Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería de Minas
MI3010 - Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva
Semestre - Primavera 2010

Profesor Leandro Voisin

Auxiliar Yerko Yavar D.
Ayudantes Viviana Pavez
Exequiel Marambio

Auxiliar Extra

Miércoles 22 de Septiembre de 2010

- **Problema N°1**

En una planta Hidrometalúrgica se tiene un estanque elevado conectado a un estanque de grandes dimensiones mediante una tubería de diámetro D y largo L. El estanque elevado (A) contiene una altura de concentrado liquido H y descarga un caudal desconocido hacia el estanque de grandes dimensiones (B). El extremo inferior de la tubería se encuentra sumergido una profundidad h. Suponiendo que el nivel de concentrado en el estanque inferior permanece siempre constante, considerando régimen permanente y flujo laminar, se le solicita:

(a) Determinar el gradiente de presión motriz entre los sistemas A y B en la tubería, de acuerdo a la Figura 1 (esquema 1).

(b) Determinar el caudal Q que debe agregarse al estanque elevado para que el nivel de concentrado permanezca constante en dicho estanque y el (o los) esfuerzo (s) percibidos por la tubería.

(c) Considere ahora que se coloca una cable de diámetro d en el eje longitudinal de la tubería tal como se muestra en la Figura 1 (esquema 2). Si el cable es tirado hacia arriba con velocidad constante U_0, determinar el nuevo caudal Q que debe agregarse al estanque superior para que el nivel de concentrado en dicho estanque permanezca constante. Suponga que la longitud del cable es mucho mayor que el largo de la tubería de modo que se alcanza régimen permanente en la operación.

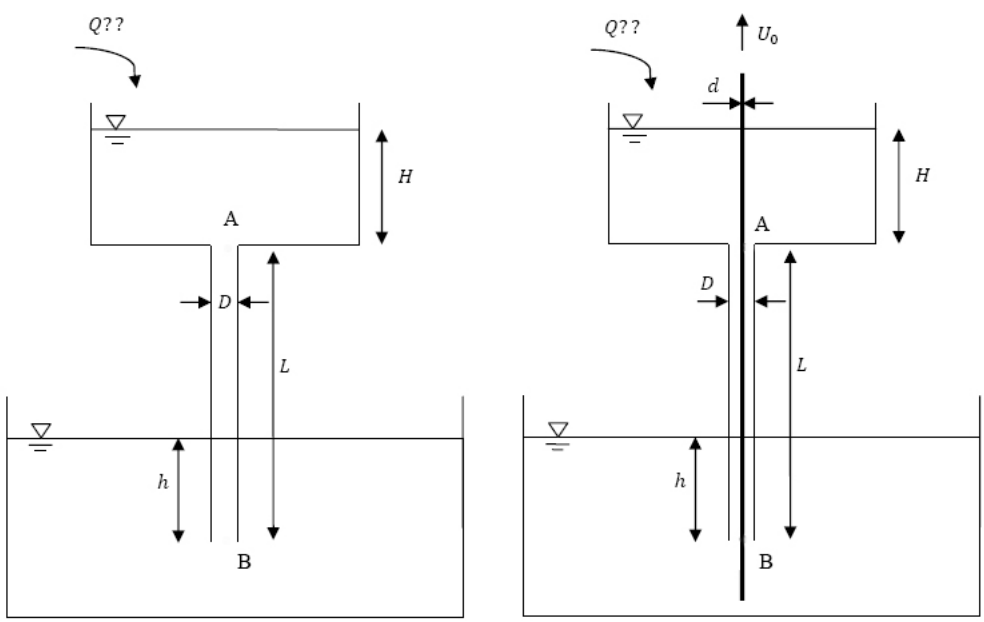

Figura 1: Esquema 1 (izquierda) y Esquema 2 (derecha).

- **Problema N°2**

  A usted, como experto metalúrgico, se le pide analizar el comportamiento cinemático de una mata (1) y una escoria (2) liquidas a través de ductos que conectan distintos hornos. Para ello, dispone en laboratorio de un sistema como se muestra en la figura 2, el cual, posee ambos fluidos Newtonianos incompresibles, con densidades ρ_1 y ρ_2 y viscosidades dinámicas μ_1 y μ_2, respectivamente. Ambos fluidos son inmiscibles, por lo tanto, no existe contacto entre ellos. La estructura está formada por dos torres, A y B, donde la torre A se encuentra abierta a la atmósfera y la otra cerrada cuyo interior contiene un gas a presión P_i generado por la misma escoria. Las torres se encuentran unidas por dos ductos concéntricos de sección circular, de radios r_1 y r_2, respectivamente (ver Figura 2).

  Considere que ambas torres son lo suficientemente grandes ($D_1 \gg 2r_1$ y $D_2 \gg 2r_2$), y que el tramo de los ductos horizontales es lo suficientemente largo como para despreciar efectos de borde en su entrada y salida. Se desea estudiar el flujo dentro de los ductos para la situación mostrada en la Figura 2. En base a los antecedentes entregados, se le pide:

  (a) Determinar el campo de velocidad para ambos ductos. Indique claramente los supuestos hechos.

  (b) Determinar el flujo neto que circula entre estanques en función de P_i.

  (c) Determine el valor del flujo neto entre estanques si $P_i = 0$.

  (d) ¿Cómo plantearía el problema si sabe que P_i es mucho mayor que el resto de las presiones involucradas en el análisis? Esquematice el flujo neto en función de P_i.

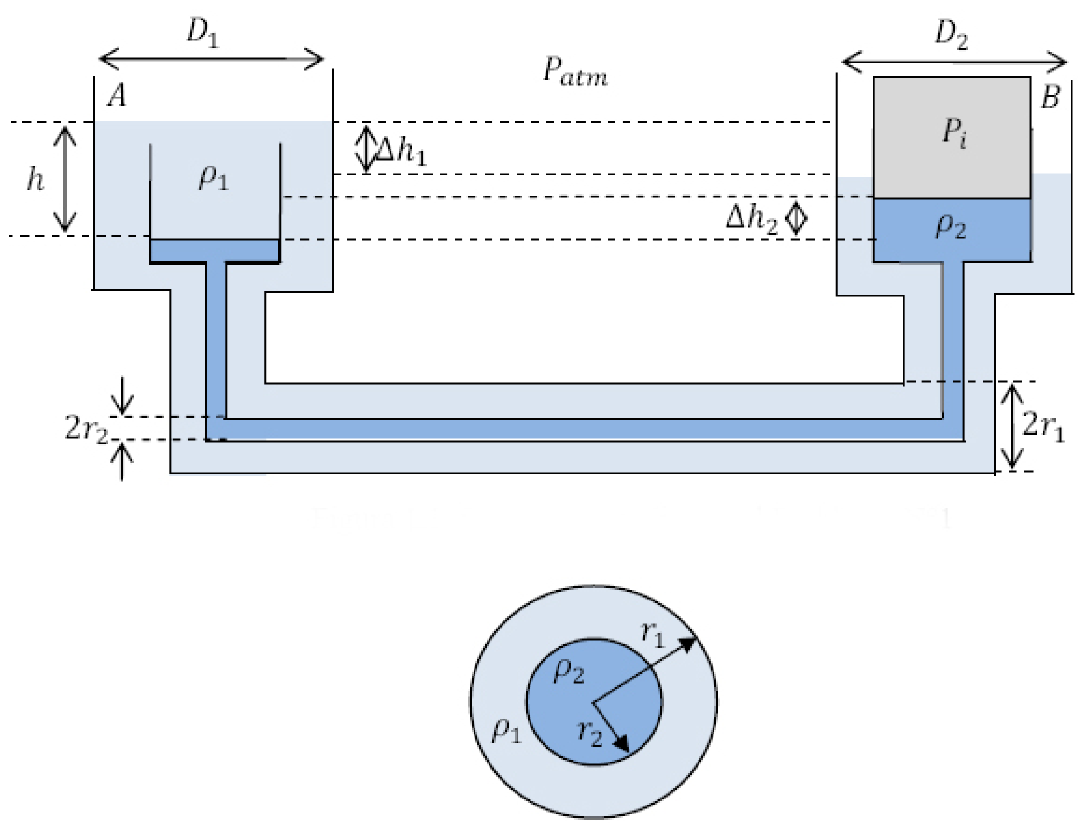

Figura 2: Sistema a estudiar y vista transversal ductos concéntricos.

- **Solución Problema N°1**

  (a) Considerando un sistema de referencia en coordenadas cilindricas con origen en la tubería del estanque elevado (A), con el eje z creciendo hacia abajo. La presion motriz entre el sistema A y B no es mas que la diferencia entre las alturas de ambos estanques ponderada por el peso especifico del concentrado γ, no se tiene presión hidrostática en este caso. Luego, segun el sistema de coordenadas dado:

  $$\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = \frac{\Delta \hat{p}}{\Delta z} = \frac{-\gamma(H+L-h)}{L}$$

  En este caso, el gradiente de presion motriz con respecto a z es constante e independiente de r y θ, en efecto:

  $$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial z}\right) = 0$$

  $$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial z}\right) = 0$$

  El signo $(-)$ viene dado por la dirección del flujo, siendo el estado final donde la presión es γh (sistema B) y el estado inicial donde la presión es $\gamma H + \gamma L$ (sistema A).

  (b) Consideremos la ecuación de continuidad en coordenadas cilindricas:

  $$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

  Considerando la simetria del problema, no hay velocidades en r ni en θ, por lo que se tiene:

  $$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

  Es decir, el flujo es uniforme en z. Para determinar la distribución de velocidades, consideremos la ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilindricas:

  - Según r:

  $$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]$$

  - Según θ:

  $$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right]$$

  - Según z:

  $$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

  Así, considerando regimen permanente (estacionario), flujo uniforme en z y que $v_r = v_\theta = 0$, las ecuaciones anteriores se reducen a las siguientes:

  - Según r:

  $$\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = 0$$

  - Según θ:

  $$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} = 0$$

  - Según z:

  $$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \hat{p}}{\partial z}$$

Donde, la ecuación según z se puede reescribir como:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial \hat{p}}{\partial z}$$

y como concluimos de (a) que el gradiente de presión motriz en z es constante con respecto a r, la ecuación anterior se puede integrar directamente con respecto a r.

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)=r\frac{1}{\mu}\frac{d\hat{p}}{dz}$$

$$r\frac{dv_z}{dr}=\frac{1}{\mu}\frac{d\hat{p}}{dz}\frac{r^2}{2}+C_1$$

$$v_z(r)=\frac{1}{2\mu}\frac{d\hat{p}}{dz}\frac{r^2}{2}+C_1\ln(r)+C_2$$

Para determinar las constantes C_1 y C_2, se deben imponer las condiciones de borde. En este caso:

$$r=0\ ;\ v_z\ es\ finita\ \Rightarrow C_1=0$$

$$r=\frac{D}{2}\ ;\ v_z=0$$

Entonces, la distribución de velocidades es:

$$v_z(r)=-\frac{1}{4\mu}\frac{d\hat{p}}{dz}\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2-r^2\right]$$

$$v_z(r)=-\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\gamma(h-H-L)}{L}\right)\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2-r^2\right]$$

El caudal Q está dado por:

$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^{D/2}v_z(r)rdrd\theta=-\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\gamma(h-H-L)}{L}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{D/2}\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2-r^2\right]rdrd\theta$$

Resolviendo la integral, se tiene que el caudal que debe agregarse al estanque superior (A) es:

$$Q=-\frac{\pi}{4\mu}\left(\frac{\gamma(h-H-L)}{L}\right)\left(\frac{D}{2}\right)^4$$

Ahora, para calcular los esfuerzos que percibe la tubería, recordamos que en coordenadas cilindricas las componentes del tensor de esfuerzos para un fluidos se escriben como:

- τ_{rr}:

$$\tau_{rr}=-\mu\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{3}(\nabla\cdot\vec{v})\right]$$

- $\tau_{\theta\theta}$:

$$\tau_{\theta\theta}=-\mu\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}\right)-\frac{2}{3}(\nabla\cdot\vec{v})\right]$$

- τ_{zz}:

$$\tau_{zz}=-\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{2}{3}(\nabla\cdot\vec{v})\right]$$

- $\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}$:

$$\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}=-\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]$$

- $\tau_{\theta z}=\tau_{z\theta}$:

$$\tau_{z\theta}=\tau_{\theta z}=-\mu\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\right]$$

◦ $\tau_{rz} = \tau_{zr}$:

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right]$$

Pero, de la continuidad y los supuestos hechos anteriormente, encontramos que solo existen los esfuerzos de corte τ_{rz} y τ_{zr}, los cuales son identicos y responden a la ecuación de la viscosidad de Newton, luego:

$$\tau_{rz} = -\mu\frac{\partial v_z}{\partial r}$$

y derivando el perfil de velocidades con respecto a r, se obtiene:

$$\tau_{rz} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma(h-H-L)}{L}\right)r$$

(c) En este caso, cambian las condiciones de borde a imponer en el perfil de velocidades obtenido directamente de la integración:

$$v_z(r) = \frac{1}{2\mu}\frac{d\hat{p}}{dz}\frac{r^2}{2} + C_1\ln(r) + C_2$$

$$r = \frac{d}{2}\ ;\ v_z = U_0$$

$$r = \frac{D}{2}\ ;\ v_z = 0$$

Entonces, las constantes C_1 y C_2 en este caso quedan:

$$C_1 = \frac{U_0 - \frac{1}{4\mu}\frac{d\hat{p}}{dz}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]}{\ln\left(\frac{d}{D}\right)}$$

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu}\frac{d\hat{p}}{dz}\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{U_0 - \frac{1}{4\mu}\frac{d\hat{p}}{dz}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]}{\ln\left(\frac{d}{D}\right)}\right)\ln\left(\frac{D}{2}\right)$$

Reemplazando se obtiene el nuevo perfil de velocidades para el caso estudiado:

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\mu}\frac{d\hat{p}}{dz}\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 - r^2\right] + \left(\frac{U_0 - \frac{1}{4\mu}\frac{d\hat{p}}{dz}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2\right]}{\ln\left(\frac{d}{D}\right)}\right)\left[\ln(r) - ln\left(\frac{D}{2}\right)\right]$$

Al igual que el caso anterior, el caudal que debe agregarse al estanque superior es el mismo que escurre por la tubería. Luego el nuevo caudal de interes es:

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_{d/2}^{D/2} v_z(r)rdrd\theta$$

Resolviendo la integral, se tiene que el caudal es:

$$Q = -\frac{\pi}{4\mu}\frac{d\hat{p}}{dz}\left\{\frac{(D/2)^4}{2} - \frac{(dD)^2}{16} + \frac{(d/2)^2}{2}\right\}$$
$$+\pi C_1\left\{(D/2)^2\left(\ln(D/2) - \frac{1}{2}\right) - (d/2)^2\left(\ln(d/2) - \frac{1}{2}\right) - \ln(D/2)\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\right\}$$

- **Solución Problema N°2**

  (a) Como nos piden el estudiar el flujo en las tuberías, consideramos un sistema de coordenadas cilíndrico con origen en el centro del tubo de radio r_2, $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{x})$, en este caso da igual en donde pongamos en origen (en cualquiera de los dos extremos), pues la dirección del flujo (gracia del problema) quedara determinada por los gradientes de presiones.

  Consideramos un flujo laminar, incompresible, permanente (estacionario) y unidireccional (solo en $\hat{x}$). Entonces, aplicando directamente estos conceptos a la continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes, se tiene:

  De la ecuación de continuidad se deriva que el flujo es uniforme en la dirección $\hat{x}$:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

  Y asumiendo que esto se cumple para cualquier ángulo θ dentro de la tubería, tenemos que las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a:

  - Según r:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = 0$$

  - Según θ:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} = 0$$

  - Según x:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{1}{\mu_i}\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}$$

  Luego, sabemos que la solución de esta última ecuación a través de la integración directa es:

$$v_x^j(r) = \frac{1}{2\mu_j}\frac{d\hat{p}_j}{dx}\frac{r^2}{2} + C_1^j \ln(r) + C_2^j$$

  Donde, el índice j indica si es mata ($j = 1$) o escoria ($j = 2$) y $\hat{p_j} = p_j + \rho_j g h$ es la presión motriz de cada una.

  Luego, consideramos las condiciones de borde de cada ducto para determinar el perfil de velocidades de la mata y la escoria:

  - Para r_2, ($j = 2$): Las condiciones de borde son: $v_x^2(r = r_2) = 0$ y $v_x^2(r = 0) < \infty$, entonces se tiene el siguiente campo de velocidad:

$$v_x^2(r) = \frac{1}{4\mu_2}\frac{d\hat{p}_2}{dx}(r^2 - r_2^2)$$

  - Para r_1, ($j = 1$): Las condiciones de borde son: $v_x^1(r = r_1) = 0$ y $v_x^1(r = r_2) = 0$, entonces se tiene el siguiente campo de velocidad:

$$v_x^1(r) = \frac{1}{4\mu_1}\frac{d\hat{p}_1}{dx}(r^2 - r_1^2) + \frac{1}{4\mu_1}\frac{d\hat{p}_1}{dx}(r_2^2 - r_1^2)\left(\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\right)^{-1}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

  Ahora, tenemos que obtener la presión motriz para cada ducto:

  - Para el ducto de radio r_1: Debemos considerar el efecto de la presión atmosférica y la diferencia de cota (altura) de la escoria, de densidad ρ_2:

$$\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial x} = -\frac{\gamma_1 \Delta h_1}{L}$$

  - Para el ducto de radio r_2: Debemos considerar el efecto de la presión atmosférica, la diferencia de cota (altura) de la escoria y la mata, de densidad ρ_2 y ρ_1, respectivamente, y la presión interna del gas generado por la escoria P_i:

$$\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial x} = \frac{P_i - P_{atm} + \gamma_2 \Delta h_2 - \gamma_1 h}{L}$$

Obteniendo estos gradientes se caracteriza totalmente el campo de velocidades de ambos ductos (para la obtención de los gradientes traten de hacer el mismo análisis que para el ejercicio 1). $\gamma_i = \rho_i g$ es el peso especifico de cada fluido.

(*b*) El flujo neto o caudal Q_i que circula entre los estanques se obtiene al integrar el campo de velocidades obtenido para cada ducto, luego:

- Para el ducto de radio r_2:

$$Q_2 = \int_0^{r_2} \int_0^{2\pi} v_x^2(r) r d\theta dr = -\frac{\pi}{8\mu_2} \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial x} r_2^4$$

- Para el ducto de radio r_1:

$$Q_1 = \int_{r_2}^{r_1} \int_0^{2\pi} v_x^1(r) r d\theta dr = -\frac{\pi}{8\mu_1} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial x} (r_1^2 - r_2^2)^2 - \frac{\pi}{8\mu_1} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial x} (r_1^2 - r_2^2) \left(\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \right)^{-1} \left[r_1^2 - r_2^2 - 2r_2^2 \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \right]$$

Se puede observar que el caudal Q_2 depende directamente de la presión interna del gas P_i, mientras que el caudal Q_1 no depende de esa presión.

(*c*) El único caudal que cambia si la presión del gas $P_i = 0$ es el caudal Q_2, luego:

$$Q_2 = -\frac{\pi}{8\mu_2} \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial x} r_2^4 = -\frac{\pi}{8\mu_2} \frac{(-P_{atm} + \gamma_2 \Delta h_2 - \gamma_1 h)}{L} r_2^4$$

Dependiendo del signo de $(P_i - P_{atm} + \gamma_2 \Delta h_2 - \gamma_1 h)$, si la presión inicial era positiva, entonces el caudal puede ser mayor, pero en sentido contrario. Si la presión era negativa, el caudal puede ser menor pero en el mismo sentido o en el sentido contrario, dependiendo de la importancia del termino $\gamma_2 \Delta h_2$.

(*d*) Si $P_i \gg \gamma_2 \Delta h_2$ y $P_i \gg \gamma_1 h$, entonces:

$$Q_2 = -\frac{\pi}{8\mu_2} \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial x} r_2^4 = -\frac{\pi}{8\mu_2} \frac{(P_i - P_{atm})}{L} r_2^4$$

Luego el flujo va en el sentido desde B hacia A, es decir, el gas mueve la escoria y ésta mueve la mata.