TRANSFERENCIA DE MOMENTUM

MI3010-1 Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva
Prof. Dr. Leandro Voisin A.

Clase #7

Descarga de fluidos desde un estanque

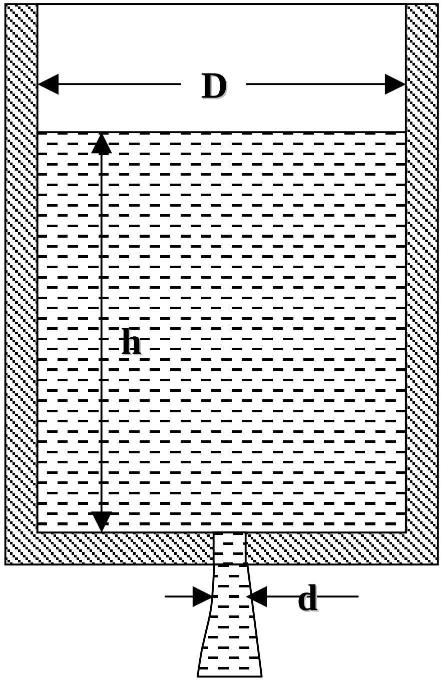
Consideremos el estanque de la figura con un diámetro D_t *que descarga por un orificio de diámetro* d_n*. Se requiere encontrar la tasa a la cual se descarga en función de la altura del líquido.*

i) No hay fuerzas de trabajo,

ii) Sin pérdidas por fricción,

Así la ecuación de balance de energía mecánica se reduce a:

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{1}{2}\left(u_2^2 - u_1^2\right) + g\left(h_2 - h_1\right) = 0$$



Descarga de fluidos desde un estanque

- *La velocidad del fluido en la superficie puede considerarse cero ya que el área de la sección >> que la de salida.*

$$\frac{1}{2}u_2^{\ 2} + g\,h = 0$$

$$u_2 = \sqrt{2\,g\,h}$$

- *El estanque esta abierto a la atmósfera => $p_2 = p_1$.*
- *El flujo volumétrico (Q) es:*

$$Q = \sqrt{2\,g\,h}\ \frac{1}{4}\pi d_n^{\ 2}$$

- *La tasa a la cual la superficie del estanque baja.*

$$u_1 = \frac{Q}{\pi \frac{D_t^2}{4}} = \sqrt{2gh} * (\frac{d_n}{D_t})^2 = -\frac{dh}{dt}$$

- *El tiempo para el cual el nivel cae a una distancia y:*

$$\int_0^t dt = \int_H^{H-y} \frac{-\,dh}{\sqrt{2\,gh} * (\frac{d_n}{D_t})^2}$$

Descarga de fluidos desde un estanque

- *En el tiempo cero h = H, y después que el nivel ha bajado a la distancia y, el nuevo nivel es H-y*
- *Para completar el drenaje del estanque, y = H, el tiempo requerido es*

$$t = \left[-\sqrt{\frac{2}{g}} * \left(\frac{D_t}{d_i}\right)^2 * \sqrt{h} \right]_H^{H-y} = \sqrt{\frac{2}{g}} * \left(\frac{D_t}{d_i}\right)^2 * \left(\sqrt{H} - \sqrt{H-y}\right)$$

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} * \left(\frac{D_t}{d_i}\right)^2 * \sqrt{h}$$

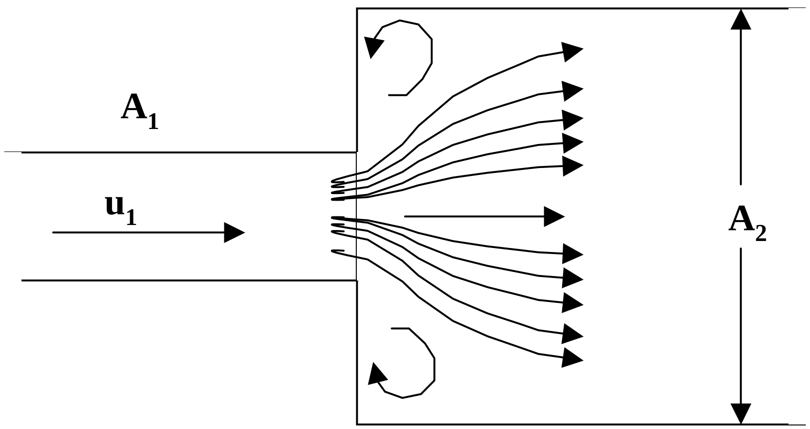
Otras pérdidas por fricción

En un sistema de cañerías los codos, uniones, válvulas, expansiones y contracciones se agregan a las pérdidas por fricción. Para relacionar las correspondientes pérdidas de presión, se usa normalmente la siguiente definición:

$$E_f = \frac{caída\ de\ presión}{densidad} = \frac{p_1 - p_2}{\rho}$$

Donde, p_1 es la presión antes de la particular restricción y p_2 es la presión directa después de ella.

Expansión y Contracción en fluidos



Pérdidas por fricción para expansión (turbulento)

$$E_{f,\text{expansión}} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{u_1^2}{2}$$

Pérdidas por fricción para contracción (turbulento)

$$E_{f,\text{contracción}} = 0.55\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2 \frac{u_2^2}{2}$$

Pérdidas por fricción en codos, válvulas y uniones

$$E_f = K_f \frac{u^2}{2}$$

Pérdidas por fricción en codos, válvulas y uniones representados como longitud equivalente a la razón del diámetro

$$E_f = 4f \frac{L_e}{D} \frac{u^2}{2}$$

Pérdidas en codos, válvulas y uniones

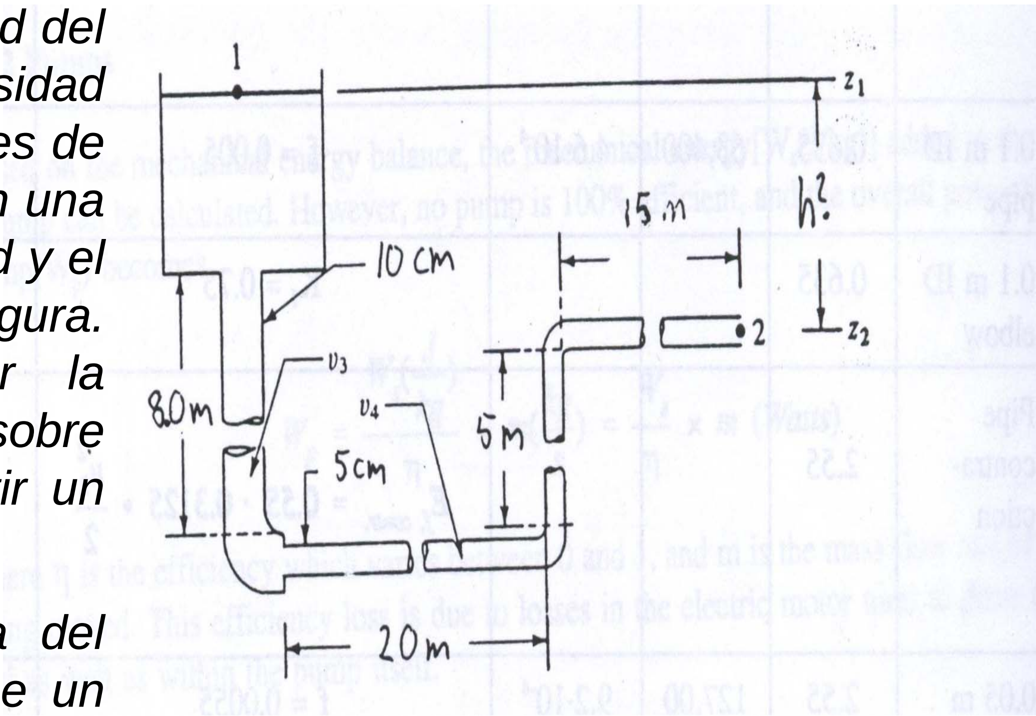
$$E_f = K_f \frac{u^2}{2} = 4f \frac{L_e}{D} \frac{u^2}{2}$$

Singularidad	***L_e/D***	***K_f***
Codo 45º	*17*	*0,35*
Codo 90º	*35*	*0,75*
Copla	*2*	*0,04*
Válvula Check abierta	*100*	*2*
Válvula compuerta abierta	*9*	*0,17*
Válvula compuerta ½ cerrada	*225*	*4,5*
Válvula globo abierta	*300*	*6,0*
Válvula ángulo abierta	*100*	*2,0*

Ejemplo 5

*Un gran estanque almacena agua como se observa en la figura. La densidad del agua es 998 kg/m^3 y la viscosidad 1,0*10^{-3} Pa*s. La cañería utilizada es de acero comercial con un Sch 40, con una rugosidad de 4,6*10^{-5} m. La longitud y el diámetro se indican en la figura. ¿Cuánto más alto debe estar la superficie del agua en el estanque sobre el punto de descarga para permitir un flujo de 5,0 l/s?*

Descripción: la cañería de salida del estanque de 8 m de longitud tiene un diámetro interior de 10 cm y un codo de 90º. Esta cañería conduce a una de 40 m de largo y 5 cm de diámetro con dos codos de 90º y una válvula de compuerta completamente abierta.



Ejemplo 5

Solución: para resolver este problema se utiliza el balance de energía mecánica. Debido a que no hay trabajo y sin presión sobre el estanque, y con el punto de descarga a la misma e igual presión atmosférica, la ecuación es:

$$\frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + g(z_2 - z_1) + \sum E_f = 0$$

*No se especifica el diámetro del estanque pero se puede asumir que la velocidad en 1 es muy baja. La velocidad en la descarga es de 2,55 cm/s y la energía cinética es (1/2*2,55^2 m^2/s^2)=3,25 m^2/s^2. La diferencia de elevación es:*

$$h = z_1 - z_2 = \frac{3{,}25\frac{m^2}{s^2} + \sum E_f}{g}$$

Se debe determinar la resistencia total: i) contracción en el estanque de salida, ii) fricción en la cañería de 0,1 m, iii) fricción en el codo de 90 º de 0,1 m, iv) contracción en la cañería de 0,1 a 0,05 m, v) fricción en la cañería de 0,05 m, vi) fricción en los codos de 90º de 0,05 m, y f) fricción en la válvula abierta.

Ejemplo 5

Item	***u(m/s)***	***Re***	***ε/D***	***f,K$_f$, K$_c$***	***E$_f$(m^2/s^2)***
Salida estanque	*0,635*			$E_{f,contr} = 0,55 * \frac{u_2^2}{2}$	*0,11*
Cañería 0,1 m D interior	*0,635*	*63400*	*4,6*10^{-4}*	*f=0,005*	*0,32*
Codo 0,1 m D interior	*0,635*			*K$_f$=0,75*	*0,15*
Contracción cañería	*2,55*			$E_{f,contr} = 0,55 * 0,3125 * \frac{u_2^2}{2}$	*0,56*
Cañería 0,05 m D interior	*2,55*	*127.000*	*9,2*10^{-4}*	*f= 0,0055*	*57,3*
Dos codos 0,05 m D int	*2,55*			*Total=2*K$_f$=1,5*	*4,9*
Válvula compuerta	*2,55*			*K$_f$=0,17*	*0,55*
Expansión súbita	*2,55*			$E_{f,\exp} = \frac{u_1^2}{2}$	*3,3*
ΣE$_f$					*67*

Ejemplo 5

Se puede observar que el punto principal de resistencia corresponden 57,3 de 67, a los 40 m de longitud de 0,05 m de diámetro de cañería.

La altura es:

$$h = \frac{3{,}25\,\frac{m^2}{s^2} + 67\,\frac{m^2}{s^2}}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 7{,}2\ m$$

Bombas

Basado en el balance de energía mecánica, la energía mecánica agregada al fluido (J/kg) debe ser incorporada. En su cálculo se puede usar la siguiente formula. Se debe notar que éstas están muy lejos de ser 100 % eficientes.

$$W_p = \frac{W_s\left(\frac{J}{kg}\right)}{\eta} * m\left(\frac{kg}{s}\right) = \frac{W_s}{\eta} * m$$

Ejemplo 6

Calcular la potencia requerida de un soplador con el propósito de alimentar aire a una tasa de 0,5 m^3/s, medidos a 101,3 kPa y 21 ºC en un reactor. El aire el cual inicialmente esta en reposo, entra al soplador a una presión de 98,7 kPa y deja éste a 103,0 kPa con una velocidad de 42 m/s, La temperatura actual del aire es 90 ºC. El soplador usado es de tipo centrifugo con una eficiencia de 65 %.

Solución: 6,6 hp

Diseño de sistemas de ductos y cañerías

Un diseñador debe determinar:

i) el diámetro de las cañerías,

ii) La potencia de la bomba ó soplador.

Por lo general, para resolver el balance de energía mecánica se utiliza un procedimiento iterativo dependiendo de los datos del sistema para resolver el balance de energía mecánica

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + g\left(u_2^2 - u_1^2\right) + g\left(h_2 - h_1\right) + \sum E_f - \frac{W_s}{Q} = 0$$

Si se especifica la potencia de la bomba se debe calcular el D de la cañería, asumiendo un factor de fricción (0,005 por ejemplo). Velocidades de gases, líquidos no viscosos y líquidos viscosos son típicamente 15,1 y 0,1 m/s se pueden usar estos valores en combinación con flujos conocidos. Luego calcular Re y determinar un nuevo f, del cual se desprenden nuevos diámetros y velocidades. Se repite hasta la convergencia.

Flujo turbulento de agua en cañería horizontal (rugosidad 0,046 mm) - aprox. +-15%

$$Agua: \quad D_{cañería} \approx 1.75 \left(\frac{Q^2 L}{\Delta P}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Diseño de sistemas de ductos y cañerías

Para flujo gravitacional, ΔP se puede reemplazar por $\rho g \Delta h$. En el caso de flujo de aire incompresible a presión atmosférica y temperatura ambiente, el diámetro - aprox. +-15%.

$$Aire: \quad D_{cañería} = 0.46\left(\frac{Q^2\,L}{\Delta P}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Las dos ecuaciones anteriores pueden ser usadas para una estimación inicial del diámetro de la cañería. Un procedimiento iterativo puede ser el que sigue para obtener una respuesta correcta:

1) *Estimar el diámetro inicial,*
2) *Calcular u y Re,*
3) *Obtener f del gráfico*
4) *Recalcular el nuevo diámetro con el f*
5) *Calcular el nuevo u y Re*
6) *Continuar hasta la convergencia*

Ejemplo 7

Cañería para el agua de lluvia de Santiago

*Calcular el diámetro mínimo requerido de un sistema de drenaje de agua lluvia capaz de colectar toda el agua en un área de 1 km^2. La tasa de precipitación es de 0,1 m por hora. La cañería de drenaje tendría una pendiente de 30 metros por 1000 m de longitud. La rugosidad de la cañería es de 1,2 mm. La densidad del agua es 1000 kg/m^3, y su viscosidad de 10^{-3} Pa*s.*

Solución: El caudal de agua Q es el sigue:

$$Q_{agua} = \frac{0,1}{3600}\frac{m}{s} * 10^6 m^2 = 27,8\frac{m^3}{s}$$

Se asume que: i) no hay bombas, ii) no hay cambio de energía cinética del agua a lo largo de la cañería, iii) cañería abierta en ambos extremos, iv) no hay singularidades asociadas a la cañeria, v) el flujo es turbulento. Usando una sección de 100 m de longitud como base, el balance de energía mecánica es:

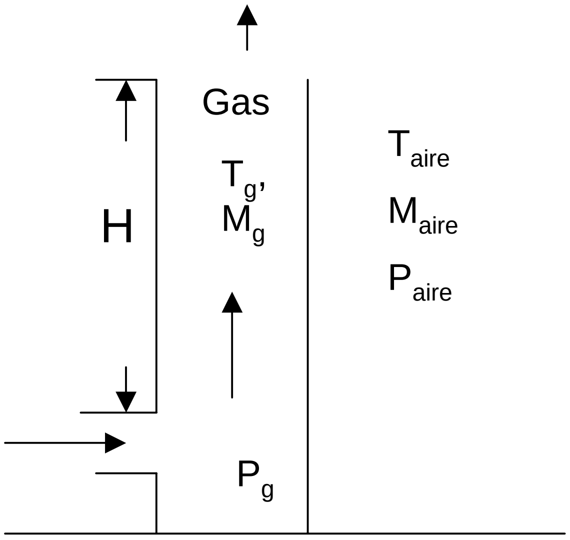
$$0 = g(z_2 - z_1) + 4f\frac{Lu^2}{2D} = -9,8*3 + \frac{200\ f}{D}u^2 = -29,8 + \frac{325\ fQ^2}{D^5}$$

$$D = 1,62\sqrt[5]{f * Q^2}$$

Asumiendo un f = 0,0044 => D= 2,07 m

Tiraje en chimeneas

Cuando se hace fuego en una chimenea, en una parrilla ó en un horno, se induce un tiraje que induce a los gases calientes a subir. La razón de esto es que los gases en la chimenea son menos densos que el aire ambiental, con una presión hidrostática más baja dentro del horno que en el exterior. Si consideramos la figura la diferencia de presión esta dada por:



$$\Delta P = (\rho g H)_{aire} - (\rho g H)_{Chimenea} = \left[\left(\frac{MP}{RT} \right)_{aire} - \left(\frac{MP}{RT} \right)_{chimenea} \right] g H$$

Asumiendo que las presiones dentro y fuera de la chimenea son casi las mismas:

$$\Delta P = \left[\left(\frac{M}{T} \right)_{aire} - \left(\frac{M}{T} \right)_{chimenea} \right] * \frac{P_{aire} g H}{R}$$

Ejemplo 8

Determinar el tiraje en Pa de una chimenea industrial de 50 m de altura cuando un gas (15 % de CO_2, 6 % de O_2 y 79 % de N_2) fluye a través de ésta a una temperatura de 250 ºC. La presión externa es de $1.01*10^{-5}$ Pa y la temperatura ambiente de 10 ºC. Los pesos moleculares promedios del aire y del gas de chimenea, respectivamente son: M_{aire} =0,02884 kg/mol , M_{gas} = 0,03064 kg/mol

$$\Delta P = \left[\frac{M_{aire}}{T_{aire}+273} - \frac{M_{gas}}{T_{gas}+273} \right] * \frac{P_{aire} * g * H}{R}$$

$$\Delta P = 263901\ Pa$$

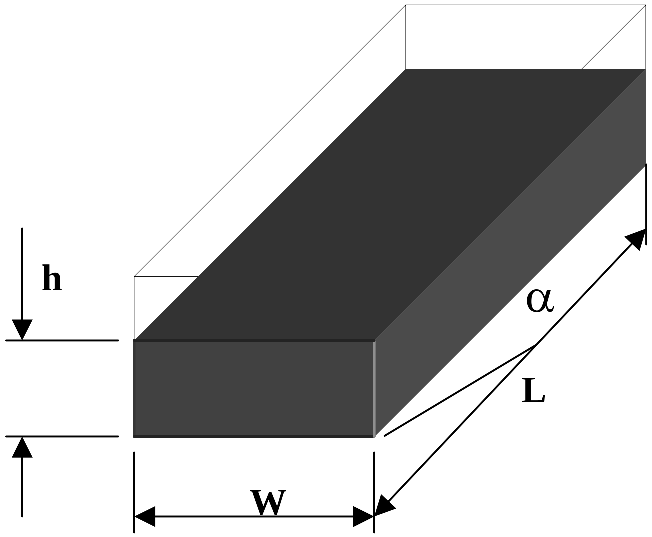
$$\Delta P = 2,064 * 10^{-3}\ atm$$

Flujo en canales abiertos y ductos no circulares

Diámetro equivalente

$$D = 4\,\frac{\text{área sección del canal}}{\text{perímetro mojado del canal}} = 4\,\frac{W\,h}{W + 2h}$$

Bajo condiciones en estados estacionario las fuerzas de fricción se balancean con las fuerzas gravitacionales:



$$\sum E_f = g\,L\sin(\alpha) = 4\,f\,\frac{u^2\,L}{2\,D_e}$$

Así la velocidad queda dada por:

$$u = \left[\frac{g\ sen\,(\alpha)\,D_e}{2\,f}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Para Re: $$\mathrm{Re} = \frac{u\,\rho D_e}{\mu} \geq 8000 \qquad f = \frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon}{D_e}\right)^{\frac{1}{3}}$$

El flujo volumétrico Q en la canal está dado por:

$$Q = u\,W\,h = \left[\frac{g\,D_e\sin(\alpha)}{2\,f}\right]^{\frac{1}{2}} W\,h$$

Flujo en canales abiertos

Ejemplo: Flujo de escoria por una canaleta

Datos: Ancho canal = 15 cm, altura = 10 cm, α = 10º, ε = 3 mm

ρ = 3600 kg/m³, μ = 0,1 Pa s

$$D_e = 4\frac{w * h}{w + 2h}$$

$$D_e = 0{,}171\ m$$

$$R_e = D_e * u\frac{\rho}{\mu}$$

$$R_e = 1{,}998 * 10^4$$

$$f = \frac{1}{8} * \left(\frac{\varepsilon}{D_e}\right)^{0{,}333}$$

$$f = 0{,}032$$

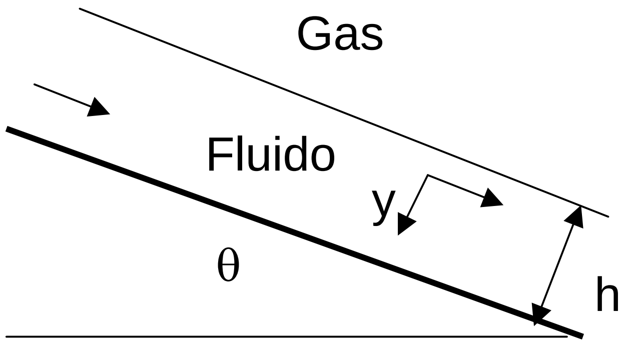
$$u = \sqrt{\frac{D_e * g * \sin(\alpha)}{2 * f}}$$

$$u = 3{,}237\ m/s$$

$$Q = \sqrt{\frac{g * D_e * \sin(\alpha)}{2 * f}} * w * h \qquad Q = 1{,}907\ m^3/\min$$

$$Q_m = Q * \rho \qquad Q_m = 6{,}867\ t/m^3$$

Flujo laminar en un plano inclinado



*Consideraciones: i) la superficie del fluido esta en contacto completo con aire a presión atmosférica, ii) no hay presión hidrostática a lo largo de la longitud del plano, iii) la componente gravitacional que actúa en la dirección del flujo es g*sen θ.*
En un volumen de control se tiene:

$$F = mg * sen\,\theta = (\rho \Delta x \Delta y \Delta z)\, g * sen\,\theta$$

El balance de momentum total en x+Δx es:

$$(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) g * sen\theta + (\tau - \tau_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z = 0$$

Dividiendo por el volumen de control y con los límites tendiendo a cero

$$\frac{d\tau}{dy} = \rho g sen(\theta)$$

El esfuerzo de estrés se encuentra por integración:

$$\tau_y = \rho g sen\,(\theta) * y + A_o$$

Flujo laminar en un plano inclinado

A_0 depende del esfuerzo de la interfase agua/aire. La viscosidad del agua es cerca de 100 veces más alta que la viscosidad del aire, así el gradiente de velocidad en el agua de la interfase agua/aire es 1/100 de la del aire:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{agua} = \frac{\mu_{aire}}{\mu_{agua}}\left(\frac{du}{dy}\right)_{aire} \approx 0{,}01\left(\frac{du}{dy}\right)_{aire}$$

Debido a este pequeño valor se asume que la interfase del fluido en contacto con gas A_0=0, por lo que:

$$\tau_y = (\rho g sen\ \theta)\, y = -\mu \frac{du}{dy}$$

Con y=h

$$\int_0^u du = -\int_{(}^{y} \frac{\rho g\ sen(\theta)}{\mu L} y dy$$

$$u = \frac{\rho g\ sen(\theta)}{2\mu}(h^2 - y^2)$$

Flujo laminar en un plano inclinado

La velocidad promedio al integrar por la velocidad local a través de la película.

$$u_{prom} = \frac{\rho g \, sen(\theta) h^2}{3\mu}$$

El flujo volumétrico a lo largo del plano con un ancho W es:

$$Q = u_{prom} W h = \frac{W \rho g \, sen(\theta) h^3}{3\mu}$$

Así el espesor puede ser calculado como sigue:

$$h = \left(\frac{3\mu Q}{W \rho g \; sen(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}}$$