Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería de Minas
MI3010 - Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva
Semestre - Primavera 2010

Profesor Leandro Voisin

Auxiliar Yerko Yavar D.
Ayudantes Viviana Pavez
Exequiel Marambio

Fundamentos Generales de Cinemática y Dinámica de Fluidos

1. Clasificación de Tipos de Escurrimiento

- **Flujo Laminar y Flujo Turbulento**

  Definido por el numero de Reynolds:

$$\boxed{Re = \frac{D \cdot \bar{v}}{\nu}}$$

  ◦ Donde :
  - D: Diámetro de la cañería ó diámetro equivalente en otro tipo de geometría.
  - $\bar{v}$: Velocidad Media del fluido.
  - ν: Viscosidad cinemática del fluido.

  Luego:

Régimen	**Cañería**	**Placa Plana**
Laminar	$Re < 2100$	$Re < 3 \times 10^5$
Régimen de Transición		
Turbulento	$Re > 4000$	$Re > 3 \times 10^6$

- **Flujo Permanente e Impermanente**

  Flujo permanente se define como aquel en que las condiciones de flujo en cualquier punto del espacio permanecen constantes en el tiempo, luego:

$$\boxed{\frac{\partial N}{\partial t} = 0}$$

  ◦ Donde :
  - N: Es una propiedad del fluido (generalmente velocidad, temperatura o masa).

  Flujo Impermanente se define de forma contraria.

- **Flujo Uniforme o Variado**

  Un flujo es uniforme si sus propiedades no cambian en el espacio (o dirección del espacio), de lo contrario se denomina variado.

  Por ejemplo, para el flujo entre placas planas paralelas existe un perfil lineal de velocidad longitudinal, y por lo tanto la velocidad es variada (no uniforme) si consideramos la dirección perpendicular a las placas, pero uniforme en la dirección longitudinal paralela a las placas (plano paralelo), ya que claramente no varía en esa dirección.

- **Flujo Compresible e Incompresible**

  Flujo Incompresible se define como aquel en que la densidad es una constante, luego:

  $$\boxed{\rho = cte}$$

  Flujo Comprensible se define de forma contraria.

- **Flujo Rotacional e Irrotacional**

  Flujo Irrotacional se define como aquel en que la vorticidad del fluido es nula, luego:

  $$\boxed{\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0}$$

  - Donde :

  - $\vec{v}$: Es el vector de velocidades del fluido.
  - $\vec{\omega}$: Es la vorticidad del fluido.

  Flujo Rotacional se define de forma contraria.

- **Flujo Ideal y Real**

  Flujo Ideal es aquel que su viscosidad es nula, es decir:

  $$\boxed{\mu = 0}$$

  Flujo Real se define de forma contraria.

2. Caracterización del Movimiento de un Fluido

2.1. Método de Lagrange

Se basa en la descripción del movimiento de cada partícula del fluido, así la variable relevante es la posición $\vec{r} = x_p\hat{i} + y_p\hat{j} + z_p\hat{k}$ de cada una en el tiempo.

Luego la velocidad, $\vec{v}$, esta dada por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx_p}{dt}\hat{i} + \frac{dy_p}{dt}\hat{j} + \frac{dz_p}{dt}\hat{k}$$

y por ende, la aceleración, $\vec{a}$, queda como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x_p}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y_p}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z_p}{dt^2}\hat{k}$$

2.2. Método de Euler

Se basa en la asignación de un campo de velocidades al espacio, independiente del número de partículas del fluido. Luego, la variable relevante es la velocidad $\vec{v} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$, la cual depende del espacio $\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y del tiempo t.

Ahora, es claro que el campo de flujo es el mismo independiente del método usado, por lo que cuando se observa un punto del espacio según el método de Euler, la velocidad que debiera obtenerse en un instante de tiempo t debiera ser la misma de la partícula de fluido que, según Lagrange, en ese instante esta pasando por el punto del espacio observado.

Aplicando la condición anterior, es posible obtener una expresión para la aceleración, $\vec{a}$, según el método de Euler:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Pero, del método de Lagrange sabemos que:

$$u = \frac{dx}{dt}\ ,\ v = \frac{dy}{dt}\ ,\ w = \frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

- **Derivada Material**

  Definimos el operador Derivada Material como:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla}$$

Luego, la aceleración según el método de Euler queda:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$$

- **Generalización del Resultado**

  En general, el cambio total temporal de cualquier propiedad del fluido $N(\vec{x},t)$ queda dado por:

$$\boxed{\frac{DN}{Dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)N}$$

3. Teorema del Transporte de Reynolds

3.1. Definiciones Básicas

- **Volumen de Control**

  Definimos el volumen de control como un volumen de fluido, convenientemente identificado, fijo en el espacio (Método de Euler), que conceptualmente aislaremos del medio circundante a través de la superficie S que delimita dicho volumen. Luego, vemos que el fluido puede atravesar la superficie S del volumen de control, produciendo así un recambio del fluido dentro del volumen de control.

- **Sistema Material**

  Definimos el sistema material como un conjunto fijo de partículas tal que el volumen que ocupan en el espacio es función del tiempo, ya que puede ser afectado y/o deformado por el flujo. Se caracteriza un sistema material por que sus partículas siempre son las mismas, salvo que las propiedades de éstas pueden variar en el tiempo.

3.2. Enfoque Integral

Consideremos un sistema material y un volumen de control V. Consideremos, además, una propiedad extensiva del flujo (depende de la cantidad de materia), N. Veamos entonces la variación total, en el tiempo, de N dentro del volumen de control. Tomando como referencia dos instantes de tiempo t y $t+\Delta t$. Entonces, la tasa de cambio de la propiedad N en V esta dada por:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

lo que es equivalente a:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = lim_{\Delta t \to 0} \left(\underbrace{\frac{N_{II}(t+\Delta t) - N_{II}(t)}{\Delta t}}_{R} + \underbrace{\frac{N_I(t+\Delta t)}{\Delta t}}_{A} - \underbrace{\frac{N_{III}(t)}{\Delta t}}_{B} \right)$$

- Donde :

- R: Corresponde a los cambios en el valor de la propiedad N dentro del volumen de control (sistema material II). Puede ser nulo o no.
- A: Corresponde a la tasa de entrada de N a V (sistema material I).
- B: Corresponde a la tasa de salida de N de V (sistema material III).

Ahora, como las tasas de entrada y salida están definidas en términos de sistemas materiales, podemos decir que éstas se deben a la velocidad del flujo que afecta los sistemas materiales I y III. Luego, diremos que V contempla dos superficies, $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$, por donde entran y salen las partículas de V respectivamente. Entonces, si tomamos elementos de área $d\vec{S}_1$ y $d\vec{S}_2$, respectivamente, vemos que las tasas a la cuales son atravesadas por partículas de fluido quedan determinadas por $\vec{v}_1 \cdot \hat{n}_1 d\vec{S}_1$ y $\vec{v}_2 \cdot \hat{n}_2 d\vec{S}_2$, respectivamente. Así, las tasas a las cuales la masa de fluido atraviesa estos elementos de superficie es: $\rho_1 \vec{v}_1 \cdot \hat{n}_1 d\vec{S}_1$ y $\rho_2 \vec{v}_2 \cdot \hat{n}_2 d\vec{S}_2$, respectivamente.

Luego, la tasa neta de salida de N de V $(B - A)$ es:

$$\int_S \eta \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_2} \eta_2 \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \hat{n}_2 d\vec{S}_2 + \int_{S_1} \eta_1 \rho_1 \vec{v}_1 \cdot \hat{n}_1 d\vec{S}_1$$

Reemplazando este resultado en la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = R - \int_S \eta \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

y, expresando N en términos de su propiedad intensiva η:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \eta \rho dV$$

Se obtiene el conocido teorema de transporte de Reynolds, que da cuenta de la variación de N en el volumen de control V:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \eta \rho dV + \int_S \eta \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS = R}$$

3.3. Enfoque Diferencial

Estudiemos la variación de la densidad ρ en un volumen de control infinitesimal dV, aplicando el teorema de transporte de Reynolds. Consideremos $\eta = 1$ y $R = 0$. Luego, el teorema de transporte de Reynolds se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV + \int_S \rho\vec{v}\cdot\hat{n}dS = 0$$

Pero, aplicando el teorema de la divergencia, el segundo término se reduce a:

$$\int_S \rho\vec{v}\cdot\hat{n}dS = \int_V \nabla\cdot(\rho\vec{v})dV$$

Ahora, usando este resultado y el hecho de que V no depende del tiempo, la primera ecuación queda:

$$\int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})\right) dV = 0$$

Lo que nos indica que el término dentro de la integral es una constante, que no puede ser otra que 0.

- **Ecuación de Continuidad de Masa**

  El término dentro de la integral anterior se conoce como ecuación de continuidad de masa:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla\cdot\vec{v}) = 0}$$

- **Ecuación de Continuidad o Conservación de Volumen**

  En el caso de que el fluido sea incompresible ($\rho = cte$), la ecuación de continuidad de masa se transforma en la ecuación de continuidad:

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

- **Generalización del Resultado**

  Si hacemos el mismo análisis para una propiedad genérica N, tal que:

$$N = \int_V \rho\eta dV$$

  Obtenemos que:

$$\frac{\partial(\rho\eta)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\eta\vec{v}) = R_v$$
$$\Leftrightarrow \rho\frac{D\eta}{Dt} = R_v$$

  Donde R_v es una tasa de reacción que expresa la variación de la propiedad N por unidad de volumen y de tiempo, es decir, dicha propiedad N es "no conservativa".

4. Segunda Ley de Newton Aplicada al Movimiento de Fluidos

4.1. Principio de Conservación de Momentum

Podemos expresar la segunda ley de Newton sobre un volumen de control infinitesimal dV como:

$$dm\ \vec{a} = d\vec{F}$$

Donde, $dm = \rho dV$ es la masa de un elemento de fluido, y $\vec{a}$ es la aceleración que expresamos a partir del método de Euler:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$$

Luego, el termino izquierdo de la primera ecuación lo podemos reescribir como:

$$dm\ \vec{a} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right) dV$$

Ahora, si sumamos la ecuación de continuidad de masa (estamos sumando 0) a la ecuación anterior, obtenemos:

$$dm\ \vec{a} = \left(\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \vec{v} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) \right) \right) dV = \left(\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}\rho\vec{v}) \right) dV$$

Dado que el resultado anterior no es mas que expresar el teorema del transporte de Reynolds a la propiedad extensiva momentum $\rho\vec{v}$, concluimos que la segunda ley de Newton es equivalente al principio de conservación de momentum.

Por otro lado, $d\vec{F}$ es la resultante de las fuerzas externas actuando sobre el volumen de control, el cual lo podemos descomponer en dos grupos principales:

$$d\vec{F} = d\vec{F}_m + d\vec{F}_s$$

Donde, $d\vec{F}_m$ es el vector que da cuenta de las fuerzas masicas sobre el volumen de control, generalmente dado (salvo casos particulares) por el campo gravitatorio terrestre. Entonces:

$$d\vec{F}_m = \vec{g}\rho dV$$

y, $d\vec{F}_s$ son las fuerzas superficiales sobre el volumen de control, dadas por el tensor de esfuerzos τ_{ij} de 9 componentes, el que además es simétrico tal que $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Luego, la resultante de las fuerzas superficiales en la dirección i, $d\vec{F}_{si}$, esta dada por:

$$d\vec{F}_{si} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) dV$$

Entonces, la segunda ley de Newton queda escrita como:

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} + \frac{d\vec{F}_s}{dV}}$$

o bien:

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right) \\ \rho\frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right) \\ \rho\frac{Dw}{Dt} = \rho g_z + \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right) \end{array}\right.$$

4.2. Leyes Constitutivas

Necesitamos conocer las leyes constitutivas que permitan relacionar el tensor de esfuerzos con alguna de las variables del flujo, en particular, con la presión y el tensor de deformaciones ϵ_{ij}. Para ello impondremos condiciones sobre el fluido como:

1. El fluido es un continuo.
2. Existe una relación lineal entre los esfuerzos tangenciales τ_{ij} y la tasa de deformación angular ϵ_{ij}.
3. El fluido es isotrópico de manera que las leyes son independientes de la dirección o sistema de coordenadas que se utilice.
4. Cuando las tasas de deformación angular son nulas, los esfuerzos tangenciales deben anularse mientras que los esfuerzos normales se reducen a la presión hidrostática. Luego:

   $$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$$

   Donde, el signo negativo es por definición de presión (esfuerzo de compresión) y δ_{ij} es el denominado delta de Kronecker, definido como:

   $$\delta_{ij} = \left\{\begin{array}{l} 1 \; i = j \\ 0 \; i \neq j \end{array}\right.$$

Así, con estas definiciones y las propiedades de los tensores de deformación y de esfuerzos, tenemos:

$$\tau_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \delta_{ij}(-p + \lambda\nabla\cdot\vec{v})$$

Donde μ es la viscosidad dinámica y λ es el segundo coeficiente de viscosidad, el que es una propiedad del fluido relacionada con la expansión y compresión (deformación) de los elementos del fluido $\nabla\cdot\vec{v}$.

Una conclusión que se obtiene es que en fluidos reales en movimiento, el promedio de los esfuerzos normales, denominado presión media $\bar{p}$, difiere de la presión termodinámica ya que:

$$\bar{p} = \frac{1}{3}\tau_{ii} = -p + \lambda\nabla\cdot\vec{v} + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{v}$$

De manera que en general $\bar{p} \neq -p$. Sin embargo, para fluidos incompresibles que cumplen con la ecuación de continuidad, el promedio de los esfuerzos normales efectivamente es igual a la presión termodinámica, y por lo tanto:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

4.3. Ecuaciones de Navier-Stokes para Fluidos Incompresibles

Finalmente, reemplazando los resultados anteriores en la segunda ley de Newton, obtenemos las denominadas ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles:

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\rho g_i-\frac{\partial}{\partial x_j}(-p\delta_{ij}+2\mu\epsilon_{ij})$$

Suponiendo además que μ es homogéneo, y notando que:

$$\frac{\partial \rho\delta_{ij}}{\partial x_j}=\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\rho g_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j\partial x_i}$$

en donde el último término de la mano derecha es nulo dada la continuidad ($\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0$). Por lo tanto:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=g_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}$$

o bien:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=g_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=g_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=\vec{g}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{v}$$

Finalmente, la ecuación general de Navier-Stokes para fluidos incompresibles queda:

$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt}=\vec{g}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{v}}$$

- **Presión Motriz**

  Supongamos que dado un sistema de coordenadas, la aceleración de gravedad $\vec{g}$ no es paralela al eje z, sino que a un eje h orientado verticalmente hacia arriba que discrepa en un ángulo θ del eje z. En este caso, se tiene que:

  $$\vec{g}=-g\nabla h$$

  y, por lo tanto:

  $$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(p+\rho gh)+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}$$

  Donde, el termino $p+\rho gh$ es la denominada presión motriz que denominaremos como $\hat{p}$. Cuyo nombre se debe a que la acción conjunta de la gravedad y el gradiente de presiones puede generar el movimiento, y no los términos viscosos que tienden a frenarlo.

  Entonces, la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles se reduce a:

  $$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla\hat{p}+\nu\nabla^2\vec{v}}$$

- **Caudal Volumétrico**

  El Caudal Volumétrico Q denota la tasa de cambio de flujo que pasa por un plano perpendicular a él por unidad de tiempo, donde, generalmente el plano perpendicular al flujo, esta dado por el área mojada del perfil transversal por donde atraviesa el fluido. Entonces, supongamos que tenemos el perfil de velocidad en la dirección x (única dirección de movimiento) de un fluido $u_x(z)$, el cual varia con la altura z, además supongamos que el fluido se mueve dentro de una canal abierta de sección transversal cuadrada, luego el caudal volumétrico es:

  $$Q = \int_0^{z^*} \int_0^{y^*} u_x(z) dy dz$$

  Donde, y^* es el ancho de la canal y z^* es la profundidad del fluido, no necesariamente igual a la altura de la canal de sección cuadrada y^* ($z^* \leq y^*$).

- **Caudal o Gasto Masico**

  El Caudal Masico $\dot{m}$ denota la tasa de cambio de masa de flujo que pasa por un plano perpendicular a él por unidad de tiempo. Para un flujo incompresible, se relaciona con el caudal volumétrico de la siguiente forma:

  $$\dot{m} = \rho Q$$

  Donde, ρ es la densidad del fluido.

- **Velocidad Media**

  La Velocidad Media $\bar{v}$ da cuenta de una velocidad general con la que se mueve el fluido, ignorando de cierto modo el perfil de velocidades dado. Para el mismo ejemplo anterior, la velocidad media sería:

  $$\bar{v} = \frac{\int_0^{z^*} \int_0^{y^*} u_x(z) dy dz}{\int_0^{z^*} \int_0^{y^*} dy dz}$$

  También, ocupando esta definición, se tiene el caudal volumétrico medio $\bar{Q}$ y el caudal masico medio $\bar{\dot{m}}$, donde es claro que se tiene la relación:

  $$\bar{Q} = \bar{v} A$$

  donde A es el área de la sección transversal del fluido, o por donde atraviesa el fluido.

- **Capa Límite**

  La capa límite es un concepto que da cuenta de la separación entre un régimen rotacional y uno irrotacional de un fluido que esta en contacto con algún objeto. Así, dentro de esta capa límite (tocando el objeto) el fluido es rotacional y por ende existen esfuerzos de corte, pero fuera de esta capa límite, donde la velocidad es la misma que la que venia el fluido antes de tocar el objeto, el fluido es irrotacional, y por ende, no existen esfuerzos de corte. Esta capa límite (espesor) aumenta a lo largo del objeto, llegando a un punto donde es posible diferenciar entre una capa límite laminar y una turbulenta (generalmente supondremos que estamos solo en régimen laminar). De esta forma tenemos:

  $$\delta(x) \approx 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

  Para un régimen laminar en una placa plana, y:

  $$\delta(x) \approx 0{,}37 x \left(\frac{\nu}{U x} \right)^{1/5}$$

  Para un régimen turbulento en una placa plana, donde x da cuenta del largo de la placa, ν es la viscosidad cinemática del fluido y U es la velocidad media del fluido antes que toque la placa o fuera de la capa limite.

  En el caso de tuberías, el crecimiento de la capa límite queda confinado en el ancho de la tubería (diámetro D), por ende, dado un cierto $x = L^*$ (largo de la tubería), la capa límite (laminar o turbulenta) queda completamente desarrollada y el perfil de velocidades se puede calcular directo de las ecuaciones de Navier-Stokes.

4.4. Ecuaciones de Euler

Consideremos el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible, tal que:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla \hat{p} + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

Ahora, consideremos que el fluido es Ideal ($\mu = 0$), luego:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla \hat{p}$$

Además, consideremos que el fluido es irrotacional ($\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$), por lo tanto, la siguiente igualdad:

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

se reduce a:

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v})$$

De esta forma, las ecuaciones de momentum para un flujo irrotacional de un fluido ideal quedan reducidas a:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\nabla \hat{p}$$

Reorganizando la ecuación anterior, y recordando que estamos considerando un flujo incompresible, se obtiene:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + g\nabla \left(\frac{1}{2g}\vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{p}{\gamma} + h \right) = 0$$

Donde γ es el peso especifico del fluido, tal que $\gamma = \rho g$.

- **Ecuación de Bernoulli**

  Definimos el termino entre paréntesis de la ecuación anterior como:

$$\boxed{B = \frac{1}{2g}\vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{p}{\gamma} + h}$$

Termino que es conocido como ecuación de Bernoulli, suma de Bernoulli o energía por unidad de peso.

Ahora, si el flujo es permanente se obtiene:

$$\nabla B = 0$$

Lo que indica que B es constante en el espacio. Luego, si el flujo de un fluido ideal es irrotacional y permanente, entonces el Bernoulli es constante y homogéneo en todo el espacio del fluido. El mismo resultado se puede obtener si el flujo es rotacional y permanente.

5. Teorema General de la Energía

Analicemos el caso de un fluido real, el cual presenta esfuerzos viscosos, y por ende, parte de la energía mecánica presente en el flujo se disipa en forma de calor, lo que se traduce en un Bernoulli que disminuye a lo largo del escurrimiento. Para analizar este problema, consideramos la energía total del flujo:

$$e = u + gh + \frac{v^2}{2}$$

Donde e denota la energía específica total del flujo, u la energía específica interna y los dos últimos términos representan la energía potencial y cinética, respectivamente. Si E es la energía contenida en un volumen de control V, entonces:

$$E = \int_V \rho e dV$$

La primera ley de la termodinámica aplicada a un sistema de fluido se expresa como:

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW}{dt}$$

Donde $\hat{Q}$ es el calor entregado externamente al sistema y W el trabajo mecánico realizado por el sistema sobre el medio externo.

Ahora, si consideramos un volumen de control, el teorema de transporte de Reynolds permite reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \int_S \rho e \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW}{dt}$$

Donde S representa la superficie del volumen de control y $\hat{n}$ el vector unitario perpendicular al elemento de superficie dS.

El trabajo W puede ser descompuesto en un trabajo externo, W_e (bomba o turbina), y un trabajo asociado al escurrimiento, llamado trabajo de flujo, W_f (trabajo realizado por las fuerzas de superficie), el que podemos expresar como:

$$\frac{dW_f}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \tau_{nt} dV$$

Ya que los elementos de trabajo $dW = d\vec{F} \cdot d\vec{r} = d\vec{\tau} \cdot (dS d\vec{r})$. τ_{nt} representa los esfuerzos normales y tangenciales del fluido. Luego, si descomponemos el trabajo del flujo en términos normales y tangenciales $W_f = W_n + W_t$, reconocemos que $d\vec{r} = \vec{v} dt$, entonces:

$$\frac{dW}{dt} = \int_S p(\vec{v} \cdot \hat{n}) dS + \frac{dW_t}{dt} + \frac{dW_e}{dt}$$

Donde p es la presión, y por lo tanto:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \int_S \rho \left(e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW_t}{dt} - \frac{dW_e}{dt}$$

Para un flujo permanente obtenemos:

$$\int_S (\rho u + \gamma B)(\vec{v} \cdot \hat{n}) dS = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW_t}{dt} - \frac{dW_e}{dt}$$

Y, si consideramos un tubo de flujo como volumen de control, con superficies homogéneas, donde existe un caudal masico $\dot{m}$, y como el flujo es permanente, entonces la ecuación anterior se escribe como:

$$\boxed{\dot{m}(g(B_2 - B_1) + (u_2 - u_1)) = \frac{d\hat{Q}}{dt} - \frac{dW_t}{dt} - \frac{dW_e}{dt}}$$

Que es el principio general de conservación de la energía entre los puntos 1 y 2, donde $\dot{m}$ es el caudal o gasto masico, B_1 y B_2 son los Bernoulli a la entrada y salida del tubo de flujo, respectivamente. u_1 y u_2 son las energías internas de entrada y salida, respectivamente. $\hat{Q}$ es el calor entregado externamente al sistema, W_e el trabajo externo (bombas o turbinas), y W_t el trabajo asociado a esfuerzos viscosos del fluido.

6. Escurrimiento en Tuberías

6.1. Del Teorema General de la Energía a la Aplicación

Consideremos el caso simple de un fluido ideal tal que los esfuerzos viscosos no existen, y además consideremos que $\hat{Q}$ es nulo (sistema adiabático). Como no existe fricción ni fuentes externas que puedan cambiar la temperatura del fluido, tenemos que la energía interna u se conserva, y por ende, su gradiente también es nulo. Por otro lado, consideremos que existe trabajo externo, el cual denominaremos como:

$$\frac{dW_e}{dt} = P$$

Donde $P > 0$ indica que el trabajo es hecho por el flujo, es decir, la energía del flujo es transformada en otro tipo de energía, por ejemplo eléctrica en el caso de una turbina; mientras que $P < 0$ indica que el trabajo es entregado por el medio al sistema (bomba). Luego, con las consideraciones hechas con anterioridad, tenemos que el teorema general de la energía se reduce a:

$$\dot{m}(g(B_2 - B_1)) = -P$$

Luego, dado que $\dot{m} = \rho Q$, obtenemos:

$$B_2 - B_1 = -\frac{P}{\gamma Q}$$

- Caso Turbina, donde $P > 0$, entonces:

  $$B_2 = B_1 - \frac{|P|}{\gamma Q}$$

  Donde P es la potencia generada, y se tiene que $B_2 < B_1$, lo que se traduce en que $p_2 < p_1$ para el caso en que el diámetro de la tubería sea constante.

- Caso Bomba, donde $P < 0$, entonces:

  $$B_2 = B_1 + \frac{|P|}{\gamma Q}$$

  Donde P es la potencia entregada, y se tiene que $B_2 > B_1$, lo que se traduce en que $p_2 > p_1$ para el caso en que el diámetro de la tubería sea constante.

  El termino $\frac{|P|}{\gamma Q}$ suele llamarse como altura de elevación de la bomba.

6.2. Pérdidas de Energía

Consideremos ahora las pérdidas de energía por fricción, pero sin considerar trabajo externo. En este caso el teorema general de la energía se expresa como:

$$B_2 - B_1 = -\frac{1}{g}\left(\frac{1}{\dot{m}}\left(\frac{dW_t}{dt} - \frac{d\hat{Q}}{dt}\right) + (u_2 - u_1)\right)$$

Llamando:

$$\Lambda = \frac{1}{g}\left(\frac{1}{\dot{m}}\left(\frac{dW_t}{dt} - \frac{d\hat{Q}}{dt}\right) + (u_2 - u_1)\right)$$

$$\Rightarrow B_2 = B_1 - \Lambda$$

Donde Λ es la perdida de energía por unidad de peso que existe entre los puntos 1 y 2. Si estas perdidas fricciónales ocurren uniformemente en el tramo comprendido entre 1 y 2 (flujo uniforme), entonces definimos J como la perdida de energía por unidad de longitud, tal que:

$$B_2 = B_1 - JL$$

Donde L es la distancia entre 1 y 2. J también es conocido como la pendiente del plano de carga o energía, y dado que las condiciones de flujo son uniformes, se cumple que:

$$J = -\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}$$

Pero, J también puede ser calculado a partir de la ecuación o ley de Darcy-Weisbach:

$$J = \frac{fv^2}{D2g}$$

Donde f es el factor de fricción y D el diámetro de la tubería.

Además de las perdidas fricciónales que ocurren uniformemente distribuidas a lo largo de la tubería, existen las perdidas singulares Λ_s asociadas a expansiones o contracciones bruscas del flujo, las que se definen como:

$$\Lambda_s = k_s \frac{v^2}{2g}$$

Donde k_s es el coeficiente de perdida singular.

6.3. Ecuación Global de Energía en Tuberías

Dados los resultados anteriores, la siguiente ecuación de energía permite ligar la dinámica general entre dos secciones de un tubo de flujo:

$$\boxed{\bar{B}_1 = \bar{B}_2 + \Lambda_f + \Lambda_s \pm \frac{|P|}{\gamma Q}}$$

Donde $\bar{B}$ es el Bernoulli promedio, expresado en términos de la velocidad promedio $\bar{v}$ de la sección, Λ_f denota las perdidas de energía que expresamos como:

$$\Lambda_f = JL = \frac{f\bar{v}^2}{D2g}L$$

Λ_s las perdidas por singularidades, la cual expresamos como:

$$\Lambda_s = k_s \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

Y, finalmente $|P|$ denota la potencia de la bomba o turbina.

6.4. Factor de Fricción y Singularidades

- **Factor de Fricción**

  El factor de fricción f se define a partir del tipo de régimen de flujo (Re) y de la rugosidad ϵ del lugar por donde se mueve el flujo. Así, para tuberías se han definido las siguientes funciones de fricción:

Régimen	Rugosidad	Factor de Fricción
Laminar	Hidrodinámicamente Lisa	$f = \frac{16}{Re}$
Turbulento	Hidrodinámicamente Lisa	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\frac{Re\sqrt{f}}{2{,}51}\right)$
	Hidrodinámicamente Transición	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}} + \frac{\epsilon}{3{,}7D}\right)$
	Hidrodinámicamente Rugosa	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(3{,}7\frac{D}{\epsilon}\right)$

  Donde, D es el diámetro de la tubería y el termino $\frac{\epsilon}{D}$ se conoce como rugosidad relativa.

  Todos estos valores se han tabulado en el conocido "Diagrama de Moody", desde el cual se puede obtener el factor de fricción solo sabiendo el numero de Reynolds y la rugosidad relativa.

- **Singularidades**

  Se conocen como singularidades a las secciones del recorrido de un flujo donde pierde energía por conceptos de expansión, compresión o curvatura, lo que se traduce generalmente en una disminución de la energía cinética del flujo y una eventual caída de presión.

  En una tubería común, estas singularidades están dadas generalmente por codos, válvulas o conexiones entre tuberías de distinto diámetro, las que generan un cambio brusco en el flujo, y por ende, una disminución en su energía.

  Las perdidas de energía por singularidades generalmente se modelan a partir de la energía cinética del flujo $\frac{\bar{v}^2}{2g}$, la cual se multiplica por algún factor k_s o coeficiente de perdida singular, que depende de la geometría de la singularidad.