Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

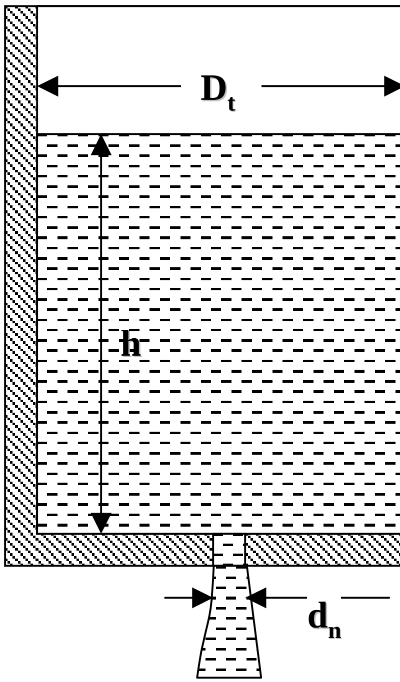
FENOMENOS DE TRANSPORTE EN METALURGIA

TRANSFERENCIA DE MOMENTUM
Clase 04/07

Prof. Dr. Leandro Voisin A.

Ejemplo 9:

Consideremos el estanque cilíndrico vertical de la figura con un diámetro Dt que descarga por un orificio de diámetro dn. Se requiere encontrar la tasa a la cual se descarga en función de la altura del líquido.



i) No hay fuerzas de trabajo,

ii) Sin pérdidas por fricción,

Así la ecuación de balance de energía mecánica se reduce a:

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{1}{2}\cdot\left(v_2^2 - v_1^2\right) + g\cdot\left(h_2 - h_1\right) = 0$$

Ejemplo 9, Solución:

La velocidad del fluido en la superficie puede considerarse cero ya que el área de dicha sección >> que el área en la descarga del estanque. El estanque esta abierto a la atmósfera => $P_2 = P_1$.

$$\frac{1}{2}v_2^2 + g\,h = 0 \qquad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2gh}$$

$\therefore$ *El flujo volumétrico (Q) será:*

$$Q = \sqrt{2gh}\cdot\frac{1}{4}\pi d_n^2$$

y la tasa a la cual la superficie del estanque baja:

$$v_1 = \frac{Q}{\frac{\pi D_t^2}{4}} = \sqrt{2gh}\cdot\left(\frac{d_n}{D_t}\right)^2 = \frac{-dh}{dt}$$

Ejemplo 9, Solución:

Integrando, se obtiene el tiempo para el cual el nivel cae a una distancia y:

$$\int_0^t dt = \int_H^{H-y} \left(\frac{-dh}{\sqrt{2gh} \cdot \left(\frac{d_n}{D_t} \right)^2} \right)$$

En el tiempo cero h = H, y después que el nivel ha bajado a la distancia y, el nuevo nivel es (H – y)

Para completar el drenaje del estanque, y = H, el tiempo requerido es:

$$t = \left[-\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \left(\frac{D_t}{d_n} \right)^2 \cdot \sqrt{h} \right]_H^{H-y} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \left(\frac{D_t}{d_n} \right)^2 \cdot \left(\sqrt{H} - \sqrt{H-y} \right)$$

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \left(\frac{D_t}{d_n} \right)^2 \cdot \sqrt{h}$$

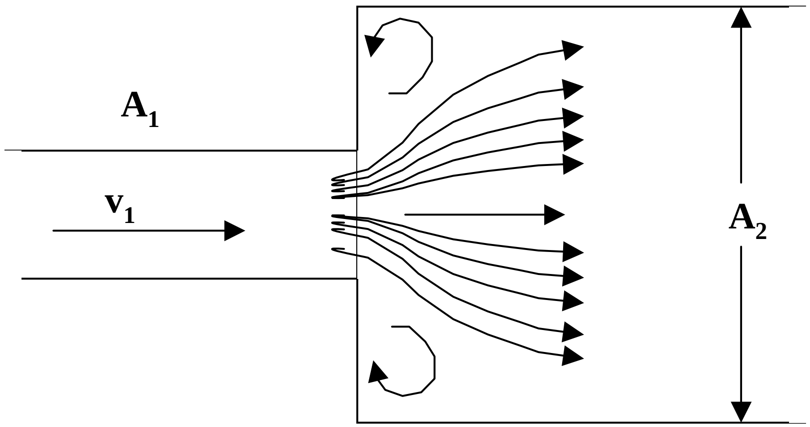
Otras pérdidas por fricción

En un sistema de cañerías los codos, uniones, válvulas, expansiones y contracciones se agregan a las pérdidas por fricción. Para relacionar las correspondientes pérdidas de presión, se usa normalmente la siguiente definición:

$$E_f = \frac{\textit{caída de presión}}{\textit{densidad}} = \frac{P_1 - P_2}{\rho}$$

donde, P_1 *es la presión antes de la restricción particular y* P_2 *es la presión directa después de ella.*

Expansión y Contracción en fluidos



Pérdidas por fricción en codos, válvulas y uniones.

$$E_f = K_f \frac{v^2}{2}$$

y representados como longitud equivalente a la razón del diámetro.

$$E_f = 4f \frac{L_e}{D} \frac{v^2}{2}$$

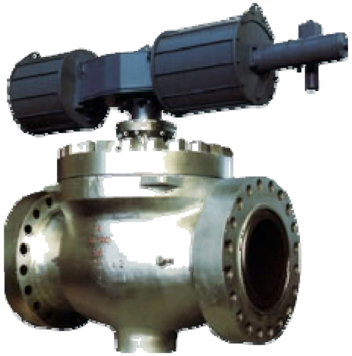
Pérdidas por fricción para expansión (turbulento)

$$E_{f,expansión} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2}$$

Pérdidas por fricción para contracción (turbulento)

$$E_{f,contracción} = 0.55 \cdot \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2 \frac{v_2^2}{2}$$

Pérdidas en codos, válvulas y uniones

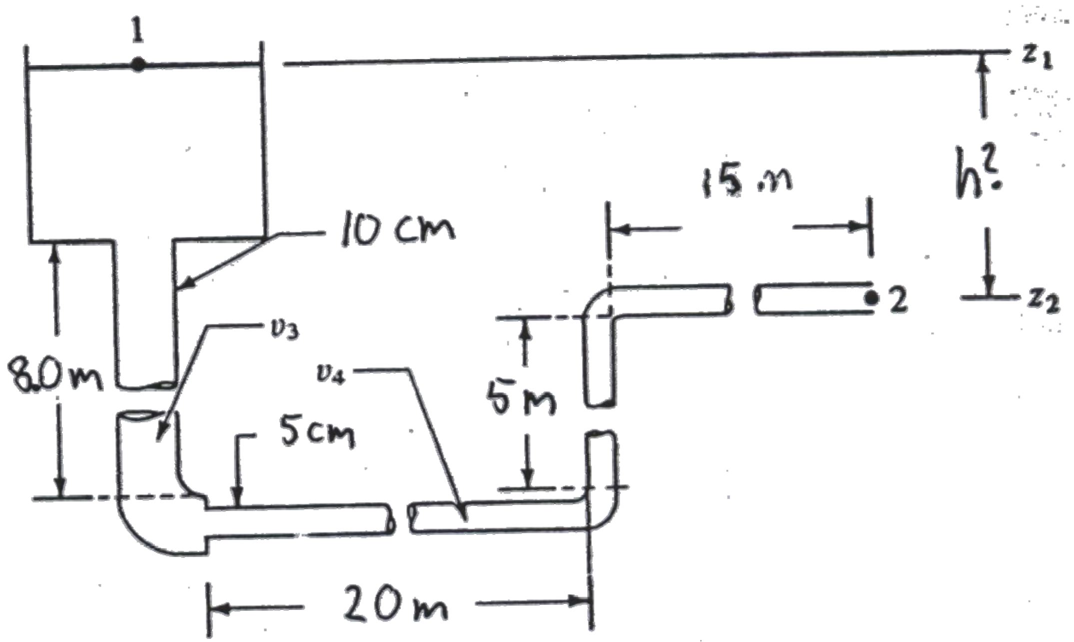


$$E_f = K_f \frac{v^2}{2} = 4f\frac{L_e}{D}\frac{v^2}{2}$$

Singularidad	***L_e/D***	***K_f***
Codo 45º	*17*	*0,35*
Codo 90º	*35*	*0,75*
Copla	*2*	*0,04*
Válvula Check abierta	*100*	*2*
Válvula compuerta abierta	*9*	*0,17*
Válvula compuerta ½ cerrada	*225*	*4,5*
Válvula globo abierta	*300*	*6,0*
Válvula ángulo abierta	*100*	*2,0*

Balance de energía en un flujo de fluido turbulento por una cañería

Ejemplo 10:



Un gran estanque almacena agua. El sistema de piping que conecta dicho estanque presenta longitudes y diámetros indicados en la figura y su material es de acero comercial con un Sch 40, $\varepsilon = 4.6 \cdot 10^{-5}$ *m. Considere,* $\rho_{agua} = 998$ *kg/m*^{3}*,* $\mu_{agua} = 10^{-3}$ *Pa·s.*

¿Cuánto más alto debe estar la superficie del agua en el estanque sobre el punto de descarga para permitir un flujo de 5.0 l/s?

Ejemplo 10, Descripción:

Descripción: la cañería de salida del estanque de 8 m de longitud tiene un diámetro interior de 10 cm y un codo de 90º. Esta cañería conduce a una de 40 m de largo y 5 cm de diámetro con dos codos de 90º y una válvula de compuerta completamente abierta.

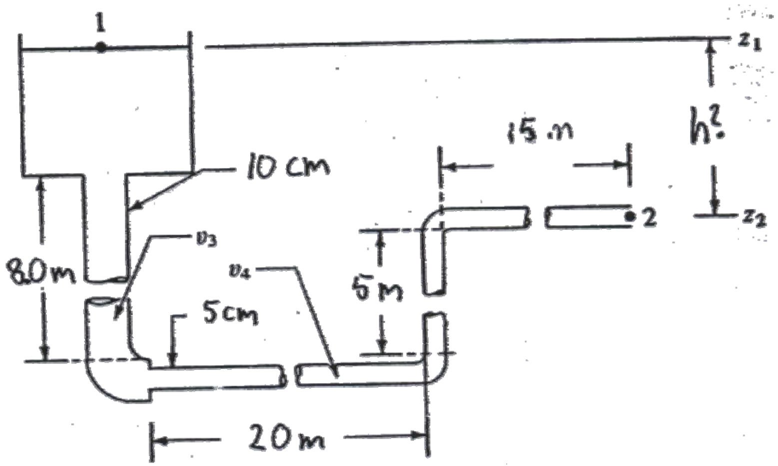
Ejemplo 10, Solución:

Para el balance de energía mecánica, tendremos las siguientes consideraciones:

- ✓ *No hay trabajo ni presión sobre el estanque, el punto de descarga es a la atmosférica, no se especifica el diámetro del estanque pero se puede asumir que la velocidad en 1 es muy baja.*
- ✓ *La velocidad en la descarga debe ser de 2,55 cm/s y la energía cinética asociada es* $(1/2 \cdot 2.55^2\ m^2/s^2)=3.25\ m^2/s^2$.

Ejemplo 10, Solución:

$$\frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right) + \sum E_f = 0$$



La diferencia de elevación será:

$$h = z_1 - z_2 = \frac{3.25\dfrac{m^2}{s^2} + \sum E_f}{g}$$

Se debe determinar la resistencia total: i) contracción en el estanque de salida, ii) fricción en la cañería de 0.1 m, iii) fricción en el codo de 90° de 0.1 m, iv) contracción en la cañería de 0.1 a 0.05 m, v) fricción en la cañería de 0.05 m, vi) fricción en los codos de 90° de 0.05 m, vii) fricción en la válvula abierta y viii) expansión súbita.

Balance de energía en un flujo de fluido turbulento por una cañería

Ejemplo 10, Solución:

Item	v (m/s)	Re	ε / D	f, K_f, K_e	E_f (m^2/s^2)
Salida estanque	0.635			$E_{f,contracción} = 0.55\left(v_2^2/2\right)$	0.11
Cañería 0.1 m D int.	0.635	63400	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$f = 0.005$	0.32
Codo 0.1 m D int.	0.635			$K_f = 0{,}75$	0.15
Contracción cañería	2.55			$E_{f,contracción} = 0.55 \cdot 0.3125\left(v_2^2/2\right)$	0.56
Cañería 0.05 m D int.	2.55	127.000	$9.2 \cdot 10^{-4}$	$f = 0.0055$	57.3
Dos codos 0.05 m D int	2.55			$Total = 2 \cdot K_f = 1.5$	4.9
Válvula compuerta	2.55			$K_f = 0.17$	0.55
Expansión súbita	2.55			$E_{f,expansion} = v_1^2/2$	3.3
ΣE_f					67

Ejemplo 10, Solución:

Se puede observar que el punto principal de resistencia corresponden 57.3 de 67, en el tramo de cañería de 40 m de longitud y 0.05 m de diámetro.

Reemplazando los valores, la diferencia de elevación será:

$$h = z_1 - z_2 = \frac{3.25\frac{m^2}{s^2} + 67\frac{m^2}{s^2}}{9.8\frac{m}{s^2}} = 7.2m$$

Bombas

Para la resolución de problemas, la energía mecánica proporcionada por la bomba al fluido (J/kg) debe ser incorporada en el balance de energía mecánica. En su cálculo la siguiente formula puede ser utilizada:

$$W_p = \frac{W_s\left(\frac{J}{kg}\right)}{\eta} \cdot m\left(\frac{kg}{s}\right) = \frac{W_s}{\eta} \cdot m$$

La eficiencia de las bombas, η, asociadas a su potencia está muy lejos de ser 100 %.

Ejemplo 11 (Propuesto):

Calcular la potencia requerida de un soplador cuyo propósito es alimentar aire a una tasa de 0.5 m^3/s, medidos a 101.3 kPa y 21 ºC en un reactor.
El aire, inicialmente esta en reposo, entra al soplador a una presión de 98.7 kPa y lo deja a 103.0 kPa con una velocidad de 42 m/s.
La temperatura actual del aire es 90 ºC. El soplador usado es de tipo centrifugo con una eficiencia de 65 %.

Ejemplo 11, Solución: *6.6 Hp*

En el diseño, se debe determinar : i) el diámetro de las cañerías y ii) la potencia de la bomba ó soplador.

Por lo general, para resolver el balance de energía mecánica se utiliza un procedimiento iterativo relativo a los datos del sistema.

$$\frac{(P_2 - P_1)}{\rho} + \frac{1}{2}\cdot\left(\bar{v}_2^2 - \bar{v}_1^2\right) + g\cdot(z_2 - z_1) + \sum E_f - \frac{W_s}{Q} = 0$$

Si se especifica la potencia de la bomba se debe calcular el $\phi_{cañería}$, asumiendo un factor de fricción (0.005 por ejemplo). Velocidades de gases, líquidos no viscosos y líquidos viscosos son típicamente 15, 1 y 0.1 m/s, respectivamente, se pueden usar estos valores en combinación con flujos conocidos. Luego se calcula Re y se determina un nuevo f del cual se desprenden nuevos diámetros y velocidades. Se repite el procedimiento hasta la convergencia.

Flujo turbulento de agua en cañería horizontal (rugosidad 0.046 mm) - aprox. ±15%

Para flujo gravitacional, ΔP se puede reemplazar por $\rho g \Delta h$. En el caso de flujo de aire incompresible a presión atmosférica y temperatura ambiente, el diámetro - aprox. ±15%.

Para una estimación inicial del diámetro de cañería pueden ser utilizadas los siguientes modelos empíricos para agua y aire, respectivamente:

$$Agua: \quad D_{cañería} \approx 1.75\left(\frac{Q^2 L}{\Delta P}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$Aire: \quad D_{cañería} \approx 0.46\left(\frac{Q^2 L}{\Delta P}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{(P_2 - P_1)}{\rho} + \frac{1}{2}\cdot\left(\overline{\mathrm{v}}_2^2 - \overline{\mathrm{v}}_1^2\right) + g\cdot(z_2 - z_1) + \sum E_f - \frac{W_s}{Q} = 0$$

Un procedimiento iterativo de cálculo puede ser el que sigue para obtener una respuesta correcta:

1. *Estimar el diámetro inicial.*
2. *Calcular* v *y Re.*
3. *Obtener f del gráfico de Moody.*
4. *Recalcular el nuevo diámetro con el f.*
5. *Calcular el nuevo* v *y Re (corregidos).*
6. *Continuar hasta la convergencia*

Ejemplo 12:

"Acuaducto para el agua lluvia de Santiago"

Calcular el diámetro mínimo requerido de un sistema de drenaje de agua lluvia capaz de colectar toda el agua lluvia en un área de 1 km^2. La tasa de precipitación es de 0.1 m/h. Considere, $\rho_{agua} = 1000$ kg/m^3, $\mu_{agua} = 10^{-3}$ Pa·s.

La cañería de drenaje tendría una pendiente de 30 metros por 1000 m de longitud y $\varepsilon = 1.2$ mm.

Ejemplo 12, Solución:

El caudal Q de agua será:

$$Q_{agua} = \frac{0.1}{3600}\frac{m}{s} \cdot 10^6 m^2 = 27.8\frac{m^3}{s}$$

Ejemplo 12, Solución:

Se asume que: i) no hay bombas, ii) no hay cambio de energía cinética del agua a lo largo de la cañería, iii) cañería abierta en ambos extremos, iv) no hay singularidades asociadas a la cañeria, v) el flujo es turbulento.

Usando una sección de 100 m de longitud como base, el balance de energía mecánica es:

$$0 = g(z_2 - z_1) + 4f\frac{Lv^2}{2D}$$

$$= -9.8 \cdot 3 + \frac{200f}{D}v^2 = -29.8 + \frac{325fQ^2}{D^5}$$

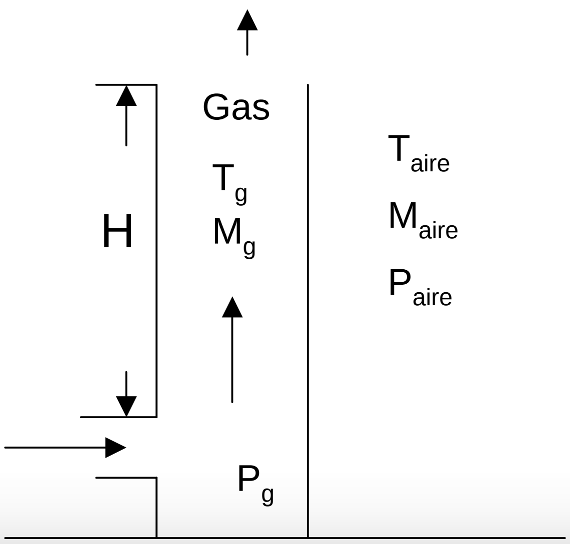
$$\Rightarrow D = 1.62\sqrt[5]{f \cdot Q^2}$$

Asumiendo un f = 0.0044 => D = 2.07 m

Tiraje en chimeneas

Cuando se hace fuego en una chimenea, en una parrilla ó en un horno, se induce un tiraje que induce a los gases calientes a subir. La razón de esto es que los gases en la chimenea son menos densos que el aire ambiental, con una presión hidrostática más baja dentro del horno que en el exterior. Si consideramos la figura la diferencia de presión esta dada por :

$$\Delta P = (\rho g H)_{aire} - (\rho g H)_{Chimenea} = \left[\left(\frac{MP}{RT}\right)_{aire} - \left(\frac{MP}{RT}\right)_{chimenea}\right] g H$$



Asumiendo que las presiones dentro y fuera de la chimenea son casi las mismas:

$$\Delta P = \left[\left(\frac{M}{T}\right)_{aire} - \left(\frac{M}{T}\right)_{chimenea}\right] \cdot \frac{P_{aire} g H}{R}$$

Ejemplo 13:

Determinar el tiraje en Pa de una chimenea industrial de 50 m de altura cuando un gas (15 % de CO_2, 6 % de O_2 y 79 % de N_2) fluye a través de ésta a una temperatura de 250 ºC. La presión externa es de $1.01 \cdot 10^{-5}$ Pa y la temperatura ambiente de 10 ºC. Los pesos moleculares promedios del aire y del gas de chimenea son: M_{aire} = 0.02884 y M_{gas} = 0.03064 kg/mol, respectivamente.

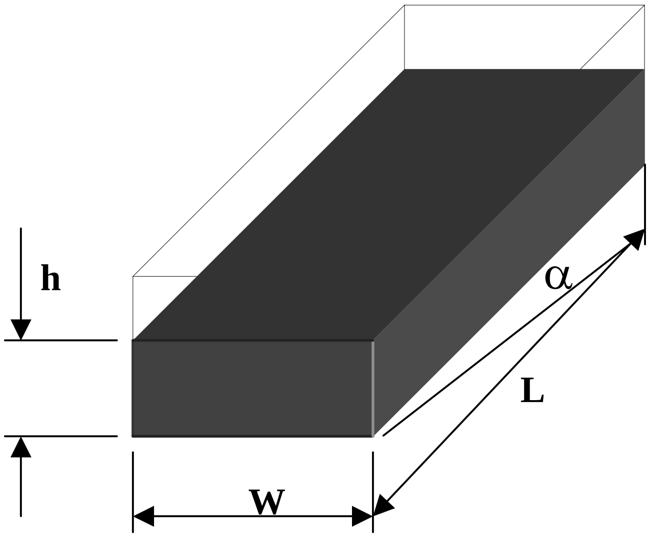
Ejemplo 13, Solución:

$$\Delta P = \left[\left(\frac{M}{T+273} \right)_{aire} - \left(\frac{M}{T+273} \right)_{gas} \right] \cdot \frac{P_{aire} g H}{R}$$

$$\Delta P = 263901 \quad Pa$$

$$\Delta P = 2.064 \cdot 10^{-3} \quad atm$$

Para resolver este tipo de problemas es necesario introducir el concepto de diámetro equivalente, D_e.



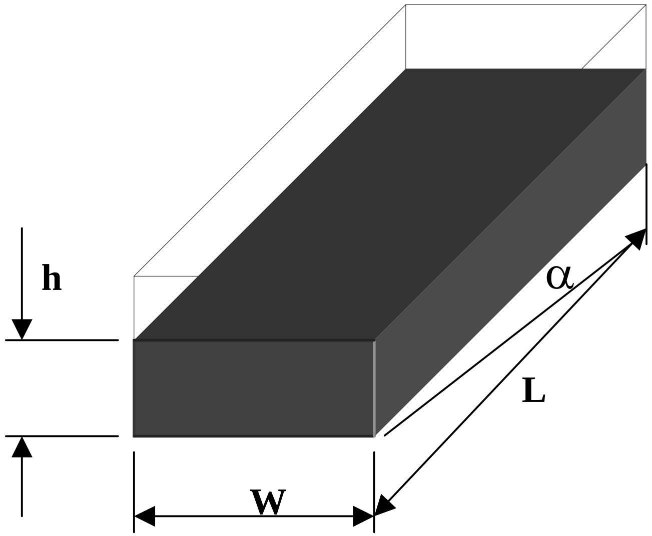
Diámetro equivalente

$$D_e = 4 \cdot \left(\frac{\text{área sección del canal}}{\text{perímetro mojado del canal}} \right)$$

$$D_e = 4 \cdot \left(\frac{W\,h}{W + 2\,h} \right)$$

En estado estacionario las fuerzas de fricción se balancean con las fuerzas gravitacionales:

$$\sum E_f = g\,L\,sin(\alpha) = 4\ f\ \frac{\mathrm{v}^2\ L}{2\ D_e}$$



$\therefore$ *la velocidad queda dada por :*

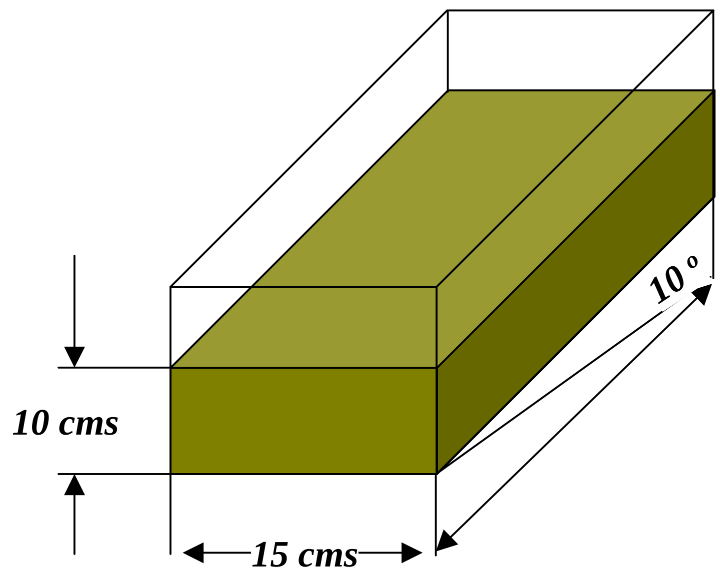
$$\mathrm{v} = \left[\frac{g\,\sin(\alpha)\,D_e}{2\,f}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Q en la canal está dado por :

$$Q = \mathrm{v}Wh = \left[\frac{g\,\sin(\alpha)\,D_e}{2\,f}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot Wh$$

Para $\quad Re = \dfrac{\mathrm{v}\,\rho\,D_e}{\mu} \geq 8000 \qquad \Rightarrow f = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\varepsilon}{D_e}\right)^{\frac{1}{3}}$

Ejemplo 14: *"Flujo de escoria por una canaleta"*



Determine el caudal másico, Q_m, de escoria que fluye por una canaleta de sangrado considerando la siguiente información:

Datos canaleta: ancho = 15 cm, altura = 10 cm, $\alpha = 10^o$, $\varepsilon = 3$ mm
Datos escoria: $\rho = 3600$ kg/m^3, $\mu = 0{,}1$ Pa·s.

Ejemplo 14, Solución:

$$D_e = 4\cdot\left(\frac{W\,h}{W+2\,h}\right) = 0.171\ \ m$$

$$Re = \frac{\mathrm{v}\,\rho\,D_e}{\mu} = 1.998\cdot 10^4$$

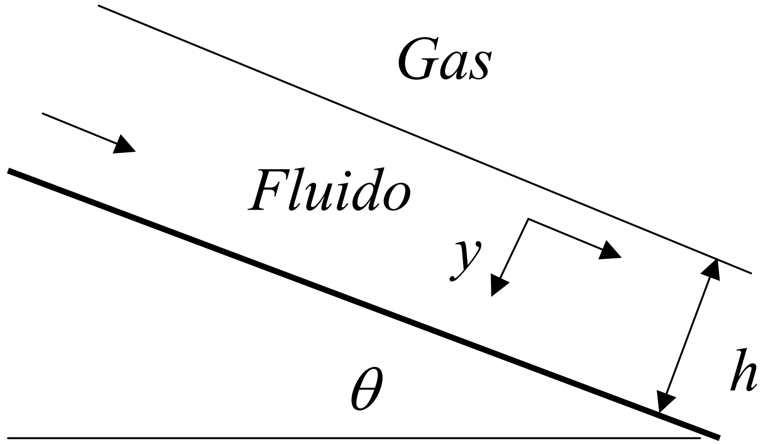
$$f = \frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon}{D_e}\right)^{\frac{1}{3}} = 0.032$$

$$\mathrm{v} = \left[\frac{g\,\sin(\,\alpha\,)\,D_e}{2\,f}\right]^{\frac{1}{2}} = 3.237\ m\,/\,s$$

$$Q = \mathrm{v}\,Wh = \left[\frac{g\,\sin\,(\alpha\,)\,D_e}{2\,f}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot Wh = 1.907\ m^3\,/\,min$$

$$Q_m = Q\cdot\rho = 6.867\quad t\,/\,m^3$$

Flujo laminar en un plano inclinado



Consideraciones:

i) *la superficie del fluido esta en contacto completo con aire a presión atmosférica.*

ii) *no hay presión hidrostática a lo largo de la longitud del plano.*

iii) *la componente gravitacional que actúa en la dirección del flujo es igual a* $(g \cdot \sin\,\theta)$.

Flujo laminar en un plano inclinado

El balance de fuerzas es aplicado a un volumen de control cartesiano, por lo que tendremos que:

$$F = mg \cdot sin\ \theta = \left(\rho \Delta x \Delta y \Delta z\right) g \cdot sin\ \theta$$

El balance de momentum total en x+Δx es:

$$\left(\rho \Delta x \Delta y \Delta z g\right) \cdot sin\, \theta + (\tau - \tau_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z = 0$$

Dividiendo por el volumen de control y haciendolo tender a cero:

$$\frac{d\tau}{dy} = \rho g\ sin\, \theta$$

El esfuerzo de corte se encuentra por integración:

$$\tau_y = \rho g\ sin\ \theta \cdot y + A_o$$

Flujo laminar en un plano inclinado

A_o depende del esfuerzo de la interfase agua/aire. La viscosidad del agua es cerca de 100 veces más alta que la viscosidad del aire, así el gradiente de velocidad en el agua de la interfase agua/aire es 1/100 la del aire:

$$\left(\frac{d\mathrm{v}}{dy}\right)_{agua} = \frac{\mu_{aire}}{\mu_{agua}}\left(\frac{d\mathrm{v}}{dy}\right)_{aire} \approx 0{,}01 \cdot \left(\frac{d\mathrm{v}}{dy}\right)_{aire}$$

Debido a este pequeño valor se asume que la interfase del fluido en contacto con gas $A_o = 0$, por lo que:

$$\tau_y = (\rho g \sin\theta)y = -\mu\frac{d\mathrm{v}}{dy}$$

$$\int_0^{\mathrm{v}} d\,\mathrm{v} = -\int_0^{y} \frac{\rho g \sin\theta}{\mu L} y\,dy$$

con $y = h$

$$\mathrm{v} = \frac{\rho g \sin\theta}{2\mu}\left(h^2 - y^2\right)$$

Flujo laminar en un plano inclinado

La velocidad promedio al integrar por la velocidad local a través de la película será:

$$\bar{v} = \frac{\rho g \sin\theta \cdot h^2}{3\mu}$$

El flujo volumétrico a lo largo del plano con un ancho W será:

$$Q = \bar{v} \cdot W h = \frac{W \rho g \sin\theta \cdot h^3}{3\mu}$$

y el espesor de la capa límite puede ser calculado como:

$$h = \left(\frac{3\mu Q}{W \rho g \sin\theta} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Ejemplo 15:

Calcular la velocidad promedio a la cual se mueve un flujo de lava de espesor de 0.5 m bajando por una montaña con un ángulo de 5º respecto a la horizontal. La lava está a una temperatura de 1200 ºC, su densidad es de 2700 kg/m³ y su viscosidad de 25 Pa·s.

Ejemplo 15, Solución:

Asumiendo estado estacionario y utilizando la ecuación de flujo laminar en un plano inclinado podemos resolver el problema.

La velocidad obtenida será mucho mayor que la velocidad real puesto que existe un enfriamiento asociado en el tiempo que aumenta la viscosidad y también existen singularidades en la montaña que inducen turbulencia y reducen la velocidad promedio

$$\bar{v} = \frac{\rho g \sin\theta \cdot h^2}{3\mu} = \frac{2700 \cdot 9.8 \cdot 0.087 \cdot 0.5^2}{3 \cdot 25} \frac{m}{s} = 7.7 \frac{m}{s}$$