fluido tiende a flotar ó se hunde dependiendo de su densidad relativa a la del fluido.
- La fuerza que condiciona el movimiento es la diferencia de densidad entre el sólido y el fluido.
- La resistencia al movimiento es el arrastre viscoso creado en el fluido en la vecindad de la esfera. En pequeñas esferas su velocidad rápidamente alcanza un valor constante llamado velocidad terminal (u_t).
- Para número de Reynolds bajo 0,1 la velocidad de sedimentación está dada por la diferencia de densidad y se conoce como ley de Stokes, siendo válida para un pequeño tamaño de partículas ($\approx 10 - 50 \mu\text{m}$)

$$\text{Re} = \frac{Du \rho}{\mu} = \frac{Du}{\nu}$$

$$u_t = \frac{2R^2(\rho_s - \rho)g}{9\mu}$$

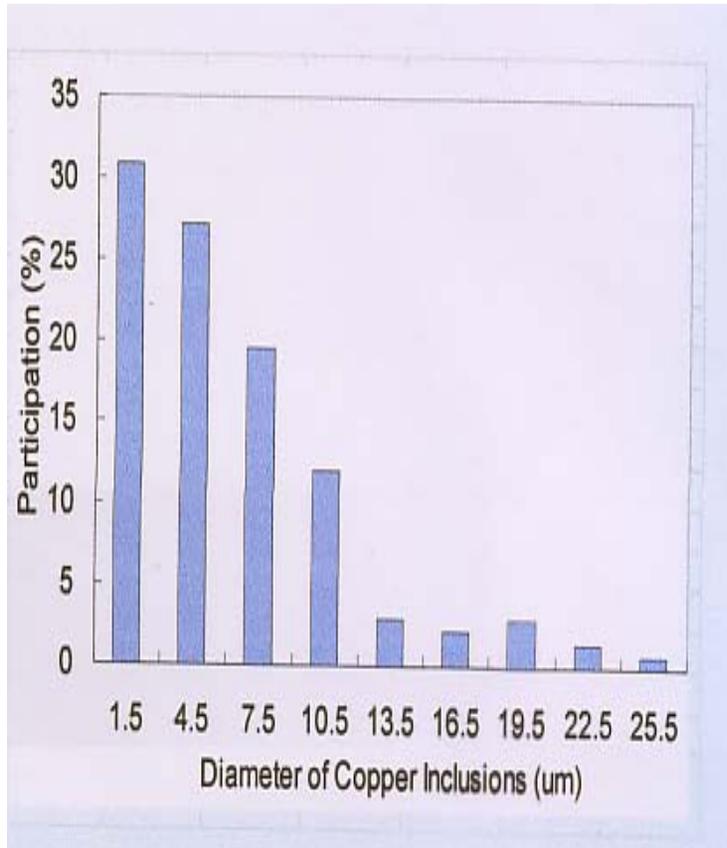
Ley de Hadamard-Rybczynski

- Cuando se da el caso, como por ejemplo de una gota de un líquido en otro líquido, ésta al igual que el sólido tiende a flotar ó se hunde dependiendo de su densidad relativa a la del fluido.
- La resistencia al movimiento es el arrastre viscoso creado en el fluido en la vecindad de la gota. En pequeñas esferas su velocidad rápidamente alcanza un valor constante llamado velocidad terminal (u_t).
- Para número de Reynolds bajo 0,1 la velocidad de sedimentación está dada por la diferencia de densidad y se conoce como ley de Hadamard-Rybczynski, siendo válida para un pequeño tamaño de gotas ($\approx 10 - 50 \mu\text{m}$)

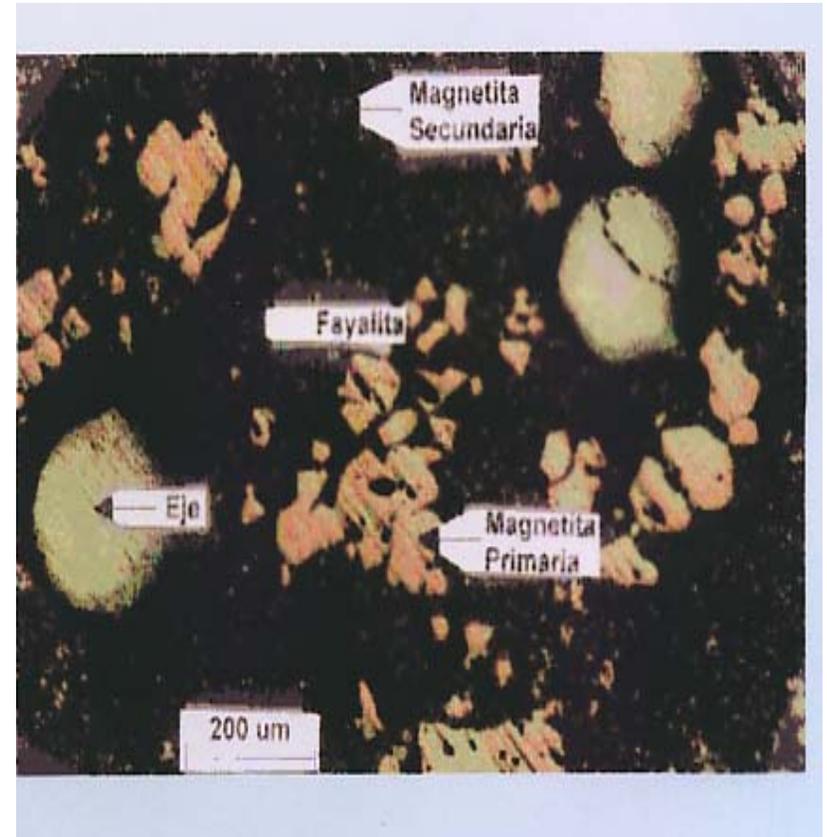
$$u_t = \frac{R^2(\rho_2 - \rho_1)g}{3\mu_1} * \frac{3\mu_1 + 2\mu_2}{3(\mu_1 + \mu_2)}$$

Sedimentación de gotas

Escorias de fusión de cobre



% de participación versus tamaño



Microfotografía escoria de fusión de cobre

Ejemplo 10

Calcular la tasa a la cual una partícula de alúmina de $20 \mu\text{m}$ asciende en un baño de acero. Acero líquido: $\rho = 7160 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,0061 \text{ kg/m}^*\text{s}$, Alúmina: $\rho = 3980 \text{ kg/m}^3$.

Solución: Se calcula la velocidad basados en la ley de Stokes y luego se comprueba si el número de Reynolds es menor ó igual a 0,1

$$u_t = \frac{2 * (10^{-5})^2 (3980 - 7160) * 9,8}{9 * 0,0061} = -0,00011 \frac{m}{s} = -6,8 \frac{mm}{min}$$

$$Re = \frac{Du \rho}{\mu} = \frac{20 * 10^{-5} * 0.11 * 10^{-3} * 7160}{0,0061} = 0,0027$$

Ejemplo 11

Calcular la tasa de sedimentación de inclusiones de mata de cobre en una escoria fayalítica. Mata de cobre: $\rho = 4900 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,003 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, Escoria: $\rho = 3600 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Dos tamaños de gotas de mata $R = 0,01 \text{ mm}$ y $R = 0,1 \text{ mm}$.

Solución: Se calcula la velocidad basados en la ley de Stokes y Hadamard- Rybcznski

$$u_t = \frac{2 * (0,01 * 10^{-6})^2 (4900 - 3600) * 9,8}{9 * 0,1} = 2,83 * 10^{-6} \frac{m}{s} = 2,83 \frac{\mu m}{s}$$

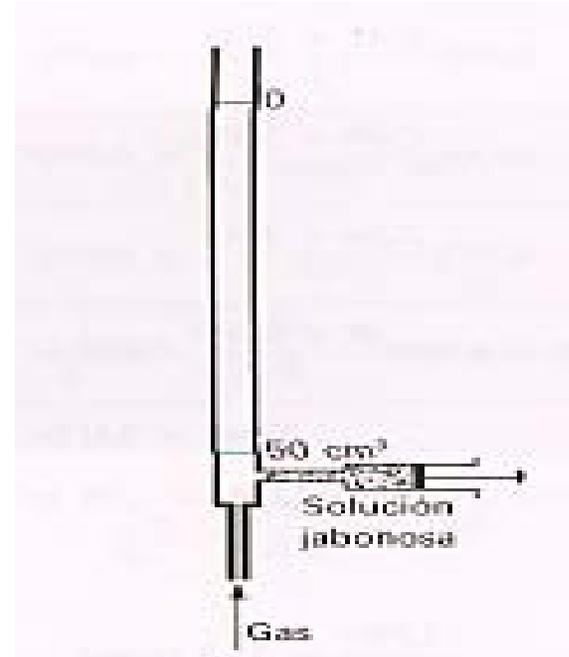
$$u_t = 283,1 \frac{\mu m}{s}$$

$$u_t = \frac{(0,01 * 10^{-3})^2 (4900 - 3600) * 9,8}{3 * 0,1} * \frac{3 * 0,1 + 2 * 0,003}{3(0,1 + 0,003)} = 4,2 * 10^{-6} \frac{m}{s} = 4,2 \frac{\mu m}{s}$$

$$u_t = 420 \frac{\mu m}{s}$$

Mediciones del flujo de fluidos

- En principio el más simple y más preciso método de medición del flujo de fluidos es determinar el tiempo requerido por el fluido para llenar un contenedor de volumen conocido.
- El flujo volumétrico se calcula dividiendo el volumen del envase por el tiempo requerido para llenarlo.
- Esto es impracticable en muchas de las aplicaciones y a menudo se usa para calibrar otros “medidores de flujo”
- Por ejemplo, en laboratorio se usa el método de la burbuja para medir el caudal de gas. Así, lateralmente como se muestra en la figura se inyecta solución jabonosa a agua, y se mide el tiempo que precisa para pasar entre dos señales de la bureta. Si esta es de 50 cm^3 y el tiempo invertido en su desplazamiento es de 10 s, el caudal de gas es dado por:



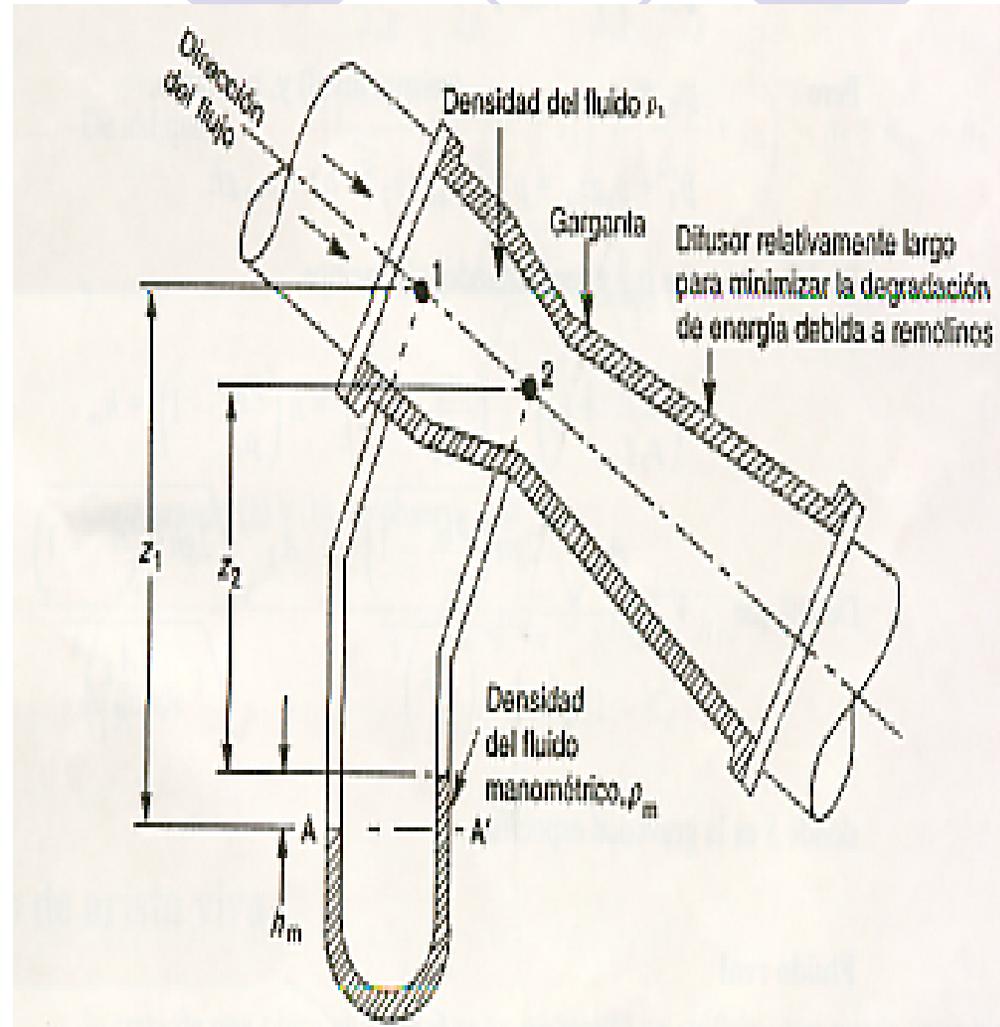
$$Q = \frac{V \text{ cm}^3}{t \text{ s}} = \frac{50}{10} = 5 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

Mediciones del flujo de fluidos - Venturi

- Este medidor de flujo se usa comúnmente para medir el flujo de líquidos.
- Es un tubo corto cuya sección disminuye gradualmente para formar una garganta de diámetro más pequeño. La altura dinámica ó cinética aumenta al acercarse a ésta ($u^2/2g$).
- Se usa un manómetro para medir la altura manométrica entre la entrada y la garganta.
- Para un fluido ideal el balance de energía mecánica puede ser simplificado:

$$\frac{1}{2g}(u_2^2 - u_1^2) = \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) = h_m$$

- Siendo h_m denominada altura manométrica



Mediciones del flujo de fluidos

Para $\rho = Cte$ $A_1 u_1 = A_2 u_2$

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = \frac{u_2^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] = h_m$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{2gh_m}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2}} \quad Q = A_2 u_2 = \frac{A_2 \sqrt{2gh_m}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2}}$$

Para un Venturi horizontal $z_1 = z_2$

$$h_m = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \quad Q = \frac{A_2 \sqrt{2 \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} \right)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2}}$$

Mediciones del flujo de fluidos

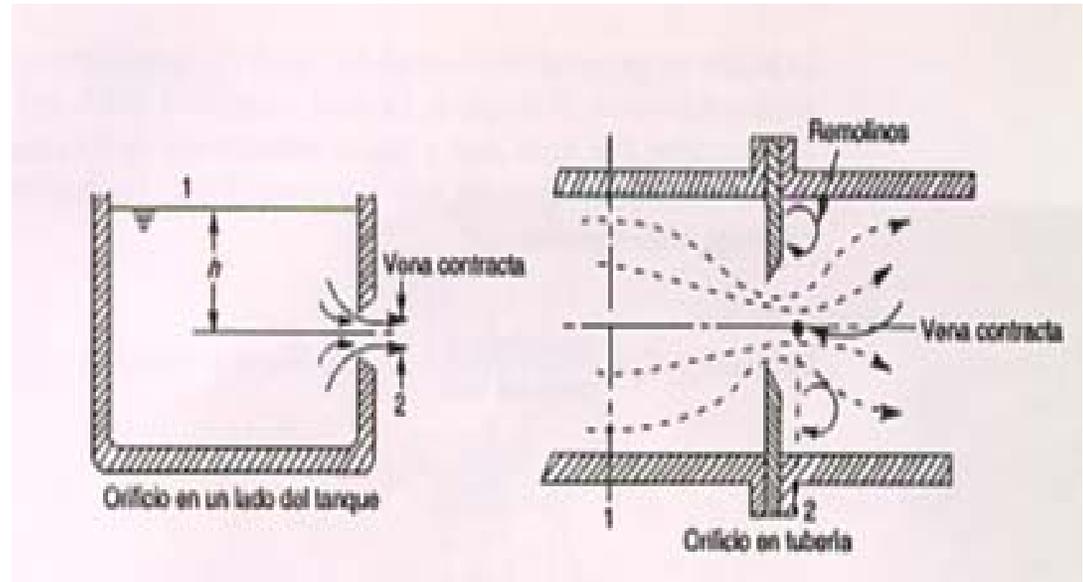
- La fricción por viscosidad entre la entrada del Venturi y la garganta provoca una pérdida de altura ó degradación de la energía.
- La altura manométrica será en consecuencia mayor que la correspondiente a un fluido ideal. Tanto la velocidad como el caudal serán irreales y deben corregirse.
- Definiendo C_u y C_D , como coeficientes de velocidad y descarga, respectivamente:

$$C_u = \frac{\text{velocidad real}}{\text{velocidad ideal}} \quad u_2 = \frac{C_u \sqrt{2gh_m}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$
$$C_D = \frac{\text{Caudal real}}{\text{Caudal ideal}} \quad Q = \frac{A_2 C_D \sqrt{2gh_m}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

En la realidad, C_u y C_D tienen valores cercanos a 0,97

Mediciones del flujo de fluidos – Placa orificio

- Las placas orificio son normalmente usadas para fluidos de líquidos
- Se instalan directamente en una tubería ó en un estanque.
- Es una placa que tiene un borde biselado.
- Después de pasar por el orificio el fluido se contrae una distancia corta aguas abajo antes de retomar la forma de lados paralelos.
- En esta sección de área mínima, la presión es uniforme se conoce con el nombre de vena contracta.



Mediciones del flujo de fluidos – Placa orificio

Orificio al lado de un estanque.

$$h = \frac{u_2^2}{2g} \quad \text{ó} \quad u_2 = \sqrt{2gh}$$

• De acuerdo a Bernoulli se tiene

$$Q = A_2 u_2 = A_2 C_u \sqrt{2gh}$$

Definiendo, C_C coeficiente de contracción $C_C = \frac{A_2}{A_0} = \frac{\text{área de la vena contracta}}{\text{área del orificio}}$

$$A_2 = A_0 C_C \quad Q = A_0 C_C C_D \sqrt{2gh}$$

$$C_D = \frac{\text{caudal real}}{\text{caudal ideal}} \quad C_D = \frac{A_0 C_C C_u \sqrt{2gh}}{A_0 \sqrt{2gh}} = C_C C_u$$

$$Q = A_0 C_D \sqrt{2gh}$$

Mediciones del flujo de fluidos – Placa orificio

Orificio en tubería.

• Al aplicar Bernoulli entre una sección aguas arriba y la vena contracta se obtiene un resultado similar al Venturi

• Sustituyendo A_2 por $A_0 C_C$ se obtiene:

• Por la complejidad de la ecuación se reduce a:

• Similar al Venturi

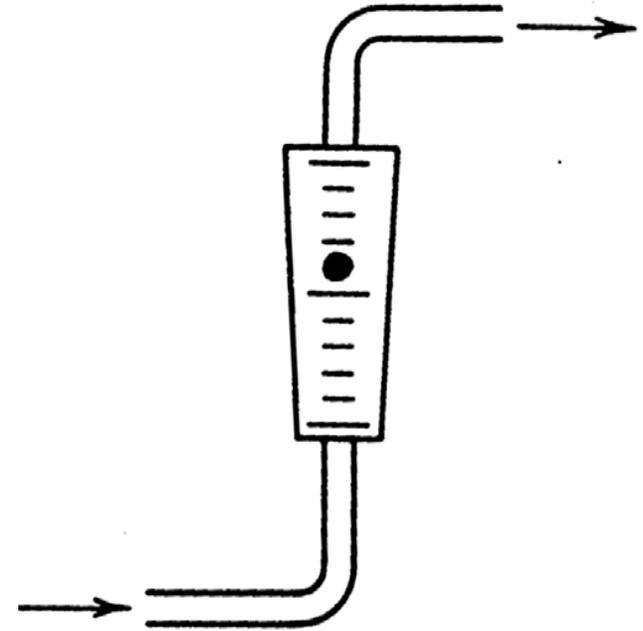
$$u_2 = \frac{C_u \sqrt{2gh_m}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \quad Q = \frac{A_2 C_u \sqrt{2gh_m}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

$$Q = \frac{A_0 C_C C_u \sqrt{2gh_m}}{\sqrt{1 - \left(C_C \frac{A_0}{A_1}\right)^2}} = \frac{A_0 C_D \sqrt{2gh_m}}{\sqrt{1 - C_C^2 \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2}}$$

$$Q = \frac{A_0 C_D \sqrt{2gh_m}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2}}$$

Mediciones del flujo de fluidos – Rotámetro

- *Es un tubo vertical taponado por ambos lados conteniendo una esfera flotante. El área seccional del tubo es menor en su base y se incrementa con la altura.*
- *La esfera flota con el fluido y es mayor con flujos más altos. Por un cambio del tamaño y material de la esfera para un rotámetro dado es posible variar el rango de flujo.*
- *Los rotámetros pueden ser usados ya sea para líquidos ó gases, especial cuidado se debe tener con estos últimos debido a que la presión absoluta afectará la lectura. Se requiere una calibración del rotámetro según sea el caso.*



Mediciones del flujo de fluidos – Flujo metro Másico

- Los flujo metros másicos electrónicos miden el flujo másico verdadero de un gas por medición del incremento de temperatura para un suministro de calor establecido
-
- El gas (o parte de éste) a ser medido fluye a través de un tubo sensible manufacturado de precisión. Cuando el gas pasa por el tubo sensor, su temperatura es medida, en seguida el gas es calentado y su temperatura nuevamente medida. La temperatura ganada por el gas es inversamente proporcional a su flujo.
- Usando una probeta de inmersión calentada, el flujo de gas puede ser medido por el enfriamiento de la probeta por el gas. Debido a que el coeficiente de transferencia de calor aumenta con el aumento de la tasa de flujo másico, éste puede ser determinado por medición de la diferencia de temperatura entre una probeta calentada y una probeta de referencia (no calentada) que es también colocada en la corriente de gas.

Mediciones del flujo de fluidos – Flujometro Magnético

- .
- *Los flujómetros magnéticos son de gotas de baja presión, volumétricos, y son instrumentos de medición de flujo líquido basados en la ley de Faraday.*
- *Esta ley indica que el voltaje inducido a través de un conductor se mueve en un ángulo recto por un campo magnético siendo proporcional a la velocidad del conductor.*
- *Los flujómetros magnéticos pueden ser usados sólo con líquidos conductores. La conductividad de un líquido es una función de las impurezas, concentraciones, así como de la temperatura por lo que es importante conocer de manera precisa las propiedades del fluido para usar esta técnica*