

Capítulo 1

Sistemas de un grado de libertad

Sistema lineal: Ecuación diferencial que rige su movimiento es lineal

Ejemplo:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

1.- Principio de superposición:

$$e_1(t) \rightarrow s_1(t)$$

$$e_2(t) \rightarrow s_2(t)$$

...

..

.

Entonces:

$$e_1(t) + e_2(t) + \dots \rightarrow s_1(t) + s_2(t) + \dots$$

La presencia de una excitación, no afecta la respuesta del sistema a otras excitaciones.

2.- En el estado permanente: La respuesta de un sistema lineal a una excitación armónica Ω , es a la misma frecuencia Ω .

Si

$$f(t) = F \operatorname{sen} \Omega t \rightarrow x(t) = X \operatorname{sen} (\Omega t - \varphi)$$

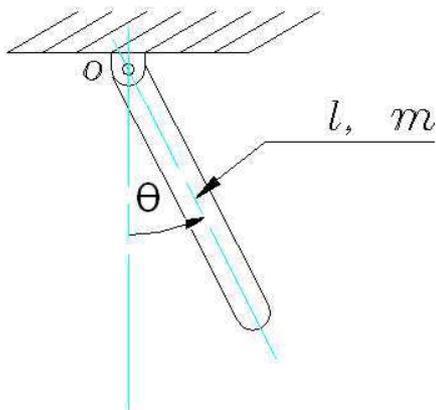
Linealización de los sistemas para pequeñas oscilaciones respecto a su posición de equilibrio.

$$\sin \theta \rightarrow \theta$$

$$\cos \theta \rightarrow 1$$

$$\dot{\theta}^2, \dot{\theta}\ddot{\theta}, \text{etc} \rightarrow 0$$

Ejemplo:



$$\sum M_o = I_o \ddot{\theta}$$

$$I_o \ddot{\theta} + mg \frac{l}{2} \sin \theta = 0$$

$$I_o \ddot{\theta} + mg \frac{l}{2} \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) = 0$$

Para pequeñas oscilaciones $I_o \ddot{\theta} + mg \frac{l}{2} \theta = 0$

1.1- Componentes del modelo dinámico elemental

- Masa, m (concentrada en un bloque rígido).
- Propiedades elásticas, k (resorte sin masa).
- Disipación de energía o amortiguamiento, c (supuesto viscoso)
- Fuente de excitación: f(t), fuerzas y/o momento $x_b(t)$, movimiento de la base.

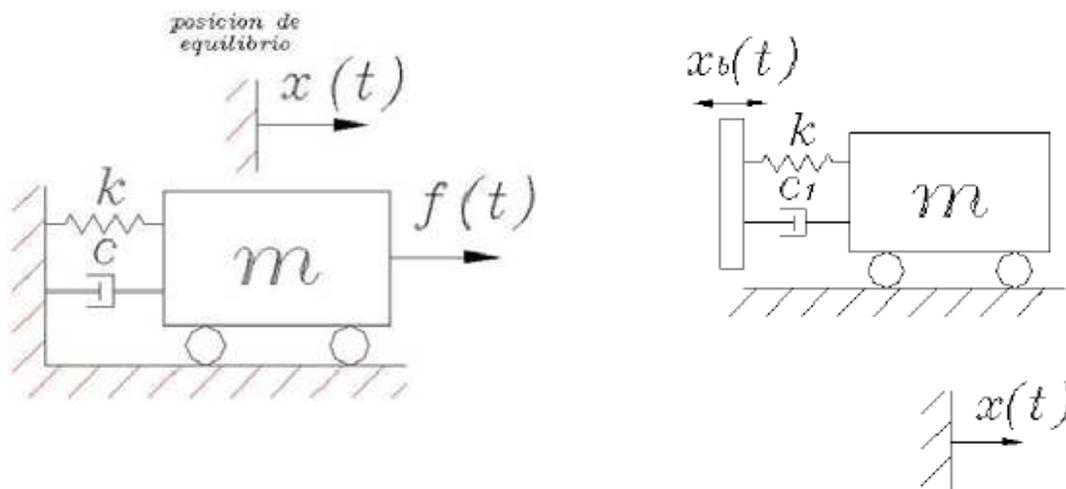
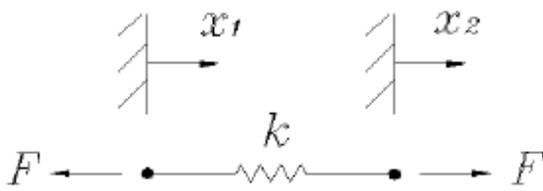
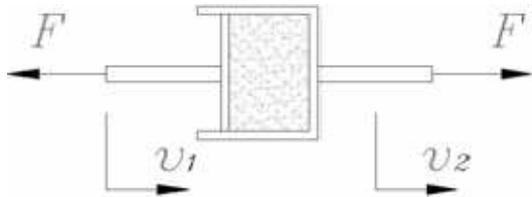


Fig 1.1 Modelo ideal

Rigidez	$k = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Deformación}} = \frac{F}{x_2 - x_1} = \frac{F}{\Delta x}$	
---------	-------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------

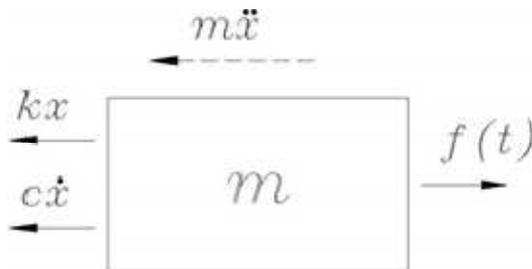
Amortiguamiento viscoso :



$$F = c(v_2 - v_1)$$

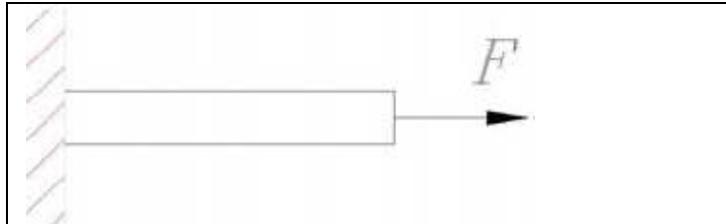
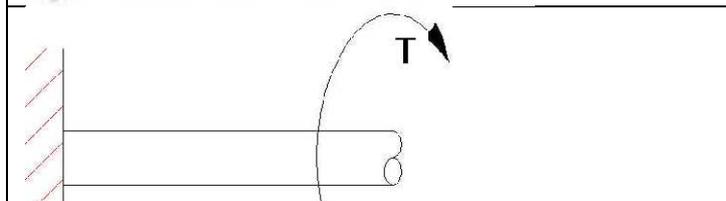
c : Coeficiente de amortiguamiento viscoso

Ecuaciones del movimiento del sistema ideal:



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

Se obtiene una ecuación diferencial lineal de segundo orden. A continuación se resolverá esta ecuación primero para casos particulares y posteriormente para el caso general.

	$\sigma = E\varepsilon$ $F/A = E\Delta l/l$ $\rightarrow k = \frac{F}{\Delta l} = EA/l$
	$\theta = \frac{TL}{GJ}$ $\rightarrow \frac{T}{\theta} = GJ/L$
	$\delta = \frac{Fl^3}{48EI}$ $\rightarrow k = \frac{F}{\delta} = 48EI/l^3$

 	<p>Resortes en serie:</p> $\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ <p>Resortes en paralelo:</p> $k_{eq} = k_1 + k_2$
	$k = \frac{3EI}{L^2(L + L1)}$
	$k = \frac{192 EI}{L^3}$
	$k = \frac{3 EIL}{a^2 b^2}$ $L = a + b$

1.2.- Vibraciones libres ($f(t)=0$)

Se llama vibraciones libres el movimiento de un sistema sin la acción de fuerzas externas. Obviamente para que el sistema se mueva es necesario sacarlo inicialmente de su posición de equilibrio a través de un desplazamiento y/o velocidad inicial.

1.2.1.- Vibraciones libres y no amortiguadas ($f(t)=0$ y $c=0$)

Determinar el movimiento del sistema ideal cuando se le da un desplazamiento y velocidad inicial (x_0 y \dot{x}_0). El problema entonces se reduce al siguiente problema del valor inicial P.V.I.

$$m\ddot{x} + kx = 0 ; x(0) = 0 ; \dot{x}(0) = 0$$

La solución de esta ecuación es:

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Los valores de r son determinados de la ecuación característica:

$$m r^2 + k = 0 \rightarrow r = \pm j \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La solución general de una ecuación diferencial es la suma de todas sus soluciones particulares, por lo tanto:

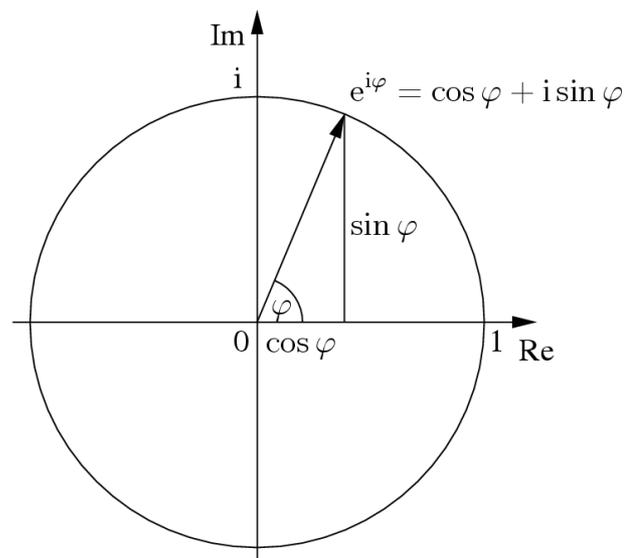
$$x(t) = C_1 e^{j\omega_n t} + C_2 e^{-j\omega_n t}$$

Donde:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

utilizando la ecuación de Euler:

$$e^{jx} = \cos x + i \sin x$$



Reemplazando las C.I. se obtiene que:

$$x(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t : \text{Movimiento Armónico simple}$$

Las constantes A y B se obtienen de las condiciones iniciales, obteniéndose:

$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t ; \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $x(t) = X_0 \sin(\omega_n t + \varphi)$	(1-1)
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------

$X_0 = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/w_n)^2}$ $\tan \varphi = w_n x_0 / \dot{x}_0$	(1-2)
-------------------------------------------------------------------------------	-------

Movimiento armónico simple: Movimiento de una masa m unida a un resorte de rigidez k:

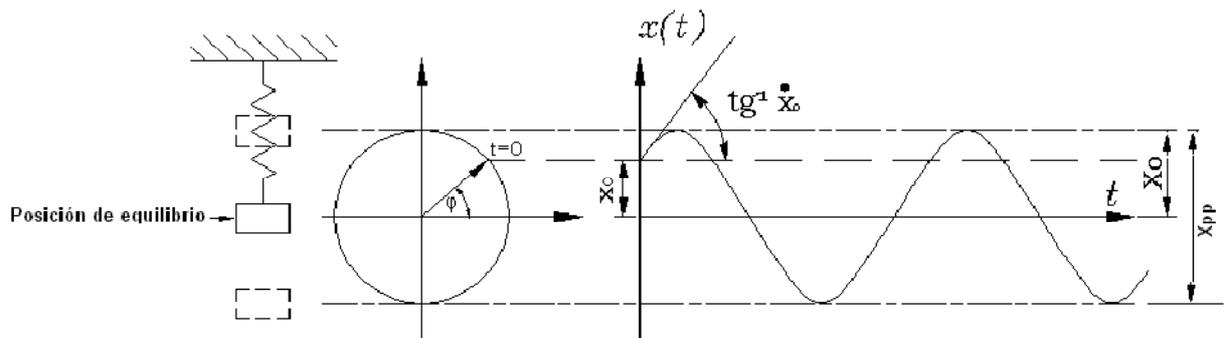


Fig 1.1. Movimiento armónico simple

X_0 = Amplitud del desplazamiento, valor pico (m)

T = Período del movimiento (s)

$f = 1/T$ = Frecuencia del movimiento (Hz)

$\omega_n = 2\pi f_n$ = Frecuencia (circular) natural de vibrar (rad/s)

φ = Ángulo de fase (rad)

$v = \dot{x}$ = Velocidad (m/s)

$a = \ddot{x}$ = Aceleración (m/s²)

$$v(t) = \dot{x}(t) = X_0 \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi) = V_0 \sin(\omega_n t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -X_0 \omega_n^2 \sin(\omega_n t + \varphi) = A_0 \sin(\omega_n t + \varphi + \pi)$$

V_0 = Amplitud de la velocidad, valor pico (m)

A_0 = Amplitud de la aceleración, valor pico (m)

X_{pp} = Valor peak to peak del desplazamiento = $2 X_0$

X_{RMS} = Valor RMS = $0,707 X_0$

La velocidad y aceleración están adelantados respecto al desplazamiento en 90° y 180° respectivamente.

La frecuencia con que vibra libremente el sistema ideal sin amortiguamiento, ω_n , se llama su **frecuencia natural de vibrar**:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Solo depende de las características del sistema (k y m)
- Si disminuye la rigidez del sistema, disminuye ω_n
- Si aumenta la rigidez del sistema, disminuye ω_n

Ejemplo:

Máquina rígida montada en 4 aisladores sobre una base elástica. Despreciando la masa de las vigas respecto a la masa de la máquina, el modelo del sistema será el indicado en la figura. Los 4 aisladores están montados en paralelo entre ellos y en serie con la viga, por lo tanto, de Tabla N°1 la rigidez equivalente k será:

$$k = \frac{1}{1/4k_a + 1/k_v} = \frac{4k_a \cdot k_v}{4k_a + k_v}$$

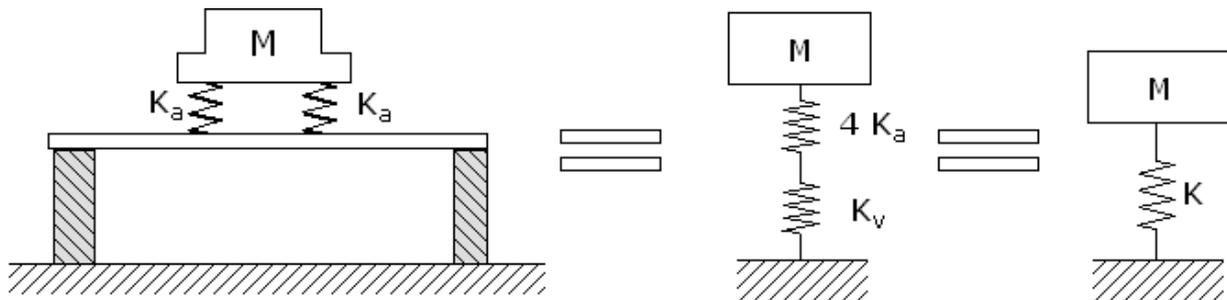


Fig 1.2. Máquina rígida montada en 4 aisladores sobre una base elástica

M = masa de la máquina
 K_a = rigidez de cada aislador
 K_v = rigidez de la viga

Ejemplo numérico

Considere que:

- $K_v = 10^8$ (N/m)
- $4K_a = 10^6$ (N/m)

entonces, la rigidez equivalente del sistema será:

$$k = \frac{10^8 \cdot 10^6}{10^8 + 10^6} = 0,99 \cdot 10^6 \text{ (N/m)} \approx 4k_a$$

Conclusiones importantes:

1. Cuando la rigidez de un elemento en serie es mucho menor que los otros, la rigidez equivalente es aproximadamente igual a la rigidez del elemento menos rígido.

- Lo anterior muestra como flexibilizar para disminuir la frecuencia natural de una máquina: al agregar un elemento elástico disminuye la rigidez equivalente del sistema.

Ejemplo

Rotor de eje elástico montado en descansos hidrodinámicos y sobre una base rígida:

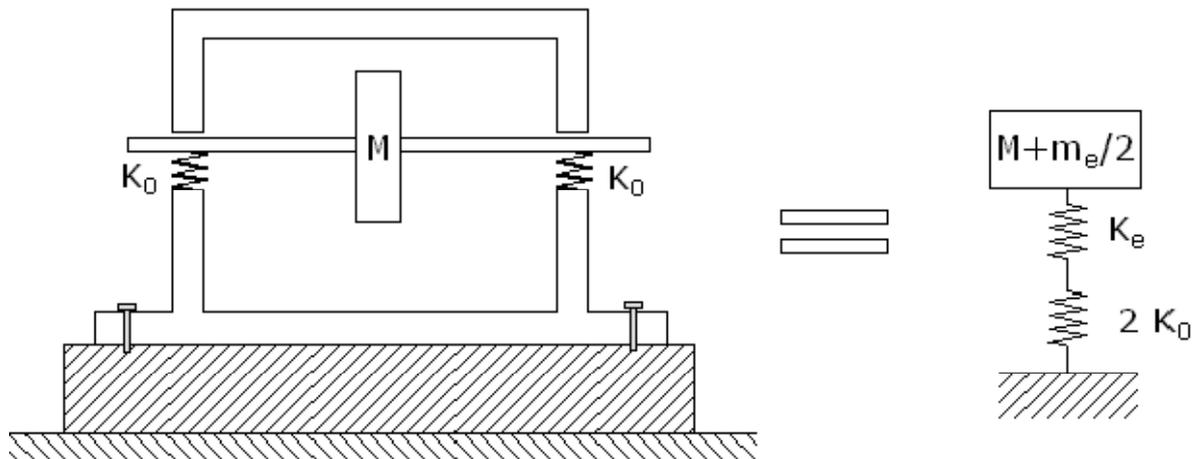


Fig 1.3. Rotor de eje elástico montado en descansos hidrodinámicos y sobre una base rígida.

$$w_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M + m_e/2}}$$

M = masa del rotor

M_e = masa del eje

K_e = Rigidez del eje

K_0 = Rigidez de la película de aceite

$$k = \frac{2k_0 \cdot k_e}{2k_0 + k_e}$$

Conclusión importante:

Observe de la expresión anterior, que la frecuencia natural de vibrar del rotor cuando está detenido es diferente a su frecuencia natural cuando está girando. Cuando está detenido no existe la película del aceite.

1.2.2.- Vibraciones libres amortiguadas

Resolver P.V.I:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 ; x(0) = x_0 ; \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Ecuación característica: $mr^2 + cr + k = 0$

Prof. Dr. MSc. Eduardo Salamanca H.
Vibraciones Mecánicas ME4701- Cap 1 año 2010

$$r_1, r_2 = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left[\frac{c}{2m}\right]^2 - \frac{k}{m}}$$

Para que el sistema vibre, r_i deben ser imaginarios:

$$\frac{k}{m} > \left[\frac{c}{2m}\right]^2$$

Se define el **amortiguamiento crítico**, c_c , como el máximo valor de c para que el sistema pueda vibrar libremente. De la ecuación anterior se concluye que para que eso ocurra:

$$\frac{k}{m} = \left[\frac{c}{2m}\right]^2 \rightarrow c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

La expresión anterior es más cómodo expresarlo en función de 2 parámetros que son fáciles de medir en la práctica: ξ y ω_n

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \text{Factor de amortiguamiento}$$

en base a estos parámetros las soluciones de la ecuación característica serán:

$$r_1, r_2 = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Caso I:

Amortiguamiento sub-crítico ($\xi < 1$) \Rightarrow Raíces complejas conjugadas \Rightarrow Existe vibración. En este caso la solución de la ecuación diferencial será:

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

A y B determinados de las ecuaciones iniciales x_0 y \dot{x}_0

Luego:

$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 \xi \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t + x_0 \cos \omega_d t \right)$	(1-5)
$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \text{frecuencia natural de vibrar amortiguada}$	
$x(t) = X_0 e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi_d)$	(1-6)
$X_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + x_0 \xi \omega_n)^2}{\omega_d^2}}$	
$\tan \varphi_d = \frac{\omega_d x_0}{\dot{x}_0 + x_0 \xi \omega_n}$	

El efecto del amortiguamiento en las vibraciones libres, figura 1.4 y 1.5 es:

- Disminuir secuencialmente la amplitud de las vibraciones libres.
- Disminuir la frecuencia natural de ω_n a ω_d

En la práctica generalmente $\xi < 0,2$ y $\omega_n \approx \omega_d$, es decir, la frecuencia natural de vibrar es aproximadamente igual en valor a la frecuencia natural de vibrar amortiguada. Sin embargo, debido a lo anterior en mucha de la literatura existente se habla de frecuencia natural indistintamente para ambos casos.

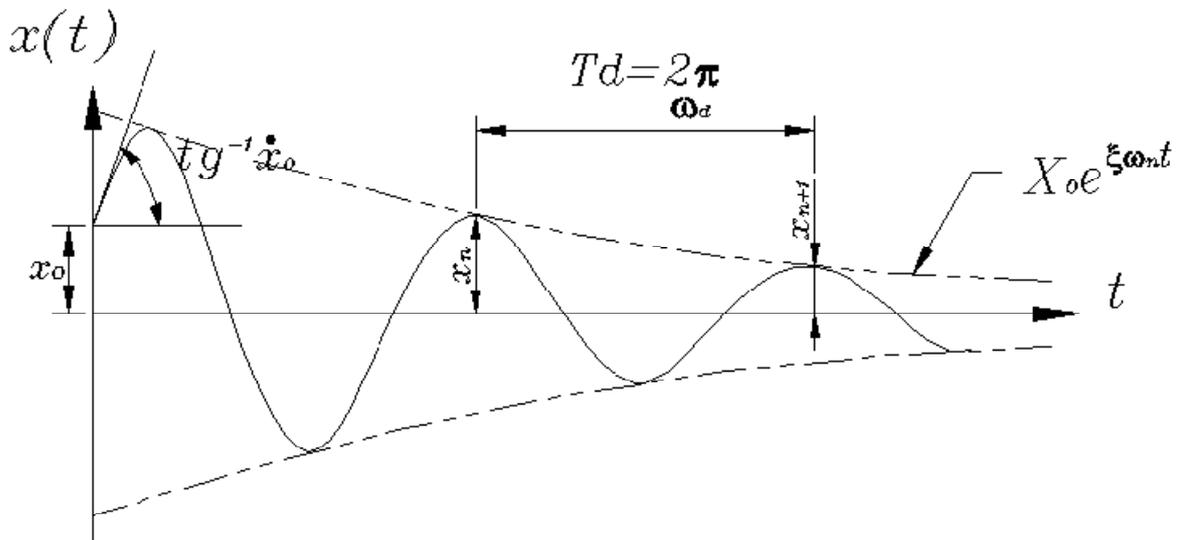
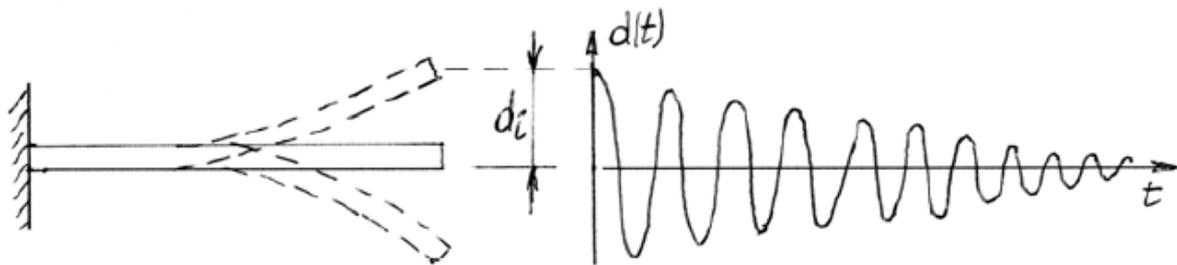
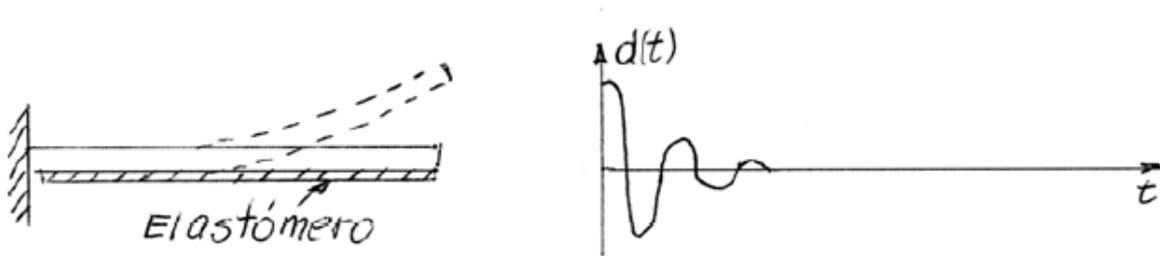


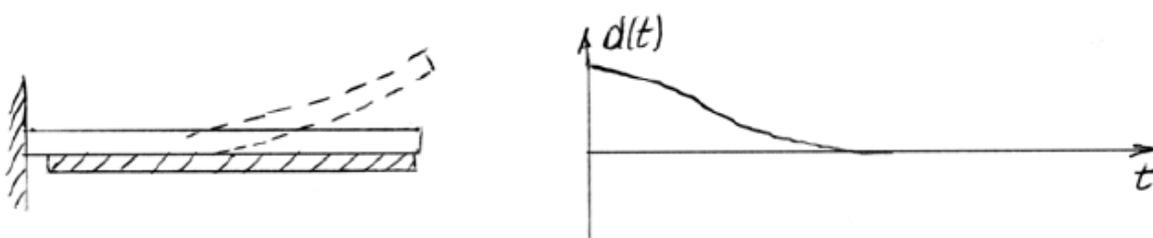
Fig 1.4. Vibración libre amortiguada



$C=0,02C_c$ (2% C_c); $\xi=0,02$; Varias oscilaciones en vibraciones libres



$C=0,4C_c$ (40% C_c) ; $\xi=0,4$; Pocas oscilaciones en vibraciones libres



$C=C_c$ (100% C_c) ; $\xi=1$; No se generan oscilaciones en vibraciones libres

$d(t)$ = desplazamiento vibratorio después de desplazar en d_i el sistema desde su posición de reposo y dejarlo vibrar libremente.

Decrecimiento logarítmico (δ):

Una forma práctica de determinar el amortiguamiento es a partir de un registro de vibraciones como el indicado en la figura 1.4, midiendo el cociente entre dos amplitudes X_n y X_{n+1} .

Definición:

$$\delta = \ln\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right) \quad (1-7)$$

Los valores de X_n y X_{n+1} ocurren en un tiempo t y $t + T_d$ respectivamente. Para ambos casos $\sin(\omega_d t + \phi_d) \approx 1$. Entonces:

$$\delta = \ln\left(\frac{e^{-\xi \omega_n t}}{e^{-\xi \omega_n (t+T_d)}}\right) = \ln(e^{\xi \omega_n T_d}) = \xi \omega_n T_d = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (1-8)$$

Para pequeños valores de ξ ,

$$\delta \approx 2\pi\xi$$

Caso II:

Cuando el amortiguamiento es crítico ($\xi = 1$), se obtiene:

- raíces reales e iguales
- no existe vibración

$$r_1 = r_2 = -\xi \omega_n$$

La solución para este caso es:

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} (A_1 + A_2 t)$$

introduciendo las condiciones iniciales:

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} (x_0 (1 + \omega_n t) + \dot{x}_0) \quad (1-9)$$

Caso III:

Cuando el amortiguamiento es sobre-crítico ($\xi > 1$), se obtiene:

- raíces reales y desiguales
- no existe vibración

$$r_1, r_2 = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left[A \sinh \left(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t \right) + B \cosh \left(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t \right) \right] \quad (1-10)$$

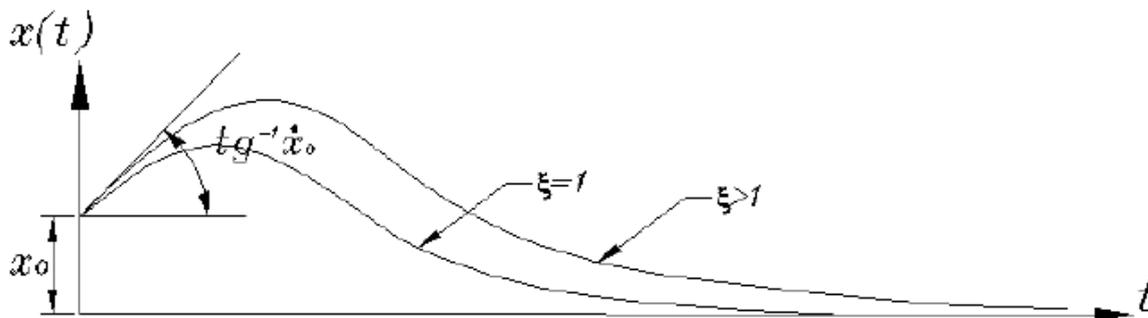


Fig 1.6. Vibraciones libres en sistemas con amortiguamiento crítico y sobre- amortiguado

Cuando el sistema tiene amortiguamiento crítico o sobre amortiguamiento, se observa que en las vibraciones libres, la respuesta no es oscilatoria, el cuerpo solo retorna hacia la posición de equilibrio, como lo muestra la figura

1.2.3.- Estabilidad de un sistema

La estabilidad de un sistema se analiza en sus vibraciones libres:

La solución de la ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Es:

$$x(t) = Ae^{rt} = Ae^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

Donde:

$$r = \sigma + j\omega$$

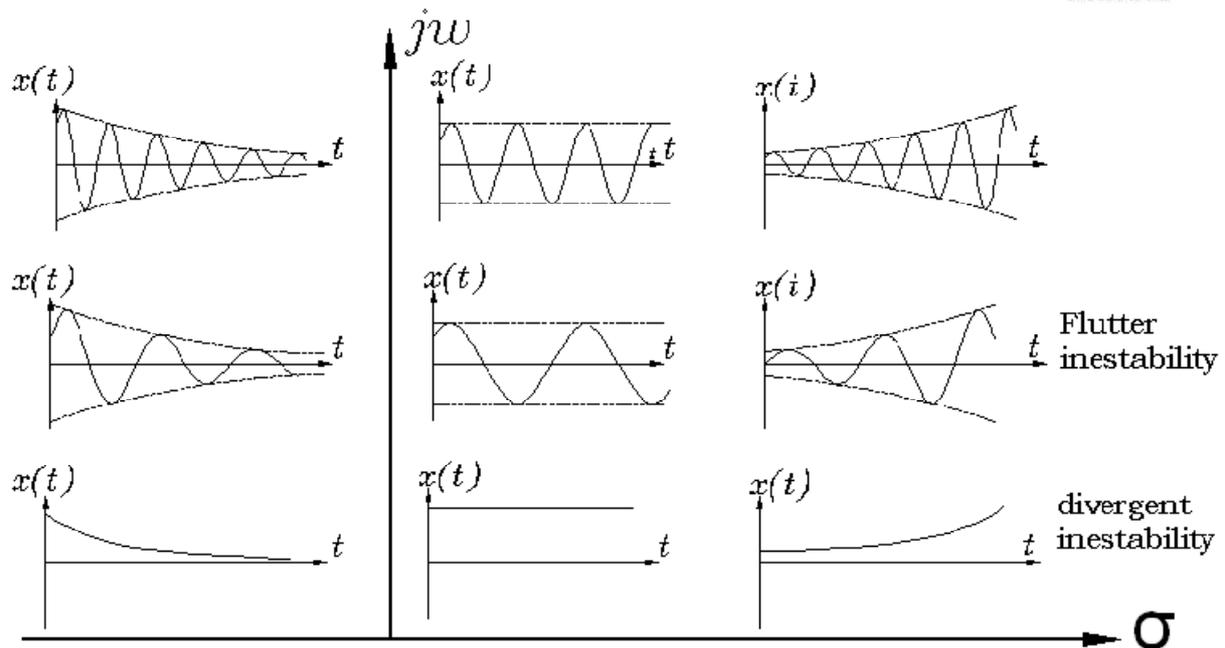


Fig 1.7. Ilustración del criterio de estabilidad en el plano complejo

Criterios de estabilidad

Una condición necesaria y suficiente para que un sistema sea estable, es que **todas las raíces de la ecuación característica tengan partes reales negativas**.

Lo anterior queda ilustrado en la figura 1.7. Se observa que cuando σ es positivo el movimiento es inestable (el desplazamiento $x(t)$ tiende a infinito con el tiempo), mientras que cuando σ es negativo el movimiento es estable (el desplazamiento $x(t)$ tiende a cero, o a la posición de equilibrio, con el tiempo).

Analizando para el caso del sistema ideal:

$$r = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Se produce un movimiento inestable cuando **k y/o c sean negativos**. Físicamente esto significa, como ocurre en muy raras ocasiones, que estas fuerzas no se oponen al movimiento, sino que lo ayudan.

Ejemplo: Analice la estabilidad del péndulo invertido de la figura 1.8

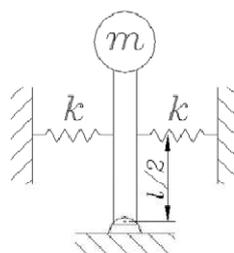
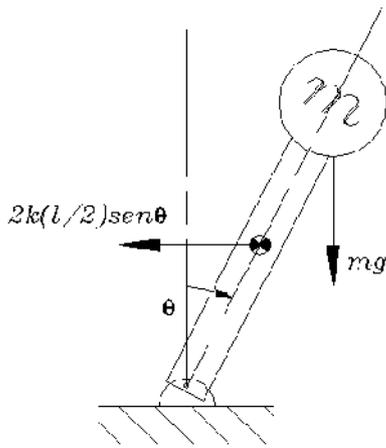


Fig 1.8. Ejemplo de un péndulo invertido



$$\begin{aligned} \sum M_0 &= I_0 \ddot{\theta} \\ -k \frac{l}{2} \sin \theta \frac{l}{2} \cos \theta + mgl \sin \theta &= ml^2 \ddot{\theta} \\ ml^2 \ddot{\theta} + \frac{kl^2}{2} \theta - mgl \theta &= 0 \\ 2ml \ddot{\theta}(t) + (kl - 2mg) \theta(t) &= 0 \\ r^2 &= -\frac{k^*}{m^*} = \frac{(kl - 2mg)}{2ml} \end{aligned}$$

Si la rigidez efectiva k^* es negativa, es decir si $kl - 2mg < 0$, el movimiento del péndulo será inestable, es decir, si se le desplaza de su posición de equilibrio el no trata de volver a su posición de equilibrio sino que se aleja más de ella.

Para este ejemplo se puede obtener la misma relación solo de la física del problema : para que el péndulo vuelva a su posición de equilibrio(estable), es necesario que el momento que genera la fuerza del resorte respecto al punto O , sea mayor al que genera el peso:

$$kl \text{ sen} \theta (l/2 \text{ cose}) > mg l \text{ sen} \theta$$

1.3. Vibraciones Forzadas

En este punto se estudiará la respuesta del sistema ideal bajo la acción de diferentes tipos de fuerzas excitadoras:

- Fuerza armónica
- Fuerza periódica
- Fuerza cualesquiera
- Fuerzas de impacto

1.3.1.- Vibraciones forzadas con excitación armónica

Las ecuaciones del movimiento del sistema de figura 1.9 son:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \Omega t$$

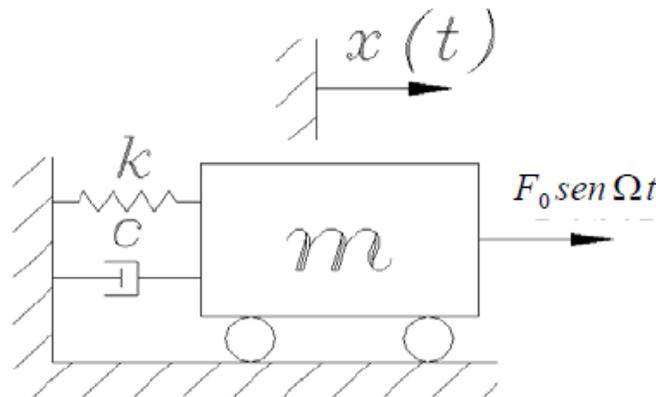


Fig 1.9. Sistema ideal con excitación armónica

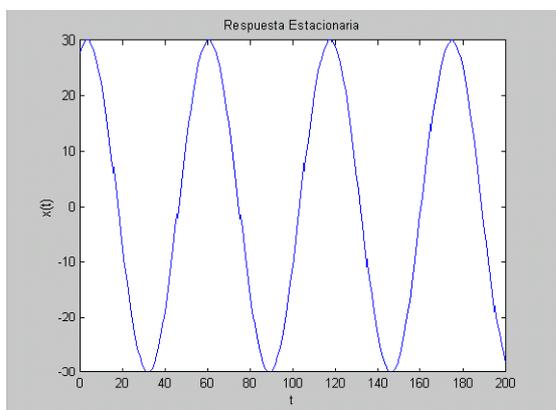
La solución de la ecuación anterior es la suma de la respuesta de la ecuación homogénea (término de la derecha igual cero) más una respuesta particular, como se indica en la siguiente ecuación:

$$x(t) = Ae^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi_d) + X_0 \sin(\Omega t - \varphi)$$

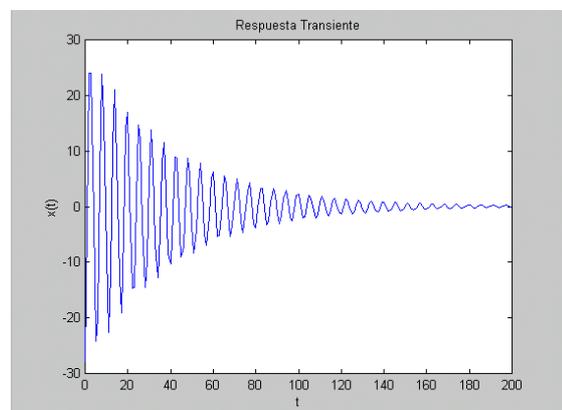
$x(t) = \text{Vibración transiente (Solución homogénea)} + \text{Vibración Estacionaria (Solución particular)}$

La solución homogénea es la ecuación (1-6) en el punto anterior para las vibraciones libres amortiguadas. Las constantes A y φ_d se determinan de las condiciones iniciales (y como en toda ecuación diferencial, estas condiciones se aplican a la respuesta total). La amplitud y el desfase de la respuesta estacionaria (como se deducirán en el punto siguiente) son:

$X_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right]^2}}$	(1-11)
$\tan \varphi = \frac{\left[\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right]}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$	(1-12)



Vibración estacionaria



Vibración transiente

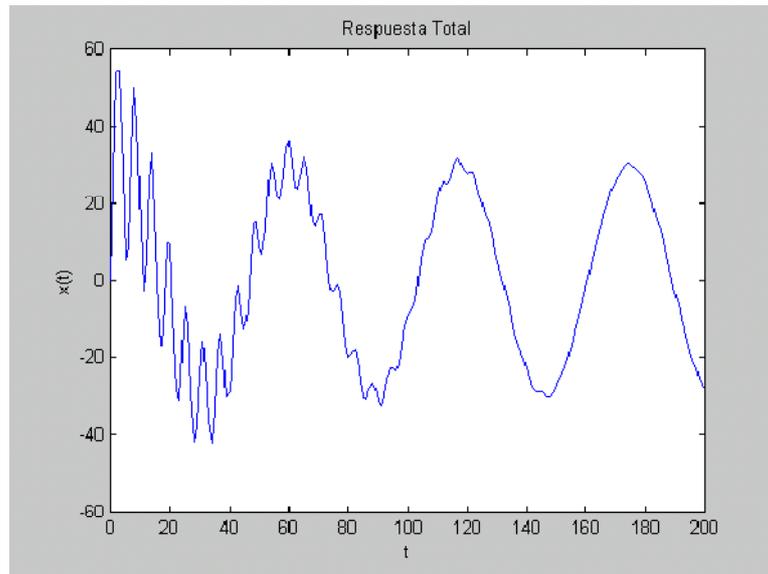


Fig 1.10. Vibración total = Vibración transiente + Vibración estacionaria

De las expresiones anteriores es necesario remarcar:

- la respuesta estacionaria es armónica y a la misma frecuencia Ω de la excitación. Esto es porque el sistema tiene comportamiento lineal, como en la mayoría de los casos prácticos ocurre. Si el sistema tuviese comportamiento no-lineal, la respuesta estacionaria sería una suma de componentes armónicas de frecuencias múltiplos enteros y/o fracciones de la frecuencia Ω de la excitación.
- la respuesta transiente desaparece rápidamente con el tiempo. A mayor amortiguamiento más rápido desaparece.

1.3.2.- Método del álgebra compleja

El uso del álgebra compleja generalmente simplifica el proceso de solución de la ecuación diferencial. Una función $x(t) = X_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$ puede ser representada como la proyección de un vector X_0 que gira con velocidad angular, ω , como se ilustra en la figura 1.11

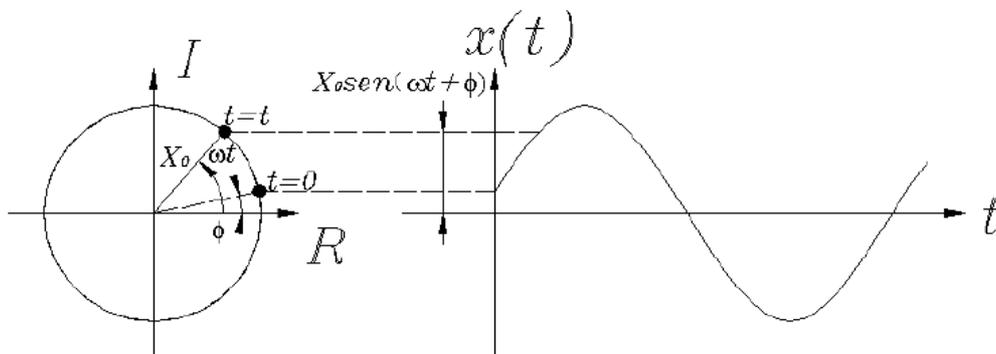


Fig 1.11. Representación de una función armónica

El vector rotatorio X_0 expresado en función de los ejes R, I es:

$$\begin{aligned}\vec{X}_0 &= X_0 \cos(\omega t + \phi) + jX_0 \sin(\omega t + \phi) = X_0 e^{j(\omega t + \phi)} = X_0 e^{j\omega t} e^{\phi} \\ \vec{X}_0 &= X e^{j\omega t} \\ X &= X_0 e^{j\phi} = \text{amplitud compleja}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x(t) = X_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$ puede ser expresado como:

$$x(t) = \text{Im}(X e^{j\omega t})$$

En la literatura generalmente se obvia escribir Im , y simplemente se escribe (lo que es obviamente incorrecto, pues un real no puede ser igual a un complejo)

$$x(t) = X e^{j\omega t}$$

A continuación se utilizará el álgebra compleja para determinar la respuesta estacionaria mostrada en las ecuaciones (1-10) y (1-11). La fuerza es expresada por la siguiente expresión, donde F al igual que X es un complejo que tiene módulo y fase:

$$f(t) = F e^{j\Omega t}$$

Por ser un sistema lineal, la respuesta estacionaria es a la misma frecuencia que la excitación y expresada como complejos queda:

$$x(t) = X e^{j\Omega t} ; \dot{x}(t) = j\Omega X e^{j\Omega t} ; \ddot{x}(t) = -\Omega^2 X e^{j\Omega t}$$

Reemplazando los complejos anteriores en las ecuaciones del movimiento, se obtiene:

$$(k + j\Omega c - m\Omega^2)X e^{j\Omega t} = F e^{j\Omega t}$$

$$X = \frac{F}{(k + j\Omega c - m\Omega^2)}$$

$$X = \frac{F(k - m\Omega^2) - j\Omega c}{(k - m\Omega^2)^2 + (\Omega c)^2}$$

$$\begin{aligned}X &= X_0 e^{j\phi_x} \\ F &= F_0 e^{j\phi_F}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el módulo de la respuesta estacionaria (mostrada en ecuación (1-11)) es:

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (\Omega c)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad (1-11)$$

y el desfase entre el desplazamiento y la fuerza de la respuesta estacionaria (mostrada en ecuación (1-12)), es:

$$\tan(\phi_X - \phi_F) = \frac{-\Omega c}{k - m\Omega^2} = -\frac{\left[\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right]}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

En la literatura generalmente se presenta el caso particular: $\phi_F = 0$ y $\phi_X = -\phi$, es decir, se introduce a priori que el desplazamiento está atrasado en un ángulo ϕ respecto a la fuerza. En ese caso se tiene la ecuación (1-12):

$$\tan \phi = \frac{\left[\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right]}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (1-12)$$

1.3.3. Análisis de la variación de la amplitud de la respuesta estacionaria X_0 con la frecuencia de la fuerza excitadora Ω

Figura 1.12 y 1.13 muestran graficadas las ecuaciones (1-11) y (1-12) respectivamente. Es importante para analizar la dinámica de los sistemas, entender físicamente lo que señalan estas figuras.

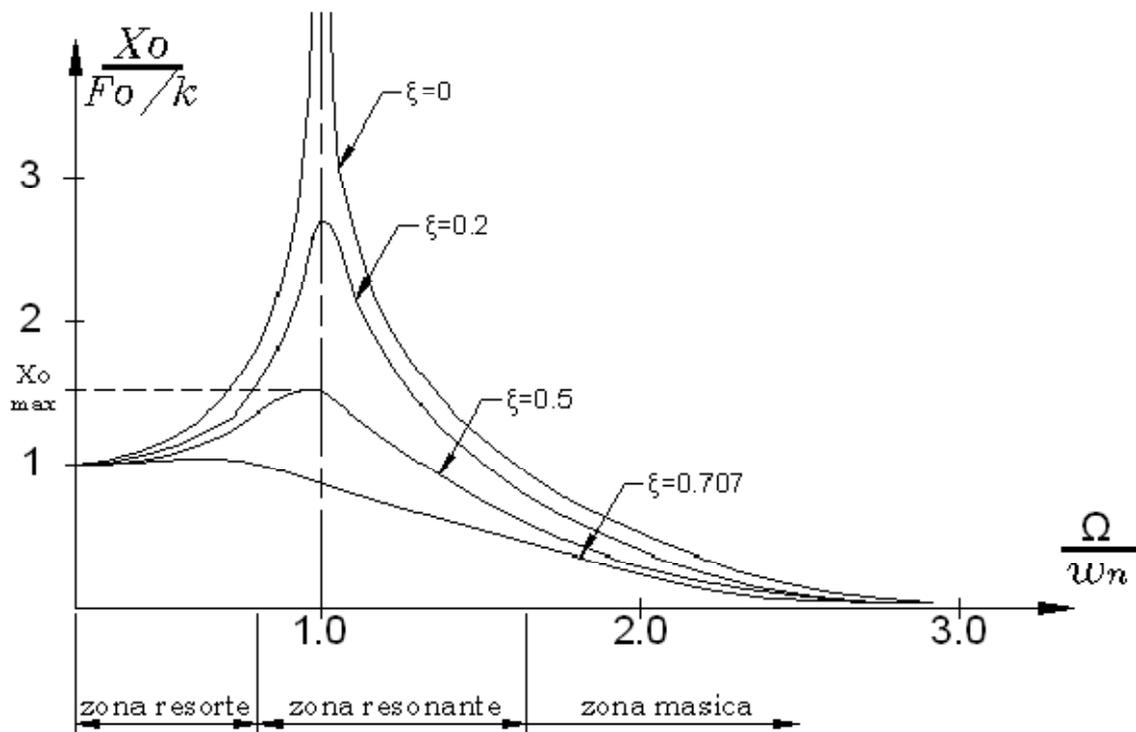


Fig 1.12. Variación de la amplitud de la respuesta estacionaria X_0 con la frecuencia de la fuerza excitadora, Ω

En el gráfico adimensional de figura 1.12 se observa:

1. A pesar que la fuerza F_0 aplicada es constante, el valor de la respuesta estacionaria X_0 es de magnitud muy variable. Dependiendo del valor de Ω / ω_n , X_0 puede llegar a tener valores infinito cuando este cociente es uno (para sistemas no amortiguados); y a valores tendientes a

cero para Ω / ω_n muy grandes (i observar que en este caso a pesar que la fuerza F_0 tenga valores inmensamente altos, el sistema no se mueve). ¿lo cree usted? ¿si lo cree, cómo lo explica?

2. **Resonancia:** Para sistemas poco amortiguados, cuando el cociente Ω / ω_n es cercano a uno, se generan altas amplitudes vibratorias y se dice que es porque la fuerza entró en resonancia o se sintonizó con la frecuencia natural del sistema. La literatura muestra muchos ejemplos históricos, como el caso del puente Tacoma, o en las empresas donde se han destruido máquinas y estructuras por problemas de resonancia, o como un tenor puede romper con su canto un vaso. Por lo tanto, es fundamental cuando se diseña cualquier sistema mecánico, fluido, o eléctrico, determinar las frecuencias naturales del sistema para evitar que estas estén cerca de las frecuencias de excitación y se produzca algún problema de resonancia.
3. El amortiguamiento solo es efectivo como método para disminuir las vibraciones cuando se está en la zona resonante. Lejos de la zona resonante el amortiguamiento no sirve para nada (las respuestas con o sin amortiguamiento son iguales). Esto rompe la panacea que se escucha en el ambiente industrial: “amortigüe la máquina o estructura para disminuir sus vibraciones”.
4. Se define la respuesta estática como la respuesta del sistema a una fuerza constante F_0 , o de frecuencia $\Omega = 0$. Por lo tanto,

$$X_{est} = F_0/k$$

5. La frecuencia para la cual se genera el mayor valor de X_0 , X_{0max} , se obtiene derivando la ecuación (1-11), obteniéndose:

$$X_{0max} = \frac{F_0/k}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, \text{ el cual ocurre para } \Omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Esta expresión indica que el mayor valor de X_0 no ocurre para $\Omega = \omega_n$, o ω_d . Sin embargo, como en la mayoría de los casos prácticos ξ es pequeño, entonces el máximo valor de X_0 ocurre para $\Omega = \omega_n$, y en este caso:

$$X_{0max} = \frac{F_0/k}{2\xi} = X_{est} * Q$$

6. El factor de amplificación, Q , se define como el cociente:
 $Q = (\text{Mayor valor de la respuesta estacionaria, } X_0 \text{ máx}) / (\text{respuesta estática, } X_{est})$
Para ξ pequeños:

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

Es decir, el factor de amplificación representa cuantas veces la respuesta estacionaria a una fuerza dinámica puede aumentar con relación a la respuesta del sistema a una fuerza estática de igual valor.

Figura 1. 13. muestra como varía la diferencia de fase, o desfase, ϕ , entre desplazamiento y fuerza con la frecuencia de la fuerza excitadora, Ω . En el gráfico adimensional de figura 1.13 se observa:

- el cambio abrupto del desfase en 180° al pasar la resonancia para un sistema no amortiguado. Este cambio es más gradual a medida que aumenta el amortiguamiento.
- más allá de la zona resonante el desfase entre fuerza aplicada y desplazamiento vibratorio es ≈180°, es decir, cuando la fuerza aplicada es en un sentido, el cuerpo se mueve (el desplazamiento) en sentido contrario. Si la fuerza está actuando hacia la derecha, el cuerpo se mueve en la dirección opuesta, es decir, hacia la izquierda. ¿cómo explica esto?

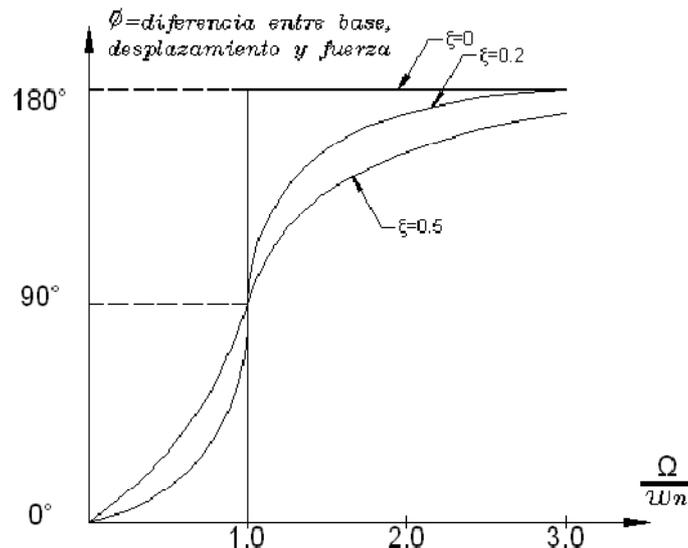


Fig 1.13. Variación de la diferencia de fase ϕ entre desplazamiento y fuerza con Ω

Análisis del equilibrio de las cuatro fuerzas que actúan sobre la masa M:

Utilizando el principio de D' Alambert, las cuatro fuerzas que actúan sobre el sistema deben estar en equilibrio:

$$f(t) - m\ddot{x} - c\dot{x} - kx = 0$$

$$f(t) + m\Omega^2 - k - j\Omega c = 0$$

1. Comportamiento resorte:

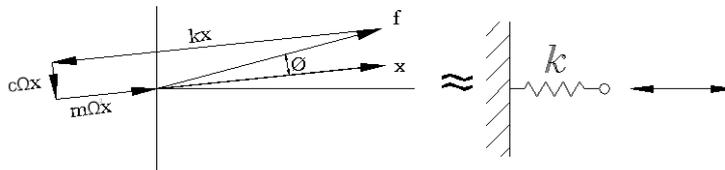
Si $\Omega \ll \omega_n$, ecuaciones (1-11) y (1-12) se transforman en:

$$X_0 \approx \frac{F_0}{k}, \text{ y } \phi \approx 0^\circ$$

es decir, el sistema responde igual que si sobre un solo resorte actuara la fuerza $f(t)$, por lo que se dice que el sistema tiene comportamiento resorte. Figura 1.14 ilustra esto, donde la fuerza kx es predominante respecto a las fuerzas $c\Omega x$ y $m\Omega^2 x$.

La fuerza $f(t)$ queda equilibrada casi exclusivamente por la fuerza elástica (deformación) del resorte. Este diseño no es adecuado porque a mayor fuerza $f(t)$, mayor deformación "x", lo que genera mayores esfuerzos sobre el elemento resorte.

Observe que además la fuerza del resorte debe equilibrar a las fuerzas de inercia $m\Omega^2 x$ (por la diferencia de fase entre ellas de aproximadamente 180°).



$$f(t) = F_0 \text{sen}\Omega t$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \text{sen}\Omega t$$

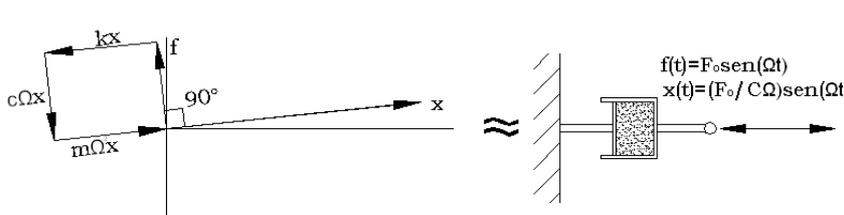
Fig 1.14. Comportamiento resorte del sistema ideal para $\Omega \ll \omega_n$

2. Comportamiento en la zona resonante:

Si $\Omega = \omega_n$, ecuaciones (1-11) y (1-12) se transforman en:

$$X_0 = \frac{F_0}{2k\xi} = \frac{F_0}{c\omega_n}, \text{ y } \phi = 90^\circ$$

Note que en la resonancia, como se ilustra en la figura 1.15, la fuerza $f(t)$ queda sólo equilibrada por la acción del amortiguamiento. Es decir, la respuesta del sistema es la respuesta de la fuerza $f(t)$ actuando solo sobre un amortiguador. Es por esto que cuando no existe amortiguamiento $x(t)$ tiende a infinito.



$$f(t) = F_0 \text{sen}\Omega t$$

$$x(t) = \frac{F_0}{c\Omega} \text{sen}(\Omega t - \phi)$$

Fig 1.15. Comportamiento resonante del sistema ideal para $\Omega \approx \omega_n$

3. Comportamiento másico:

Si $\Omega \gg \omega_n$, ecuaciones (1-11) y (1-12) se transforman en:

$$X_0 \approx \frac{F_0}{m\Omega^2}, \text{ y } \phi \approx 180^\circ$$

$$f(t) = F_0 \text{sen}\Omega t$$

$$x(t) = -\frac{F_0}{m\Omega^2} \text{sen}\Omega t$$

es decir, el sistema responde igual que si sobre una sola masa, m , actuara la fuerza $f(t)$, por lo que se dice que el sistema tiene comportamiento másico.

La acción de la fuerza $f(t)$ queda equilibrada principalmente por la fuerza de inercia, como se ilustra en figura 1.16, lo que hace que la deformación x del resorte sea pequeña, y los esfuerzos sobre él también sean pequeños.

Este es un diseño óptimo donde la mayor parte de la fuerza aplicada, $f(t)$, es equilibrada por la fuerza de inercia $m\Omega^2 x$

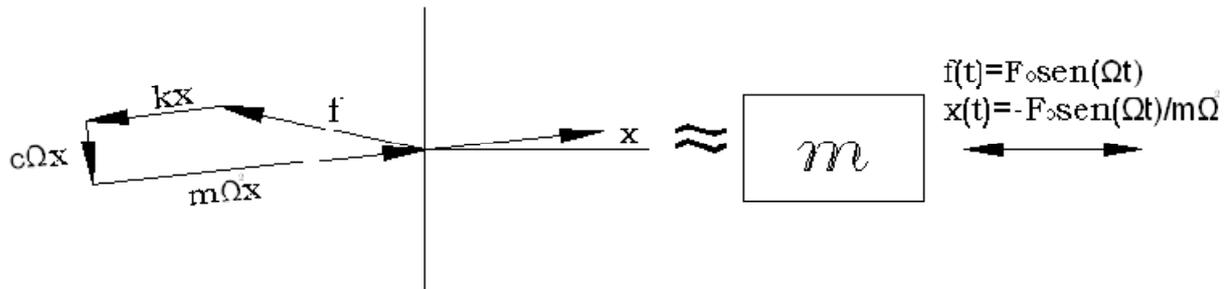


Fig 1.16. Comportamiento másico del sistema ideal para $\Omega \gg \omega_n$

Respuesta dinámica de una máquina rígida sobre una viga elástica con rotor desbalanceado.

El desbalanceamiento de masas es probablemente la causa más común de vibraciones. El desbalanceamiento es básicamente una condición donde el centro de masas del rotor no es coincidente con su eje de rotación.

Algunas razones para esta distribución de masas no uniforme respecto al eje de rotación puede ser:

- Desgaste no simétrico del material. Ej. turbinas.
- Dilataciones no simétricas (máquinas térmicamente sensibles). Ej. Generadores
- Deformaciones no simétricas cuando giran a su velocidad de operación. Por ej. Ventiladores.
- Montaje excéntrico de elementos. Ej. rodamientos, rotores, etc.
- Porosidad en la fundición del impulsor
- Densidad del material no uniforme
- Tolerancias de fabricación
- Adherencia de material durante la operación (polvo o partículas en alabes de ventiladores), o pérdida de material.
- Masa de los pernos de un acoplamiento que no tienen todos igual masa
- Chaveteros

Se define:

CANTIDAD DE DESBALANCEAMIENTO O SIMPLEMENTE DESBALANCEAMIENTO, U , como la medida cuantitativa del desbalanceamiento en un rotor, sin referirse a su ubicación angular:

$$U = m \cdot r$$

U = cantidad de desbalanceamiento o simplemente desbalanceamiento

m = masa desbalanceada

r = distancia de la masa desbalanceada al eje de rotación.

Si la masa desbalanceada en el rotor es, por ejemplo, 20 gr y está ubicada a 150 mm del eje de rotación, el desbalanceamiento U del rotor es: $U = 20 \text{ (gr)} \times 150 \text{ (mm)} = 3.000 \text{ (gr-mm)}$.

Valores admisibles para el desbalanceamiento residual de rotores

Como es imposible que un rotor quede perfectamente balanceado, o no se puede impedir que él aumente su desbalanceamiento después de un tiempo de operación, es necesario establecer los mayores valores admisibles para el desbalanceamiento residual de un rotor.

El problema del desbalanceamiento, es que se generan fuerzas centrífugas (fuerzas de inercia), las cuales sobrecargan todos los elementos de la máquina disminuyéndole su vida de operación.

EJEMPLO.

Determine el valor de la fuerza centrífuga que se genera en un rotor de masa 100 Kg que tiene un desbalanceamiento de 4.000(gr mm):

1. cuando el rotor gira a 1.000 cpm
2. cuando el rotor gira a 3.000 cpm

$$\text{La fuerza centrífuga } F_c = m r \omega^2 = U \omega^2$$
$$U = 4.000(\text{gr mm}) = 0.04 (\text{Kg m})$$

- i. Para $\omega = 1.000 \text{ cpm} = 1.000 \times 2 \times \pi / 60 = 104.7 \text{ rad/s}$
 $F_c = U \omega^2 = 0.04(\text{kg m}) \times 104.72 (\text{ rad/s})^2 = 438 (\text{Kg m/s}^2) = 438(\text{N})$
- ii. Para $\omega = 3.000 \text{ cpm} = 3.000 \times 2 \times \pi / 60 = 314 \text{ rad/s}$
 $F_c = U \omega^2 = 0.04(\text{kg m}) \times 3142 (\text{ rad/s})^2 = 3.948 (\text{N})$

NOTAS:

1. Observe que cuando la velocidad de rotación aumenta en 3 veces, la fuerza centrífuga sobre el rotor aumenta en 9 veces.
2. Si se quiere limitar la fuerza centrífuga actuando sobre el rotor, se debe limitar el valor del desbalanceamiento del rotor. Entre mayor es la velocidad de rotación del rotor menor es la cantidad de desbalanceamiento permitido.

El valor del desbalanceamiento admisible para un rotor debería especificarlo el diseñador de la máquina, de acuerdo a la vida nominal que espera para ella.. Si no se dispone de ello, se puede usar los valores dados por ISO 1940-1 (1986) : Mechanical vibration – Balance quality requirements of rigid rotors – Part 1 : Determination of permissible residual unbalance. (Requerimientos de la calidad del balanceamiento de rotores rígidos - Parte 1 – Determinación del desbalanceamiento residual permitido).

Rotor de Jeffcott.

El modelo más simple para estudiar la dinámica de un rotor, es el rotor de Jeffcott, ver figura 1.a, el cual consiste en:

- Disco rígido montado en el medio del eje
- Eje flexible del rotor de masa despreciable
- Soportes rígidos

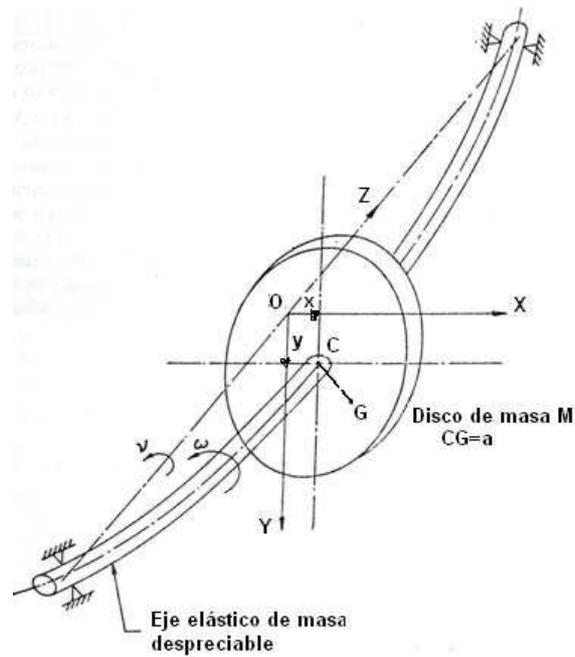


Fig 1a. Rotor de Jeffcott

Ecuaciones del movimiento

Por la simetría del sistema respecto al plano XY, se puede considerar un problema de dinámica en el plano. Las ecuaciones para el centro de masas del sistema son de acuerdo a figuras:

$$M \frac{d^2}{dt^2} (x + a \sin \omega t) = -K \cdot x$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} (y + a \cos \omega t) = -K \cdot y$$

$$M\ddot{x} + K \cdot x = M\omega^2 a \sin \omega t$$

$$M\ddot{y} + K \cdot y = M\omega^2 a \cos \omega t$$

Observe que las ecuaciones (1a) y (1b) se pueden obtener de forma directa utilizando el principio de D`Alambert, agregando la fuerza centrífuga (fuerza de inercia).

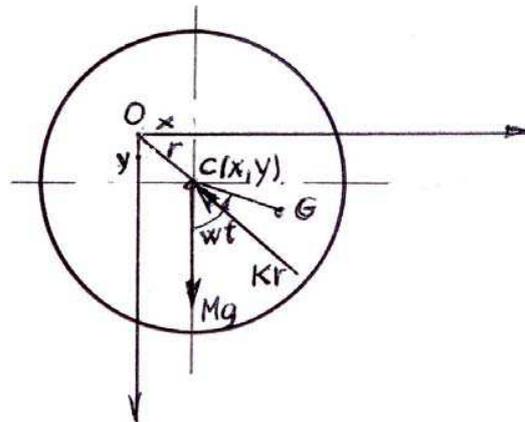


Fig 1b. Diagrama de cuerpo libre del disco

NOTA:

- Observe que en las ecuaciones del movimiento no se ha considerado la fuerza peso = Mg , esto se debe a que la coordenada "y" se mide desde la posición de equilibrio.
- La solución de estas ecuaciones permite determinar el desplazamiento vibratorio máximo.
- Para determinar el esfuerzo de flexión máximo se debe determinar la deflexión mayor del eje. Para eso se usa el principio de superposición (válido porque el sistema tiene comportamiento lineal ¿por qué?):

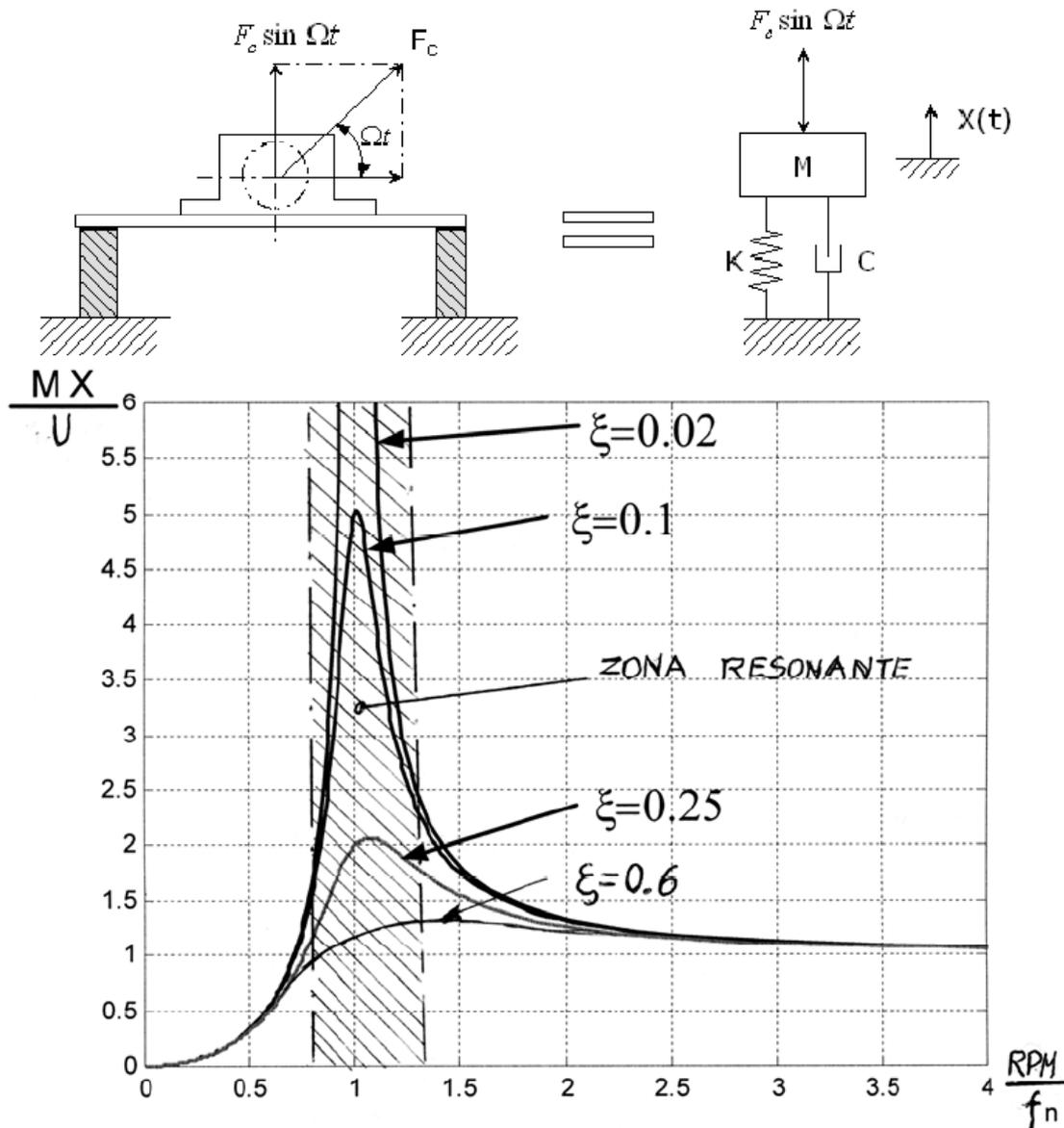
$$\text{DEFORMACION MAXIMA} = \text{DEFORMACION ESTATICA} + Y_0 \text{ (desplazamiento vibratorio peak)}$$

Gráficos adimensionales

La tendencia actual, es utilizar gráficos adimensionales como el indicado en figura 1.17. El cual es un gráfico adimensional del desplazamiento vibratorio vertical de una máquina rígida desbalanceada montada en una base flexible como se indica en la figura.

NOTA:

- Al comparar el gráfico de la figura 1.17 con el gráfico de la figura 1.12 se observa que son diferentes. Esto es debido a que el gráfico de figura 1.17 se refiere al caso en que el módulo de la fuerza no es constante es proporcional a w^2 . Por eso para $w=0$, el desplazamiento vibratorio es cero. El gráfico de la figura 1.12 en cambio es la respuesta del sistema ideal a una fuerza de amplitud F_0 constante.



donde:

M = Masa que vibra = Masa de la máquina +1/2 masa de la base

X = Valor pico del desplazamiento vibratorio de la máquina

U = Desbalanceamiento del rotor= masa desbalanceada x distancia al eje de rotación

RPM = Velocidad de rotación del rotor

f_n = Frecuencia natural del sistema base /máquina

ξ = Factor de amortiguamiento

Fig 1.17. Gráfico adimensional del desplazamiento vibratorio de una máquina rígida montado en una base flexible para diferentes velocidades de rotación

1.3.4.- La función de transferencia y la función respuesta (en frecuencias)

La **función de transferencia** de un sistema lineal se define como la relación de la transformada de Laplace de la variable de entrada, suponiendo que todas las condiciones iniciales se hacen igual a cero.

Para el sistema ideal de 1 grado de libertad:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$$m(s^2X(s) - sx(0^+) - \dot{x}(0)) + c(sX(s) - x(0^+)) + kX(s) = f(s) ; x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1/m}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

La **función respuesta (en frecuencias) (FRF, Frequency Response Function)**, se define como la respuesta del sistema en el estado estacionario a una excitación de entrada armónica.

Se representa por un complejo:

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_H}$$

donde:

- **su módulo**, $H(f) = S_0(f)/E_0(f)$, es la razón de amplitudes entre la salida y la entrada a una excitación armónica.
- **su fase**: $\phi_H = \phi_S - \phi_E$, es el ángulo de desfase entre la salida y entrada.

NOTA: Para el caso el caso particular donde: $\phi_E = 0$ y $\phi_S = -\phi$, entonces: $\phi_H = -\phi$

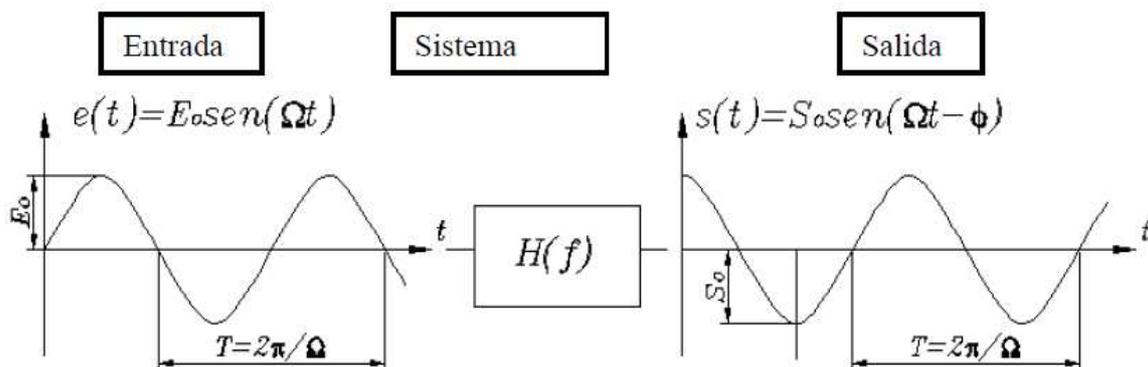


Fig 1.18. Sistema lineal representado por su función respuesta $H(f)$

Formas alternativas de la función respuesta

Diferentes funciones respuesta, y con diferentes nombres, son utilizadas en el análisis dinámico de sistemas, dependiendo de si se usa como variable de salida el desplazamiento, velocidad o aceleración para definir su movimiento.

Función Respuesta	Compliance dinámica Receptancia = X/F Flexibilidad dinámica	Movilidad = V/F	Acelerancia = A/F
Función Respuesta inversa	Rigidez dinámica = F/X	Impedancia = F/V	Masa efectiva = F/A

Las transformadas de Fourier y Laplace están estrechamente relacionadas, especialmente cuando la función $f(t)$ se define solo para $t=0$, como frecuentemente es el caso:

Función de transferencia:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{con } s = \sigma + j\omega$$

Función respuesta:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

La función de transferencia permite investigar la ubicación en el plano complejo “s” de los polos y ceros, analizar la respuesta transiente y por lo tanto su estabilidad.

La función respuesta en frecuencia solo permite el análisis en el estado estacionario, pero la gran ventaja es la facilidad para determinarla experimentalmente.

Existen diferentes formas gráficas de representar las funciones respuestas. Las más utilizadas se muestran en Figura 1.19:

1. Diagrama de Bodé: Módulo y fase v/s la frecuencia.
2. Diagrama de Nyquist o polar: Parte real v/s parte imaginaria.
3. Parte real e imaginaria v/s la frecuencia

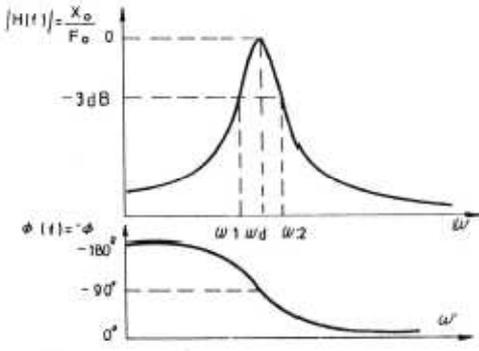
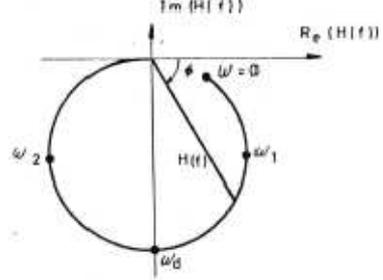
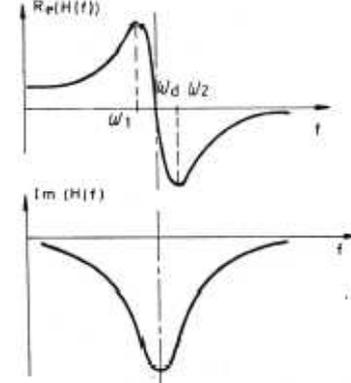
 <p>$H(f) = \frac{X_o}{F_o}$</p> <p>$\phi(f) = -\phi$</p> <p>$\omega_1 \omega_d \omega_2$</p>	<p>Diagrama de Bodé Gráfico del módulo y de la fase de la función respuesta en función de la frecuencia ω. De este gráfico se determina:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Relación entre vibración y fuerza • Frecuencias naturales o de resonancia • Frecuencias de anti-resonancia • Desfase entre el desplazamiento y la fuerza • Valor del factor de amortiguamiento, ξ $\xi = 1/(2Q)$ $Q = \omega_d/(\omega_2 - \omega_1)$ <p>Q : Factor de amplificación ω_2 y ω_1: frecuencia de los puntos a media potencia. (-3dB = 0.707)</p>
 <p>$\text{Im}(H(f))$</p> <p>$\text{Re}(H(f))$</p> <p>ω_2 ω_d ω_1</p> <p>$H(f)$</p> <p>$\omega = 0$</p>	<p>Diagrama de Nyquist o polar Gráfico de la parte real versus la parte imaginaria de la función respuesta para diferentes frecuencias ω.</p> <p>Parte real: $H(f) \cos \phi(f)$ Parte imaginaria: $H(f) \sin \phi(f)$</p>
 <p>$\text{Re}(H(f))$</p> <p>$\text{Im}(H(f))$</p> <p>ω_1 ω_d ω_2</p>	<p>Diagrama parte real y parte imaginaria Gráfico de la parte real y de la parte imaginaria de la función respuesta para diferentes frecuencias f.</p>

Fig 1.19. Diferentes formas de representar gráficamente las funciones respuesta

Determinación experimental de la función respuesta

Figura 1.19a muestra esquemáticamente las formas utilizadas para determinar en forma experimental las funciones respuestas. Las dos formas usuales para generar una fuerza sobre el sistema a analizar es:

- con un impacto a través de un martillo
- con un excitador electrodinámico

Midiendo simultáneamente la fuerza y la vibración generada con un sensor de vibraciones, estos valores se introducen a un analizador de vibraciones de dos canales el cual hace la relación entre ellos para todas las frecuencias.

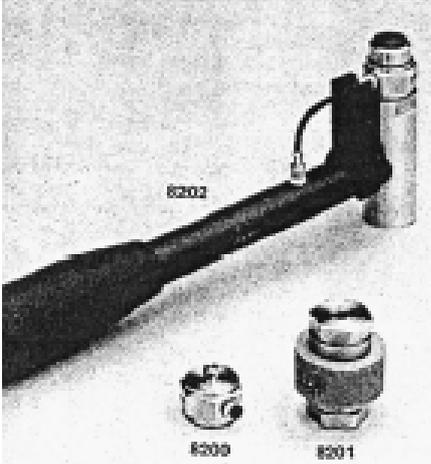
	
<p>Utilizando un martillo de impacto que tiene en su punta un sensor de medición de fuerza se ejerce sobre el cuerpo una fuerza de impacto la cual es medida por el sensor de fuerza</p>	<p>Martillo de impacto y sensores de fuerza</p>
	<p>La otra forma utilizada para generar la fuerza es utilizando un "shaker" (excitador electrodinámico), el cual tiene en su punta un sensor de medición de fuerza.</p>

Fig 1.19a. Formas de determinar la función respuesta

1.4.- Amortiguamiento = disipación de energía

¿Por qué se usa amortiguamiento viscoso en los modelos matemáticos cuando en la práctica es raro encontrarlo?

- Facilita el análisis matemático.
- Difícil de estimar el valor del amortiguamiento real.
- El amortiguamiento tiene poco efecto en la respuesta forzada cuando se está alejado de resonancias o antiresonancias, como se ilustra en figura 1.20

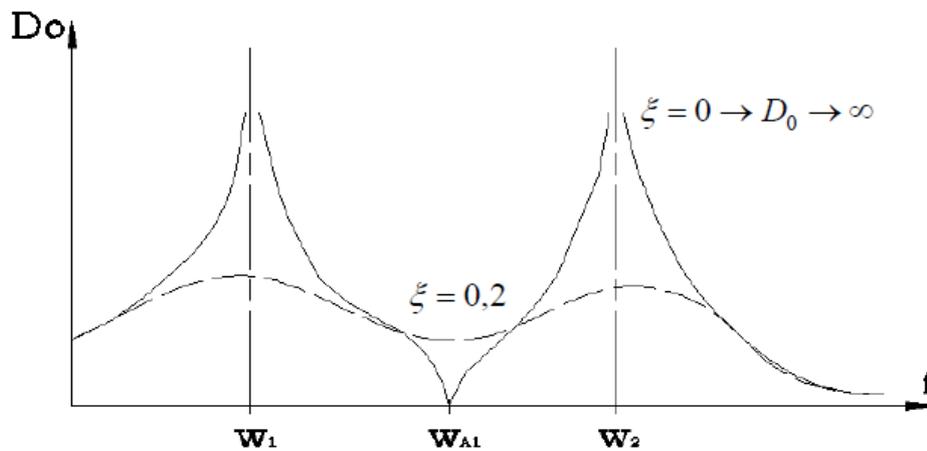
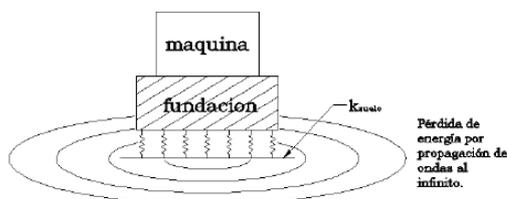


Fig 1.20. Gráfico del desplazamiento vibratorio de un sistema de 2 grados de libertad.

1.4.1. Mecanismos de disipación de energía

- Amortiguamiento viscoso
- Rozamientos como el que ocurre al deslizar un elemento sobre otro (Coulomb).
- Fricción interna en el material o amortiguamiento estructural o histérico.
- Resistencia de un cuerpo a moverse dentro de un fluido (aire por ejemplo).
- Por radiación: por propagación de ondas en un medio infinito.(ejemplos: boyas en el agua, fundaciones de máquinas y estructuras)



Pérdida de energía por propagación de ondas al ∞ (amortiguamiento geométrico).

Fig 1.21. Disipación de energía por radiación en una fundación de máquina

Figura 1.22 muestra algunos de los mecanismos de disipación de energía que frecuentemente se encuentra en la práctica.

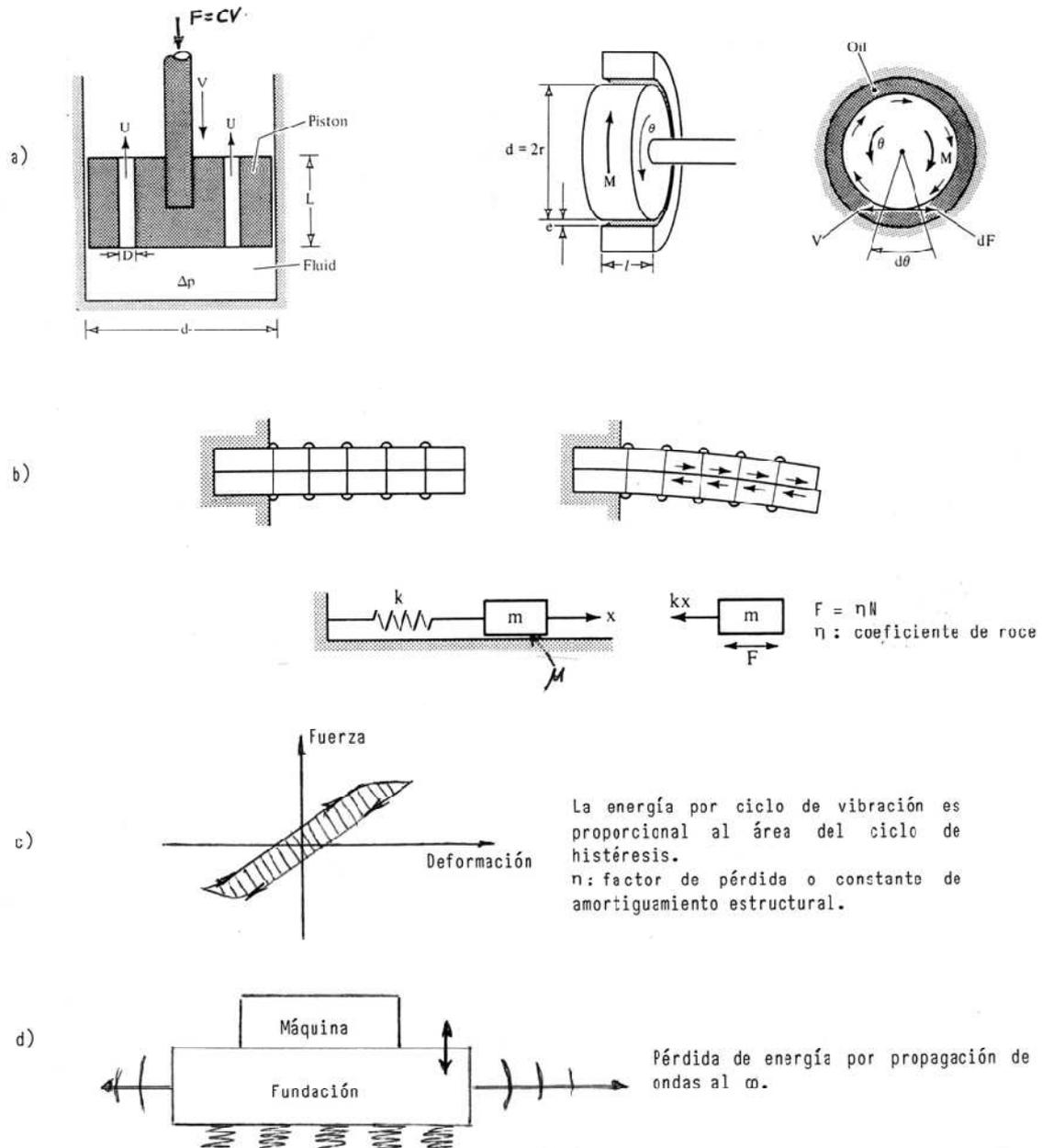


Figura 1. 22. Ejemplos de mecanismos de disipación de energía

- a) Amortiguador viscoso.
- b) Rozamientos como el que ocurre al deslizar un elemento sobre otro (Coulomb).
- c) Fricción interna en el material o amortiguamiento estructural o histérico.
- d) Por radiación: por propagación de ondas en un medio infinito.

1.4.2. Amortiguador viscoso equivalente a utilizar en el modelo ideal

La energía disipada por ciclo por un amortiguador viscoso de coeficiente c es U_d :

$$U_d = \int F_d dx = \int_0^{2\pi/\Omega} c \dot{x} \frac{dx}{dt} dt = \int c \dot{x}^2 dx$$

$$U_d = c \int_0^{2\pi/\Omega} \Omega^2 X^2 \cos^2 \Omega t dt = \pi c \Omega X^2$$

Independiente del mecanismo real de disipación de energía existente en el sistema, este se reemplaza por un amortiguador viscoso equivalente cuyo valor se determina igualando las energías disipadas por ciclo en cada caso. Es decir, para determinar C_{eq} se iguala:

$$U_d = \pi c_{eq} \Omega X^2$$

Energía real disipada por ciclo = Energía disipada por amortiguamiento viscoso

Ejemplo

Determine el coeficiente del amortiguador viscoso equivalente para el caso de disipación de energía por roce de Coulomb indicado en la figura 1.23.

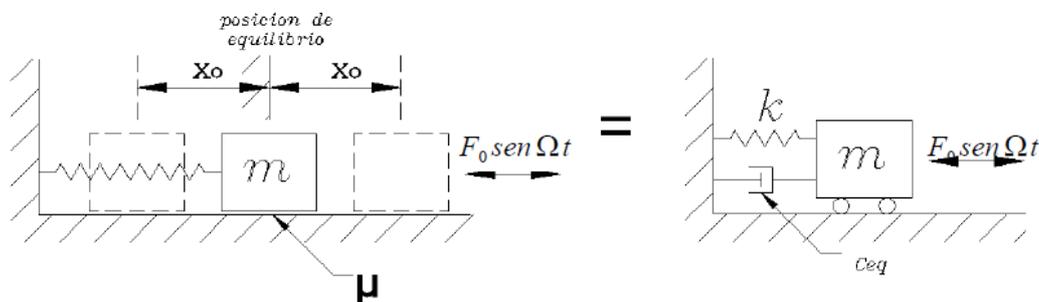


Fig 1.23. Amortiguador viscoso equivalente con mecanismo de disipación de energía real por rozamiento.

Del gráfico indicado en figura 1.24 se determina que la energía disipada por ciclo debido al roce es $4\mu mgX_0$. Utilizando ecuación 1-12 se obtiene:

$$U_d = 4\mu mgX_0 = \pi C_{eq} \Omega X_0^2 \rightarrow C_{eq} = \frac{4\mu mg}{\pi \Omega X_0}$$

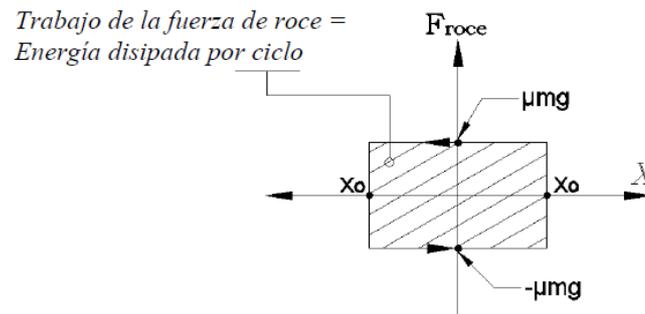
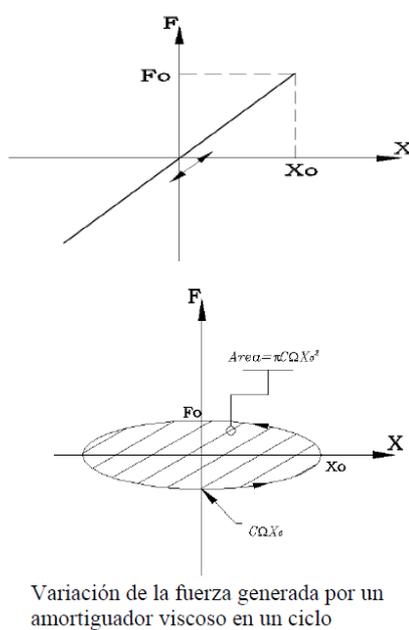


Fig 1.24. Energía disipada por rozamiento en un ciclo de oscilación

1.4.2. Energía disipada por ciclo en un material viscoelástico (resorte ideal + amortiguador viscoso)

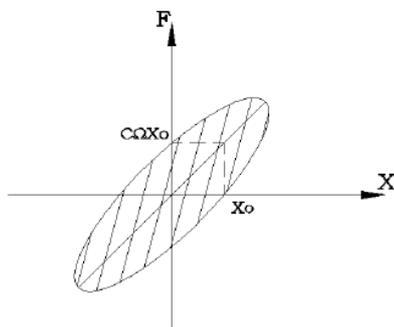


$F = k x$
 Resorte ideal (sin disipación de energía en un ciclo de oscilación)

$$\begin{aligned}
 x(t) &= X_0 \text{sen}(\Omega t - \phi) \\
 \dot{x}(t) &= X_0 \Omega \text{cos}(\Omega t - \phi) \\
 &= \pm X_0 \Omega \sqrt{1 - \text{sen}^2(\Omega t - \phi)} \\
 &= \pm \Omega \sqrt{X_0^2 - x^2} \\
 Fd &= \pm c \Omega \sqrt{X_0^2 - x^2} \\
 \Rightarrow \left(\frac{Fd}{c \Omega X_0} \right)^2 + \left(\frac{x}{X_0} \right)^2 &= 1
 \end{aligned}$$

Fig 1.25. Variación de las fuerzas en un resorte y un amortiguador viscoso durante un ciclo de oscilación

Las fuerzas generadas en conjunto por el resorte y el amortiguador se pueden combinar en un solo elemento, como se indica a continuación, a través de una rigidez compleja k^*



$$F = kx + c\dot{x} = (k + jc\Omega)Xe^{j\Omega t}$$

$$F = k^* Xe^{j\Omega t}$$

$$k^* = k + jc\Omega = \text{rigidez compleja}$$

$$k^* = k \left(1 + jc\Omega/k \right)$$

ecuación(1a)

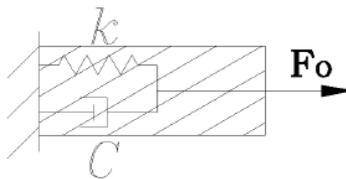
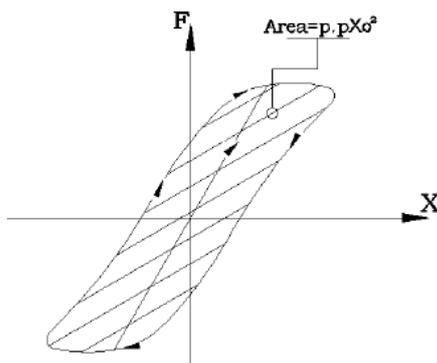


Fig 1.26. Fuerza en un material elasto - viscoso

1.4.4. Amortiguamiento histérico, sólido o estructural

Al realizar un ciclo de tracción –compresión- tracción en un material se obtiene lo indicado en la figura 1.27. Estos ensayos muestran los ciclos de histéresis mostrados en la figura. Note que la trayectoria de carga es diferente a la de descarga. Esto es atribuible a la fricción interna entre varios planos del material. El área encerrada por el ciclo de histéresis es igual a la energía perdida por ciclo. Experimentalmente se encuentra que esta área es independiente de la frecuencia y proporcional a la amplitud de la vibración y a la rigidez del cuerpo. Es decir:

$$U_d = \pi k \eta X_0^2$$



Similar al caso anterior,(ecuación (1a)), la fuerza elasto-disipativa se puede expresar por una rigidez compleja:

$$k^* = k(1 + j\eta)$$

η = factor de pérdida constante de amortiguamiento histérico

Fig 1.27. Energía interna disipada por un material durante un ciclo de oscilación

Introduciendo ecuación (1-b) en ecuación 1-13 se obtiene que:

$$\pi C_{eq} \Omega X_0^2 = \pi k \eta X_0^2$$

Y por lo tanto,

$$C_{eq} = k\eta / \Omega$$

Aunque el factor de pérdida de un material depende de su composición, temperatura, esfuerzo, tipo de carga usado; un valor aproximado de η se puede obtener de tablas como la indicada en tabla N°2 (ver manuales de Ingeniería):

Material	η
Aluminio puro	$2 \times 10^{-5} - 2 \times 10^{-3}$
Acero	0,001 – 0,008
Plomo	0,008 – 0,014
Fundición de hierro	0,003 – 0,03
Goma natural	0,1 – 0,3
Goma dura	$\approx 1,0$
Vidrio	0,0006 – 0,002
Concreto	0,01 – 0,06

Tabla N°2 . Factores de pérdida de algunos materiales

En tabla N°3. se presenta una comparación entre el comportamiento dinámico del modelo ideal con amortiguamiento viscoso v/s el modelo ideal con amortiguamiento estructural.

Figura 1.28 grafica como varía la amplitud de las vibraciones estacionarias y el desfase entre desplazamiento y fuerza con la frecuencia de la fuerza excitadora para el caso con amortiguamiento viscoso y amortiguamiento estructural.

De figuras 1.28 se observa que el comportamiento vibratorio del sistema con amortiguamiento estructural para factores de pérdida $\eta < 0,2$ (como es en la mayoría de los casos prácticos), es similar al comportamiento del sistema con amortiguamiento viscoso con factor de amortiguamiento:

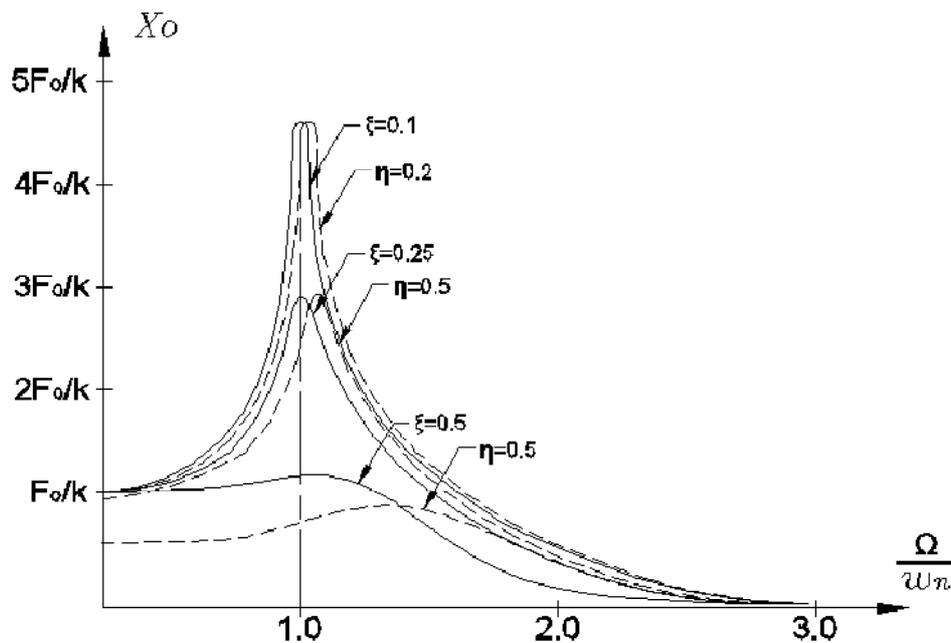
$$\xi = \eta/2$$

$$C_{eq} = k\eta / \Omega$$

Por esta razón para valores $\eta < 0,2$ se utilizará el sistema viscoso equivalente. Para mayores valores de η será necesario utilizar el modelo de amortiguamiento real.

	Amortiguamiento viscoso	Amortiguamiento estructural
Ecuaciones del movimiento	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \text{sen}\Omega t$	$m\ddot{x} + k(1 + \eta j)x = F_0 \text{sen}\Omega t$
Solución estacionaria	$x(t) = X_0 \sin(\Omega t - \phi)$ $X_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right]^2}}$	$x(t) = X_0 \sin(\Omega t - \phi)$ $X_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \eta^2}}$

Energía disipada por ciclo	$U_d = \pi c \Omega X_0^2$	$U_d = \pi k \eta X_0^2$ $\rightarrow C_{eq} = \frac{k \eta}{\Omega}$
Frecuencia natural	Decrece al aumentar c	Independiente del valor de η
Desplazamiento estático	$X_{st} = F_0/k$	$X_{st} = \frac{F_0}{k \sqrt{1 + \eta^2}}$
Amplitud resonante	$X_{0max} = \frac{F_0/k}{2\xi \sqrt{1 + \xi^2}}$ Para $\Omega = \frac{\omega_n \sqrt{1 + \xi^2}}{-\eta}$	$X_{0max} = F_0/k \eta$ (independiente de la masa) Para $\Omega = \omega_n$
Desfase $\phi_X - \phi_F = \phi$	$\tan \phi = \frac{-\eta}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$	$\tan \phi = \frac{-2\xi \Omega / \omega_n}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$
Tabla N°3. Comparación del comportamiento dinámico del modelo ideal con amortiguamiento viscoso v/s estructural		



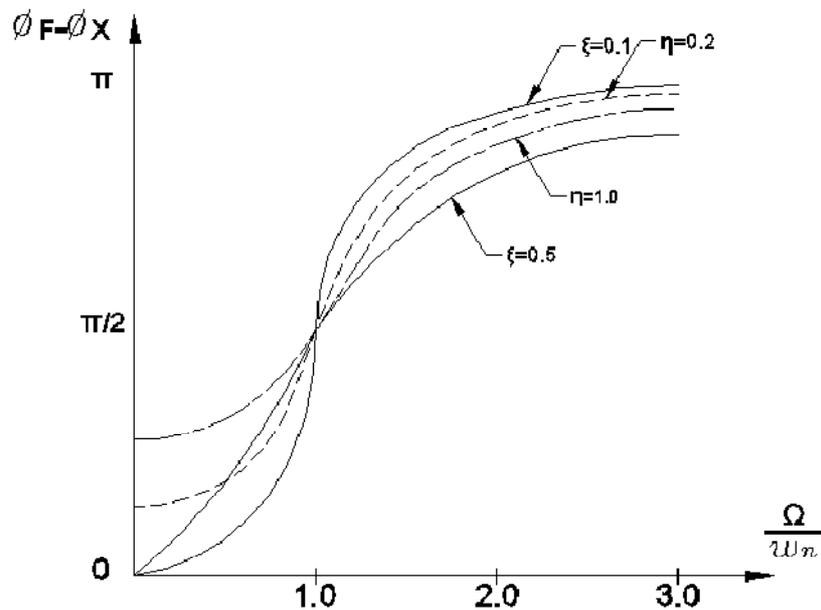


Fig 1.28. Amplitud de las vibraciones estacionarias y el desfase entre desplazamiento y fuerza con la frecuencia de la fuerza excitadora en el modelo ideal con amortiguamiento viscoso y amortiguamiento estructural.

1.5.- Ejemplo de sistemas que pueden modelarse como el sistema ideal de un grado de libertad

1.5.1- Conjunto de cuerpos rígidos donde las deformaciones del sistema se generan en algunos elementos resortes de masa despreciable

Ejemplo: Determinar la amplitud de las vibraciones estacionarias del punto A de la placa de la figura bajo la acción de la fuerza indicada. Se supone que la placa se comporta como rígida respecto al resorte.

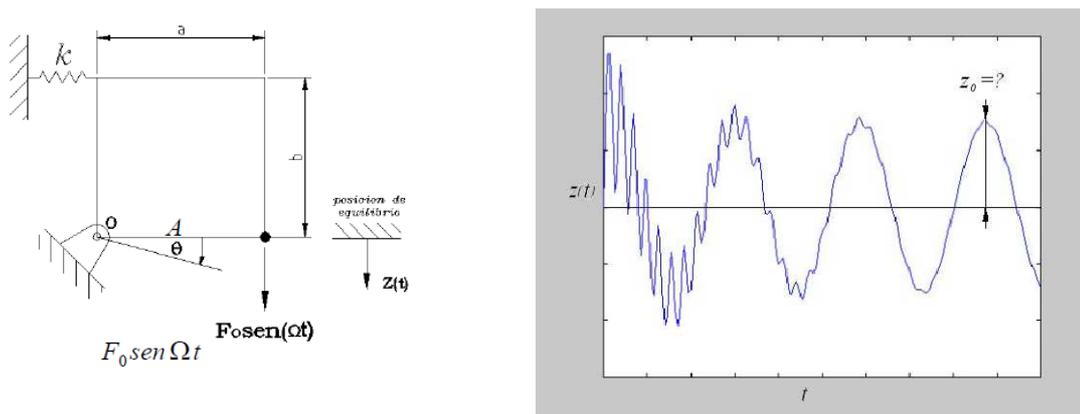


Figura 1.29. Placa rígida con soporte elástico. Sistema de un grado de libertad.

$z(t)$ se mide a partir de su posición de equilibrio (no se considera por lo tanto para las ecuaciones de equilibrio el efecto del peso).

$$\begin{aligned} \sum M_0 &= I_0 \ddot{\theta} \\ -kb\theta \cdot b + F_0 \sin \Omega t \cdot a &= I_0 \ddot{\theta} \\ z(t) &= a \cdot \theta \\ -\frac{kb^2}{a} z + F_0 \sin \Omega t \cdot a &= b \cdot \gamma \cdot \frac{a^2 + b^2}{3} \cdot \ddot{z} \\ b \cdot \gamma \cdot \frac{a^2 + b^2}{3} \cdot \ddot{z} + \frac{kb^2}{a} z &= F_0 \cdot a \cdot \sin \Omega t \\ m^* \ddot{z} + k^* z &= F_0^* \sin \Omega t \\ \text{Con: } m^* &= b \cdot \gamma \cdot \frac{a^2 + b^2}{3} \text{ masa generalizada} \\ k^* &= \frac{kb^2}{a} : \text{rigidez} \\ F_0^* &= F_0 \cdot a : \text{fuerza} \end{aligned}$$

De la ecuación (1-11), con $\xi=0$:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2}} = \frac{F_0^*/k^*}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{F_0 \cdot a / \frac{kb^2}{a}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{\frac{kb^2}{a}}{b \cdot \gamma \cdot \frac{a^2 + b^2}{3}}} \end{aligned}$$

Ejemplo.

La Figura 1.18 representa una máquina rígida montada en el centro de una base metálica compuesta por dos vigas I de acero. Rígida significa que todos los puntos de la máquina se mueven de la misma manera. Determinar el valor pico del desplazamiento vibratorio vertical en ella debido a su desbalanceamiento residual. La masa de la máquina es 40 Kg (masa del rotor = 20 Kg), la masa de cada viga es 10 Kg, el momento de inercia I de cada viga es $0.5 \times 10^{-7} \text{ m}^4$, el largo de las vigas es 1 m y el desbalanceamiento residual del rotor es de calidad G 6.3. y para determinar el amortiguamiento se realizó un ensayo de vibraciones libres.

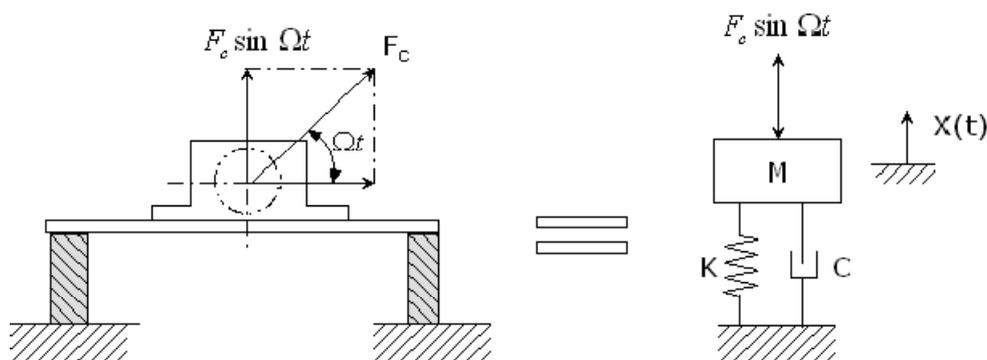


Figura 1.30. Modelo básico para analizar las vibraciones verticales en la máquina de la figura.

1. Para resolver el problema hay que construir un modelo físico lo más simple posible, pero que represente adecuadamente el problema a analizar. Para este caso el modelo a utilizar es el sistema de un grado de libertad indicado en la parte derecha de la figura.
2. El modelo está constituido por las siguientes magnitudes de las cuales depende su comportamiento dinámico:
 - La inercia o la masa M del conjunto que participa en la vibración. En este caso corresponde a la masa de la máquina +1/2 de la masa de la viga.(debido a que la única masa de la viga que se mueve en conjunto con la máquina es la parte que está debajo de ella, las partes de la viga a medida que se acercan al apoyo vibran menos y las partes que está en los apoyos no vibran).
 - La elasticidad del sistema. En este caso es la viga la que es elástica., la viga se comporta igual que un resorte de rigidez k .
 - Fuerza de excitación que genera la vibración. En este caso la componente vertical de la fuerza centrífuga. En dirección horizontal la viga es mucho más rígida que en el sentido vertical, por lo que se ha despreciado dicho movimiento.
3. La rigidez de cada viga será determinada de las ecuaciones de la resistencia de materiales indicadas en tabla N° 4, para una viga empotrada en sus extremos

$$\begin{aligned}E \text{ acero} &= 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\I &= 2 \times 0.5 \times 10^{-7} \text{ m}^4 \text{ (momento de inercia de las 2 vigas)} \\L &= 1 \text{ m} \\k &= 192 E I / L^3 = 192 \times 2.1 \times 10^{11} \times 10^{-7} / L^3 \\k &= 40.32 \times 10^5 \text{ N/m}\end{aligned}$$

4. La masa del sistema máquina viga que participa en el movimiento es:

$$\begin{aligned}M &= \text{masa máquina} + \frac{1}{2} \text{ masa de las vigas} \\M &= 40+10 = 50 \text{ Kg}\end{aligned}$$

5. La frecuencia natural del sistema máquina /base es:

$$\begin{aligned}f_n &= (k/M)^{0.5} / 2 \pi = (40.32 \times 10^5 / 50)^{0.5} / 2 \pi \\f_n &= 45.2 \text{ Hz} = 2 \text{ 712 cpm}\end{aligned}$$

6. La fuerza excitadora debido al desbalanceamiento residual es la fuerza centrífuga dada por:

$$F_0 = U \times w^2$$

donde:

U = desbalanceamiento

w = velocidad de rotación en rad/seg = $1480 \times 2 \pi / 60 = 155$ rad/seg

Para una calidad de balanceamiento G 6.3 (ISO 1940) el desbalanceamiento permitido para el rotor es:

$$U = G \times M$$

$$U = 6.3 \text{ mm/seg} \times 20.000 \text{ gr} / 155 \text{ rad/seg}$$

$$U = 813 \text{ grxmm}$$

$$F_0 = 8.13 \times 10^{-4} (155)^2 = 19.53 \text{ (N)}$$

7. El amortiguamiento del sistema se obtiene a través de un ensayo de impacto. La figura 1.31 muestra las vibraciones verticales libres medidas en las vigas después de un impacto de martillo. De esta figura se determina el decremento logarítmico, δ

$$\delta = 1/n \ln (X_n/X_{n+1}) = 1/5 \ln(1.79/ 0.2) = 0.438$$

entonces, el factor de amortiguamiento, ξ , es:

$$\xi = \delta / 2 \pi = 0.438 / 2 \pi = 0.07$$

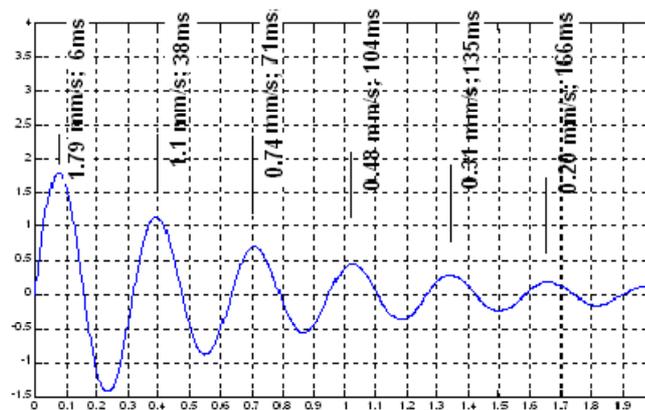


Figura 1.31 .Vibraciones medidas en un ensayo de impacto.

8. El desplazamiento vibratorio, X_0 , puede ser determinado de ecuación 1-11:

$$X_0 = (19.53/40.32 \times 10^5) / ((1-0.55^2)^2 + (2 \times 0.07 \times 0.55)^2)^{0.5}$$

$$X_0 = 6.9 \mu\text{m}$$

donde:

$$\Omega/w_n = (1480 / 2712) = 0.55$$

9. Otra forma más rápida de determinar el desplazamiento vibratorio es del gráfico adimensional de la Figura 1.17. En esta figura, se entra a la curva de $\xi = 0.095$ (por aproximación se usa la de $\xi = 0.01$), con el valor de $\Omega/w_n = 0.55$, obteniéndose:

$$M X / m_0 e = 0.43$$

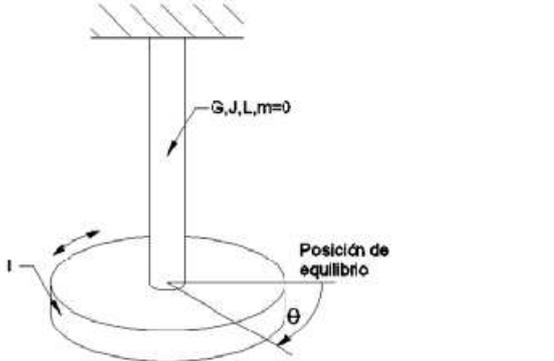
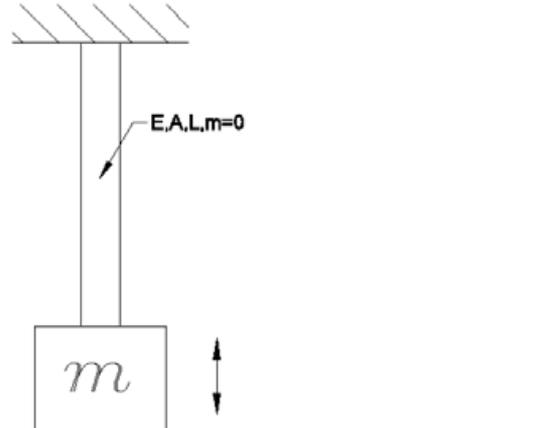
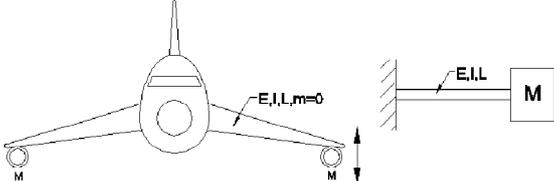
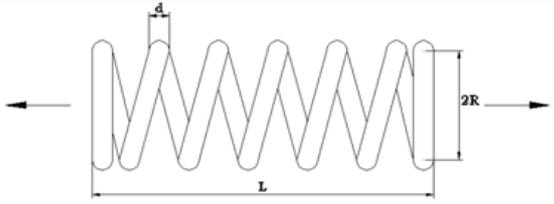
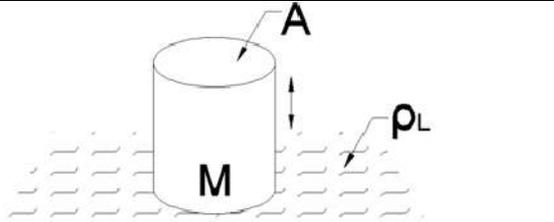
Como:

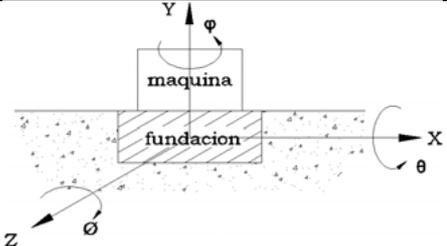
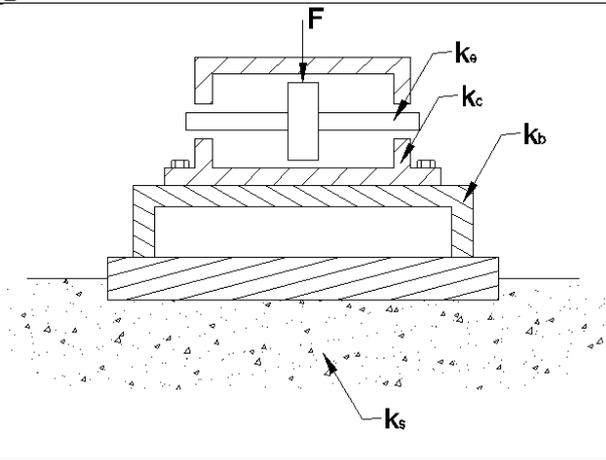
$$M = 50 \text{ kg}$$

$$U = m_0 e = 8.13 \times 10^{-4} \text{ Kg m}$$

se obtiene:

$$X = 6.9 \mu\text{m}$$

	$k = \frac{GJ}{l} \quad \omega_n^2 = \frac{GJ}{I}$ <p>k= rigidez a la torsión barra circular. J= momento polar de la sección transversal de la barra.</p>
	$k = \frac{EA}{l} \quad \omega_n^2 = \frac{EA}{lM}$ <p>k= rigidez al desplazamiento longitudinal de la barra.</p>
	$k = \frac{3EI}{l^3} \quad \omega_n^2 = \frac{3EI}{ml^3}$ <p>k= rigidez a la flexión de la barra en su extremo.</p>
	$k = \frac{Gd^4}{64n_e R^3} \quad k_t = \frac{Ed^4}{c_l 30n_e R(0,408l^2 + 0,5)}$ <p>n_e= número de espiras efectivas. k= rigidez al movimiento axial. c_l= constante $f(l,R)$</p>
	$k = \frac{\text{Empuje por } \Delta l}{\Delta l} = A\rho_L g \quad \omega_n^2 = \frac{A\rho_L g}{M}$ <p>k= rigidez al movimiento vertical de un cilindro en un líquido de densidad ρ_L.</p>

	<p>$k_x, k_y, k_z, k_\theta, k_\phi, k_\varphi =$ rigidez del suelo a los movimientos en las direcciones $x, y, z, \theta, \phi, \varphi$ son $f(G, u, \text{geometría})$</p>
	$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_e} + \frac{1}{k_c} + \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_s}$ <p>k_{eq} = rigidez del rotor al movimiento transversal. k_e = rigidez del eje k_c = rigidez carcasa. k_b = rigidez base. k_s = rigidez del suelo</p> $\omega_n^2 = k_{eq} / M$ <p>M = masa del rotor (el resto de las masas de los otros elementos despreciables)</p>
<p>Tabla N°4. Rigideces de sistemas que pueden ser modelados como el sistema ideal.</p>	

1.5.2- Sistemas con masa y elasticidad repartidas a lo largo del cuerpo, donde se puede suponer una forma de deformación al vibrar.

Para establecer un modelo de un grado de libertad de un sistema continuo elástico con características de masa y elasticidad repartidas a lo largo de él (teóricamente tiene ∞ grados de libertad), es necesario suponer una forma o modo de vibrar del cuerpo.

La forma supuesta debe ser una función admisible (función que satisface las condiciones geométricas de borde y posee derivadas de un orden al menos igual a las que aparecen en la expresión de la energía de deformación).

Ejemplos de formas admisibles para la máxima deformación (amplitud) que puede tener una viga simplemente apoyada al vibrar: forma sinusoidal y forma parabólica

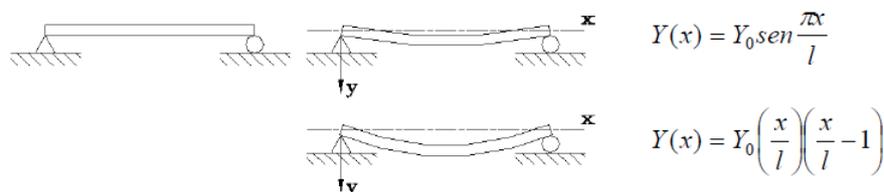
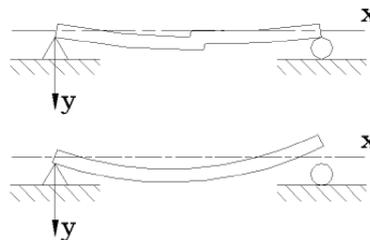


Fig 1.32. Formas de vibrar admisibles

Ejemplos de formas de vibrar no admisibles



Para el primer caso no es admisible pues no es continua (no tiene derivada)

Para el segundo caso no es admisible porque no cumple con las condiciones de borde

Fig 1.33. Formas de vibrar no admisibles

Conocida la deformación máxima de la viga, $Y(x)$, la forma de ella en cualquier tiempo t , $y(x,t)$ será determinada por:

$$y(x,t) = Y(x) \cdot v(t)$$

$v(t)$ = función llamada desplazamiento generalizado, que es la variable a determinar, pues se asume conocida $Y(x)$.

Método de Rayleigh

El objetivo de este método es estimar en forma rápida la frecuencia fundamental de vibrar de un sistema mecánico.

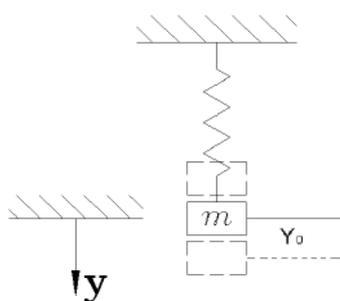
Los pasos a seguir son:

1. Suponer una forma de deformación máxima $Y(x)$
2. Escribir la igualdad de energías (considerando el sistema conservativo):

$$E_c \text{ máx (en su posición de equilibrio)} = E_p \text{ máx (posición de máxima deformación)} \quad (1-14)$$

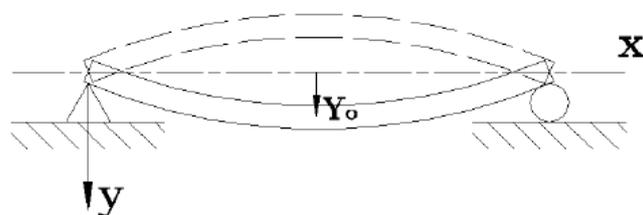
Ejemplo

Estimar la frecuencia fundamental ω_1 de la viga uniforme de la figura. Aplicar en paralelo el método al sistema masa resorte (para el cual se conoce su frecuencia natural de vibrar)



$$y(t) = Y_0 \sin \omega_n t$$

$$\dot{y} = Y_0 \omega_n \cos \omega_n t$$



$$Y(x) = Y_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \text{ deformacion } n \text{ max}$$

$$y(x,t) = Y(x) \sin \omega_1 t, \text{ deformacion } n \text{ en cualquier } t$$

$$E_c max = \frac{1}{2} m (\dot{y} max)^2 = \frac{m \omega_n^2}{2} Y_0^2$$

$$E_p max = \frac{1}{2} k Y_0^2$$

$$E_c max = E_p max$$

$$\frac{m \omega_n^2}{2} Y_0^2 = \frac{1}{2} k Y_0^2$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$\dot{y} = Y(x) \omega_1 \cos \omega_1 t$$

$$E_c max = \frac{1}{2} \int \dot{y} max^2 dm = \frac{\omega_1^2}{2} \int_0^l Y^2(x) \frac{m}{l} dx$$

$$E_p max = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx$$

$$E_c max = E_p max$$

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l Y^2(x) \frac{m}{l} dx} = \frac{\pi^4 EI}{ml^3} = \frac{97,4 EI}{ml^3}$$

Notas:

1. La frecuencia calculada es la exacta, pues la curva sinusoidal utilizada es la verdadera
2. Si se usa como forma de deformación máxima una parábola:

$$y(x, t) = Y_0 \left(\frac{x}{l} \right) \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \sin \omega_1 t$$

se obtiene:

$$\omega_1^2 = \frac{120 EI}{ml^3} \text{ (20% mayor que el valor anterior en } \omega_1^2 \text{ y 10% en el valor de } \omega_1 \text{)}$$

Cuando se usa la verdadera curva de deformación máxima se obtiene la frecuencia correcta. Para otra curva la frecuencia determinada será siempre mayor que la verdadera. Esto se explica por el hecho que cualquier desviación de la verdadera curva requiere restricciones externas adicionales actuando sobre el sistema. Esto se traduce en un efecto rigidizante que aumenta ω_i

3. Comparando este resultado con un método de discretización, que se verá posteriormente, el cual consistente en dividir la barra en sub-elementos y en cada uno de sus extremos considerar concentradas las masas, se obtiene:

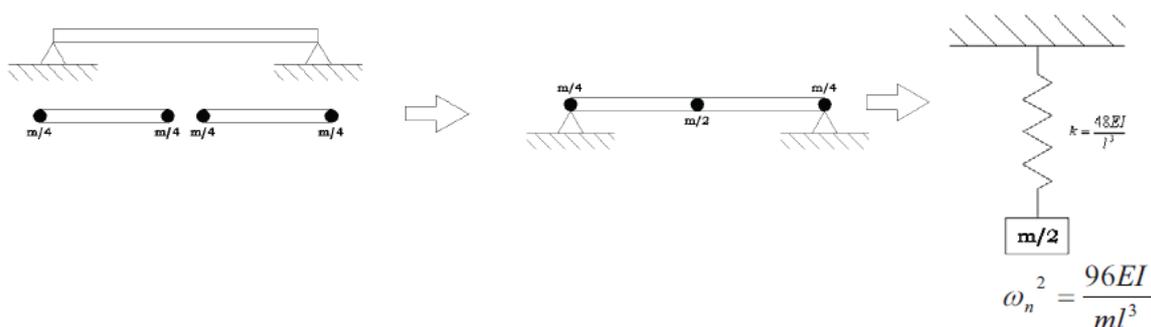


Fig 1.34. Modelo de masas discretizadas

Método de Rayleigh aplicado a vigas con masas concentradas en ellas.

El método de Rayleigh se usa para estimar la frecuencia fundamental de una viga o eje con masas concentradas (la masa del eje se considera despreciable respecto a las masas concentradas). Las fuerzas que deforman la viga o eje cuando ella vibra son las fuerzas de inercia. Como estas fuerzas son

proporcionales a la masa, la curva de deformación asumida en este caso es la deformación estática de la viga o eje sometido a fuerzas iguales a los pesos de las masas concentradas, pero en direcciones alejándose de sus posiciones de equilibrio, como se indica en la figura (las fuerzas de inercia tienen dichas direcciones).

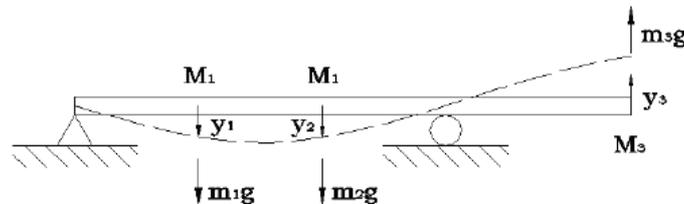


Fig 1.35. Forma de deformación máxima supuesta igual a la deformación estática de la viga sometida a fuerzas proporcionales al peso de las masas discretas.

$E_{c\text{máx}}$ (en su posición de equilibrio) = $E_{p\text{máx}}$ (posición de máxima deformación)

$$E_c = \frac{1}{2} \omega_1^2 (M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + M_3 y_3^2)$$

$$E_p = \frac{1}{2} g (M_1 y_1 + M_2 y_2 + M_3 y_3)$$

Nota:

1. Las deformaciones y_i se determinan utilizando las expresiones usadas en el curso de mecánica de sólidos.
2. La energía potencial fue determinada en este caso como el trabajo requerido para deformar la viga a su posición extrema, considerando que los y_i ya han sido calculados

Ejemplo. Resolver el ejemplo anterior utilizando las ecuaciones de Lagrange.

Para resolver el problema se utilizará la forma de deformación máxima sinusoidal. La coordenada independiente a utilizar será $q(t)$.

$$y(x, t) = Y(x)q(t) = Y_0 \sin \frac{\pi x}{l} q(t) \quad q(t): \text{Incognita}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^l Y^2(x) \dot{q}^2(t) \frac{m}{l} dx = \frac{\dot{q}^2(t) m}{2l} \int_0^l \left(Y_0 \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{\dot{q}^2(t) m Y_0^2}{4}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx = \frac{EI \pi^4 q^2}{2l^4} \int_0^l \left(Y_0 \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{q^2 EI \pi^4 Y_0^2}{4l^3}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial q} = Q_q$$

$$\frac{m Y_0^2}{2} \ddot{q} + \frac{EI \pi^4 Y_0}{2l^3} q = 0$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{\frac{EI \pi^4 Y_0}{2l^3}}{\frac{m Y_0^2}{2}} = \frac{EI \pi^4}{m l^3}$$

1.6.- Vibraciones forzadas por movimiento de la base

Las vibraciones pueden ser generadas no solo por fuerzas variables en el tiempo, sino que también por movimiento de sus puntos de apoyo (sismos, transmisiones de una máquina a otra, etc.). A continuación se analiza como se mueve la masa m cuando la base del resorte y amortiguador se mueve con un desplazamiento dado por $x_b(t)$.

1.6.1 Ecuaciones del movimiento en función del desplazamiento absoluto $x(t)$ de la masa m .

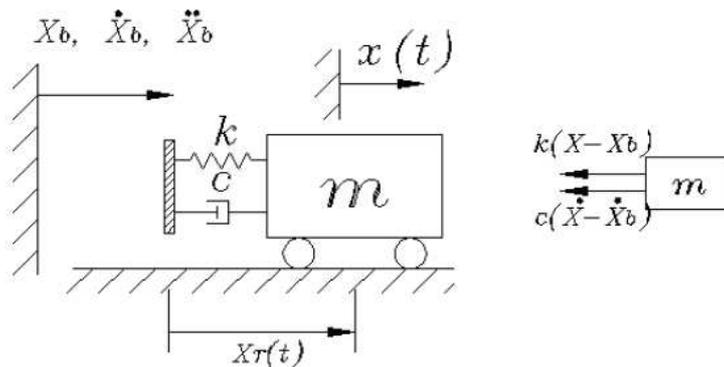


Fig 1.36. Coordenadas absolutas del movimiento

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_b) + k(x - x_b) = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{x}_b + kx_b = f^*(t)$$

Si:

$$x_b = X_b \sin \Omega t \quad ; \quad \dot{x}_b = \Omega X_b \cos \Omega t$$

$$\rightarrow f^*(t) = c\Omega X_b \cos \Omega t + kX_b \sin \Omega t = X_b \sqrt{c^2\Omega^2 + k^2} \sin(\Omega t + \phi_F) = F_0^* \sin(\Omega t + \phi_F)$$

Reemplazando en la ecuación (1-11) se obtiene:

$$X_0 = \frac{X_b \sqrt{c^2\Omega^2 + k^2}/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right]^2}} = X_b \frac{1 + \left[\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right]^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right]^2}}$$

1.6.2. Ecuaciones del movimiento en función del desplazamiento relativo $x_r(t)$

Reemplazando en las ecuaciones del movimiento:

$$x(t) = x_b(t) + x_r(t)$$

Se obtiene:

$$m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r = -m\ddot{x}_b = p_{eff}(t)$$

$p_{eff}(t)$: representa la carga efectiva debido a la excitación de los apoyos.

Notas:

1. Las normas de severidad vibratoria en máquinas y personas limitan el valor de la aceleración absoluta $a(t)$ con el objeto de limitar las fuerzas de inercia
2. Sin embargo, para determinar los esfuerzos en los elementos elásticos es necesario determinar el desplazamiento relativo, como se ilustra en el ejemplo siguiente.
3. Para determinar el desplazamiento relativo se pueden seguir dos caminos:
 - Calcular el desplazamiento absoluto y luego: $x_r(t) = x(t) + x_b(t)$
 - Calcular $x_r(t)$ de la ecuación anterior directamente.

Este último método es más corto y útil

Ejemplo:

Estanque de masa M soportado por una barra circular de diámetro d . Determine el máximo esfuerzo sobre la barra cuando actúa un terremoto horizontal: $x_b = X_{b0} \sin \Omega t$. Considere sólo el movimiento estacionario y desprecie la masa de la barra circular.

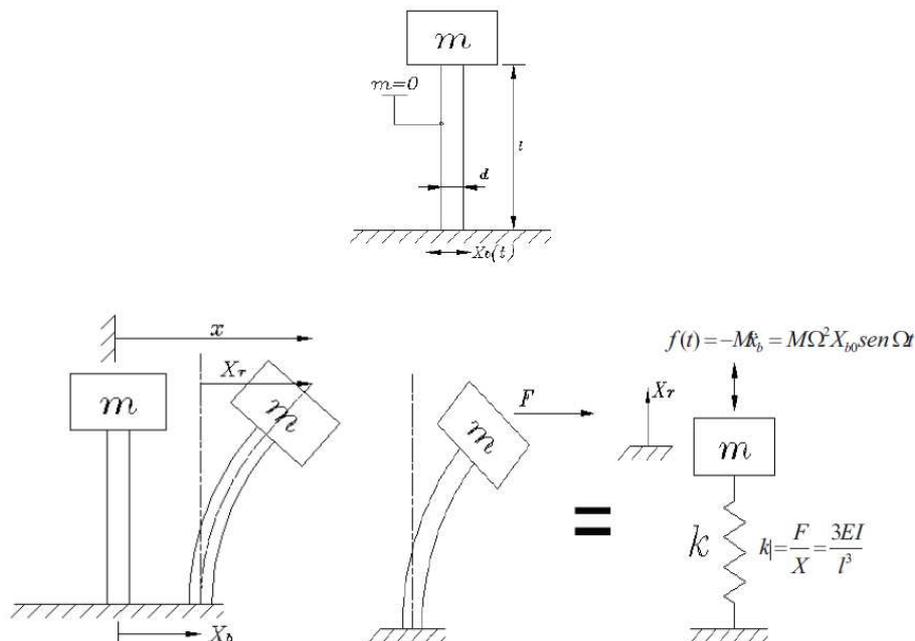


Fig 1.37. Movimiento en función del desplazamiento relativo a la base

$$M\ddot{x}_r + kx_r = -M\ddot{x}_b = M\Omega^2 X_{b0} \sin \Omega t$$

$$X_{r0} = \text{desplazamiento relativo máximo} = \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{\Omega^2 X_{b0} M/k}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Para generar el desplazamiento X_{r0} es equivalente que actúe una fuerza estática: $F_0 = k X_{r0}$. Esta fuerza genera un momento flector máximo en la base de la barra dado por:

$$\sigma = \frac{F_0 l d / 2}{I} = \frac{\Omega^2 X_{b0} M l d / 2}{k I \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2}$$

1.7. APLICACIÓN: AISLAMIENTO DE VIBRACIONES

El aislamiento de vibraciones en máquinas y estructuras tiene dos objetivos:

1. Máquinas que generan por su funcionamiento altas fuerzas dinámicas se las aísla de su base para reducir la magnitud de la fuerza transmitida de la máquina a su base soporte, figura a.
2. Máquinas o instrumentos que requieren ser montados en bases que vibran con valores inaceptables para el funcionamiento de la máquina o equipo, se aíslan para reducir la magnitud de las vibraciones transmitidas, figura b.

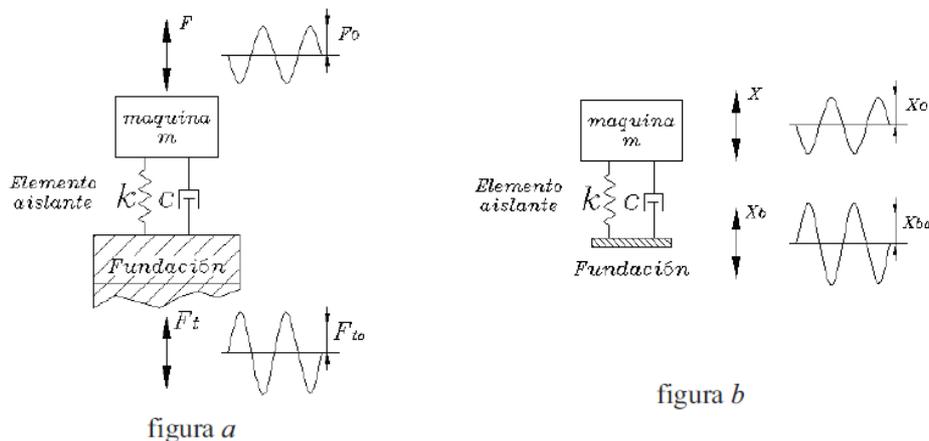


Figura 1.38. Casos del aislamiento de vibraciones
a) Reducción de la fuerza que transmite una máquina a su base
b) Reducción de las vibraciones transmitidas por el soporte

1.7.1. Reducción de la magnitud de la fuerza transmitida de una máquina a su base.

Hay máquinas que generan, inherentes a su funcionamiento normal, fuerzas desbalanceadas grandes, como ser:

- ventiladores propensos a desbalancearse por acumulación de polvo u partículas en sus álabes.
- motores diesel, sobre todo aquéllos que tienen menos número de pistones
- compresores alternativos
- harneros vibratorios
- chancadores

Para evitar que la fuerza se transmita en toda su magnitud a su base de apoyo (generando esfuerzos y vibraciones en todo su alrededor), se coloca un elemento resiliente o elástico entre base y máquina llamado aislador de vibraciones, con el cual se espera que solo se transmita una parte de dicha fuerza.

El problema es entonces, determinar la rigidez k y amortiguamiento c de dicho elemento aislador para que cumpla con lo anterior.

Sea $F = F_0 \sin \Omega t$ una fuerza que se genera en una máquina que se quiere aislar

F_t = fuerza transmitida a la base por el elemento elástico.

$$\vec{F}_t = c\dot{\vec{x}} + k\vec{x} = X_0[k \sin(\Omega t - \phi) + c\Omega \cos(\Omega t - \phi)]$$

$$F_{t0} = |\vec{F}_t| = X_0 \sqrt{k^2 + c^2 \Omega^2} = kX_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Reemplazando el valor de X_0 de ecuación (1-11) y definiendo la transmisibilidad TR como el cociente:

$$TR = \text{Amplitud fuerza transmitida} / \text{amplitud fuerza generada} = F_{t0}/F_0$$

se obtiene :

$$TR = \frac{F_{t0}}{F_0} = \frac{1 + \left[\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right]^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right]^2}}$$

En figura 1.39 se grafica ecuación (1-18) utilizando ξ como parámetro

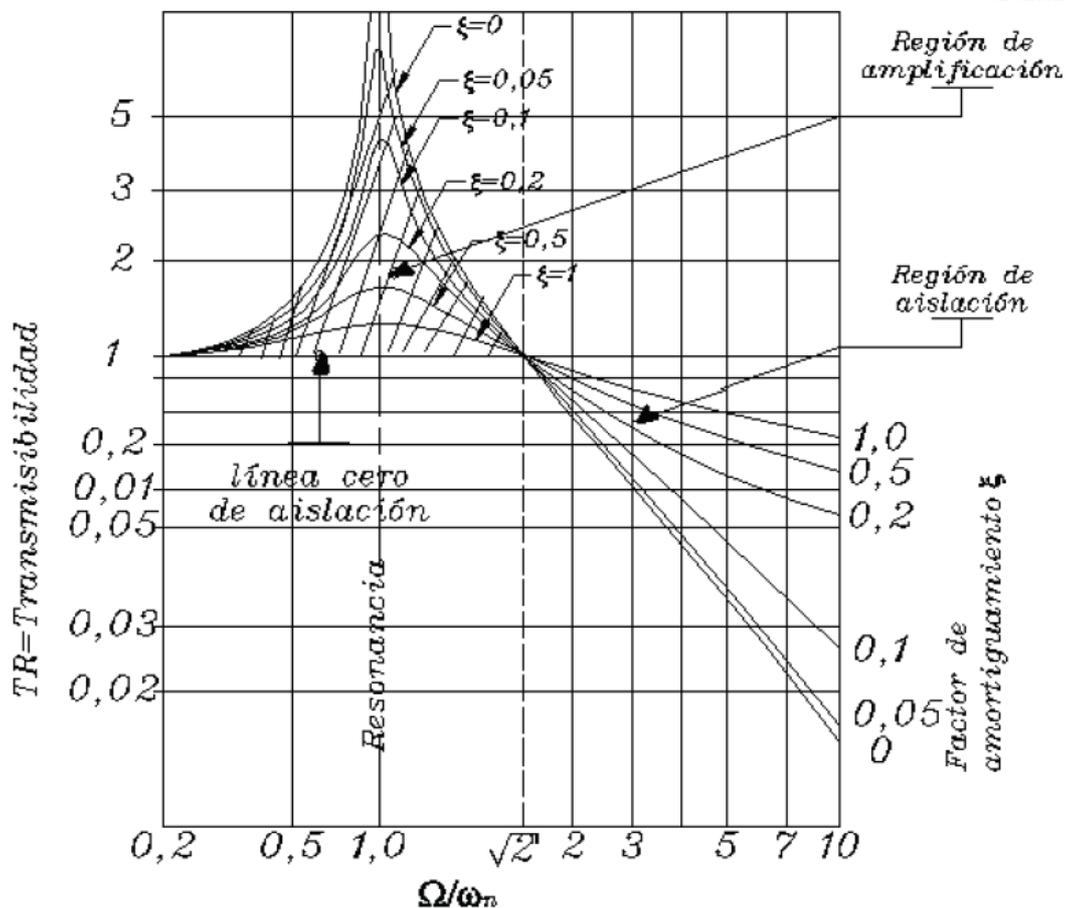


Fig 1.39. Gráfico de la ecuación de transmisibilidad

De la curva anterior se observa:

1. El aislamiento de vibraciones sólo se produce para $\Omega/\omega_n > 2$. Para valores menores de este cociente se produce una amplificación de la fuerza transmitida. Es decir, la máquina transmite más fuerza a la base que la que transmitiría si ella se hubiese unido directamente a la base sin aisladores.
2. Un elemento elástico sin amortiguamiento es más efectivo que uno con amortiguamiento. En las empresas llaman equivocadamente amortiguadores a los aisladores, debido a la falta de conocimientos.

Sin embargo, debe tenerse presente que una máquina que pase lentamente a través de la resonancia requiere de algún grado de amortiguamiento.

3. A mayor Ω/ω_n , menor es la transmisibilidad, y mejor es el aislamiento. Se podría pensar entonces para aumentar este cociente disminuir ω_n disminuyendo significativamente k . Esto sin embargo, está limitado por el desplazamiento estático al montar la máquina sobre los aisladores. Debido al peso mg de la máquina:

$$X_{est} = mg/k < \text{valor compatible con el montaje de la máquina ó} \\ < \text{espacio entre espiras en el caso de un resorte}$$

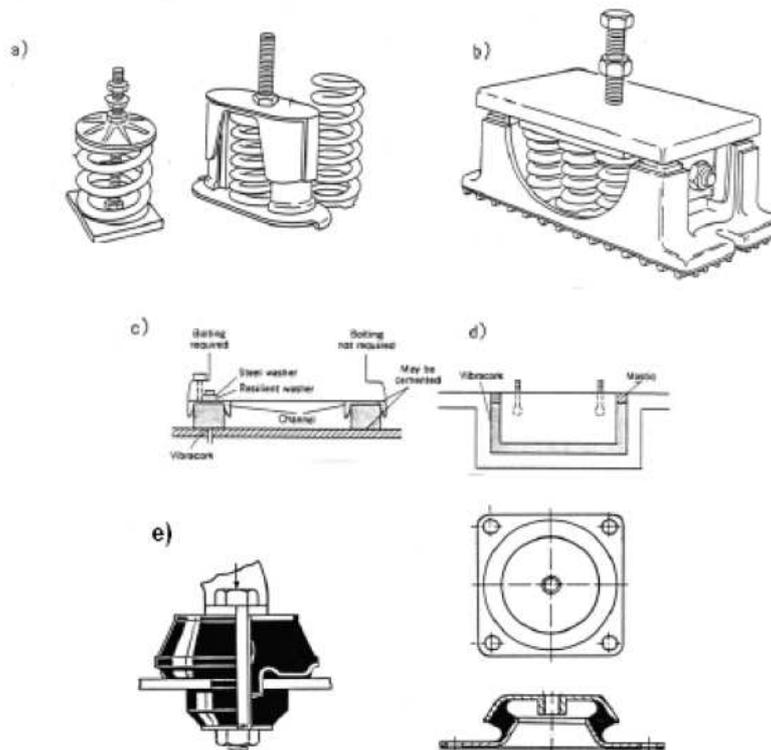


Figura 1.40. Diferentes tipos de aisladores.

- a) Aisladores que tienen un solo resorte
- b) Aisladores que tienen un conjunto de resortes
- c) Aisladores de corcho en canales para máquinas ligeras
- d) Aisladores de capas continuas de corcho para máquinas pesadas
- e) Aisladores de elastómeros

EJEMPLO

Determine cuatro aisladores iguales a utilizar en un ventilador de masa 100 Kg que gira a 980 cpm (16.33 Hz), de manera que la fuerza transmitida a su base cuando el rotor se desbalancea sea la quinta parte de la fuerza centrífuga que genera el desbalanceamiento.

1. Con el valor de la transmisibilidad requerida: $T = 0.2$ y suponiendo que el elastómero que se va a utilizar como material aislante tiene un factor de amortiguamiento $\xi = 0.1$, se determina de figura 1.39, la razón:

$$\Omega/\omega_n = \text{frecuencia de la vibración / frecuencia natural de la máquina sobre los aisladores} \\ = 2,7$$

De aquí se despeja el valor de la frecuencia natural requerida:

$$\omega_n = \Omega / 2,7 = 16.33 \text{ Hz} / 2.7 = 6.05 \text{ Hz}$$

2. Conocida la frecuencia natural requerida se determina de ella la rigidez del aislador requerida.

$$f_n = \sqrt{K/M} / (2\pi)$$

$$K = (2 \cdot \pi \cdot f_n)^2 \cdot M = (2 \cdot 3.14 \cdot 6.05)^2 \cdot 100$$

$$K = 144.500 \text{ N/m} = \text{Rigidez equivalente} = 4 \cdot K_{\text{aislador}}$$

$$K_{\text{aislador}} = 36.125 \text{ N/m}$$

3. Los valores de rigideces más cercanas que ofrece el catálogo para cada aislador son:

$$1) K_{\text{aislador}} = 30.000 \text{ N/m}$$

$$2) K_{\text{aislador}} = 40.000 \text{ N/m}$$

Se selecciona el de menor rigidez con lo cual la transmisibilidad será menor que 0.2.

Observe que debido a la disponibilidad de valores discretos para la rigidez de los aisladores no se requiere de exactitud en los cálculos.

4. Verificación de la deformación estática, $\delta_{\text{estático}}$, de los resortes bajo el peso de la máquina.

$$\begin{aligned} \delta_{\text{estático}} &= \text{Peso} / K \\ &= 100 \text{ Kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 / 4 \cdot 30.000 \text{ N/m} = 8,2 \text{ mm} \end{aligned}$$

valor que se considera aceptable:

1.7.2. Reducción de la transmisión del movimiento del soporte

Respecto a la figura 1.38b: sea $x_b = X_{b0} \sin \Omega t$, 0 el movimiento de la base donde se va a montar una máquina. Es necesario para el buen funcionamiento de la máquina que el movimiento de ella, es decir el de la masa m sea menor que el movimiento de la masa. Para eso se coloca un elemento elástico entre base y máquina. Determinar k y c de dicho elemento.

El movimiento de la masa m , queda expresado como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{x}_b + kx_b$$

y su solución, ver la ecuación (1-17) es :

$$\frac{X_0}{X_{b0}} = \frac{1 + \left[\frac{2\xi\Omega}{\omega_n} \right]^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[\frac{2\xi\Omega}{\omega_n} \right]^2}} = TR$$

1.8.- Vibraciones forzadas con fuerza periódica cualquiera

1.8.1. Desarrollo de una función periódica en una serie de Fourier:

Una función periódica $x(t)$, acotada (energía finita), de período T_0 y frecuencia $f_0 = 1 / T_0$, puede ser expresada mediante una serie de Fourier:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n2\pi f_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n2\pi f_0 t = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(n2\pi f_0 t + \varphi_n)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt : \text{valor medio}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos n2\pi f_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin n2\pi f_0 t dt$$

$$X_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} : \text{Amplitud de la armónica "n"}$$

$$\varphi_n = \tan^{-1} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) : \text{Fase de la armónica "n"}$$

Espectros en frecuencia

El espectro (en frecuencias) de una función en el dominio tiempo $x(t)$, es su representación en el dominio frecuencia. El espectro de funciones periódicas puede ser determinado a través de una serie de Fourier. El análisis de espectros es la técnica básica para diagnosticar problemas o fallas en máquinas rotatorias.

Figura 1.41 muestra una función armónica en el dominio tiempo y su correspondiente espectro. El espectro indica que la función $x(t)$ está compuesta por una función sinusoidal de frecuencia f_0 y amplitud X más un valor medio (frecuencia cero) de valor X_0 .

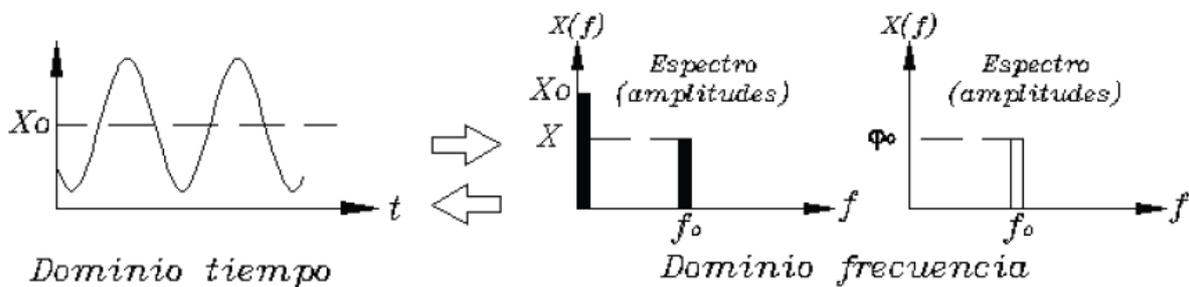


Figura 1.41. Espectro de una función armónica

Figura 1.42 muestra una función cuadrada en el dominio tiempo y su correspondiente espectro. El espectro indica que la función $x(t)$ está compuesta por una serie de funciones armónicas, cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia fundamental f_0 ($f_0 = 1 / T_0$, donde T_0 es el periodo de la

función en el tiempo). Por la simetría que tiene esta función, es que solo tiene los múltiplos impares de la fundamental.

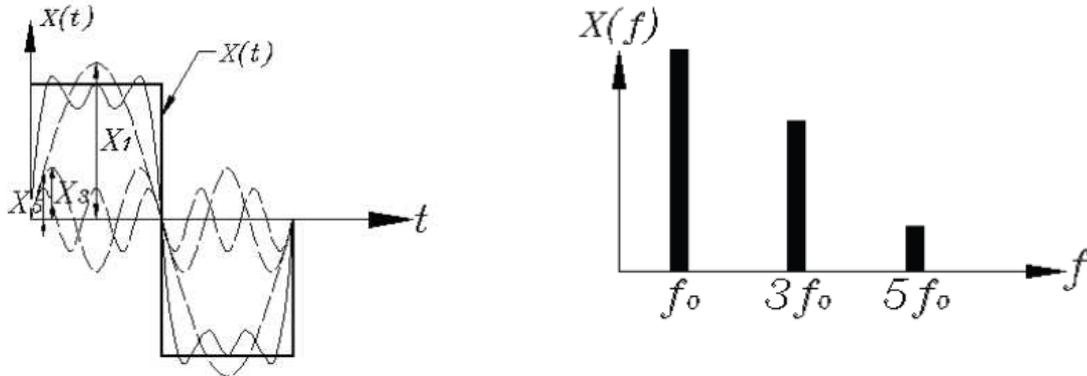


Figura 1.42. Espectro de una función armónica

Se observa que el espectro de una función periódica es un espectro llamado espectro a rayas, pues tiene componentes solo a frecuencias discretas nf_0 ($n=1,2,3\dots$).

Una función no periódica puede ser considerada como periódica de periodo $T_0 = \infty$. Esto hace que la separación entre componentes f_0 tienda a cero y el espectro llegue a ser una función continua. El espectro de una función cualesquiera puede ser determinado por su Transformada de Fourier.

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

En la práctica se utiliza un algoritmo más rápido computacionalmente, llamado FFT (Fast Fourier Transform), la transformada rápida de Fourier. En MATLAB es muy fácil de determinar a través del comando "fft".

Figura 1.43 muestra que las vibraciones que se generan en máquinas y estructuras pueden ser clasificadas en periódicas y no-periódicas. Dentro de las periódicas están divididas en armónica y periódicas cualesquiera. El espectro de estas funciones es un espectro a rayas, es decir, está compuesta por componentes a frecuencias discretas.

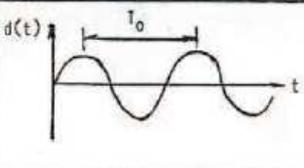
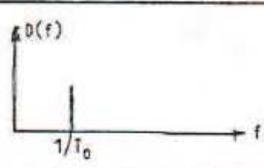
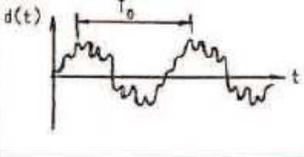
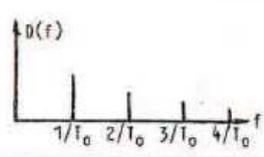
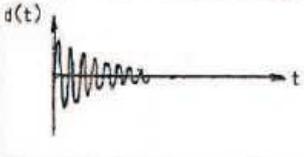
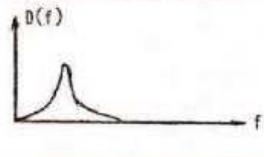
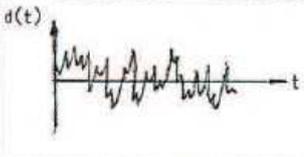
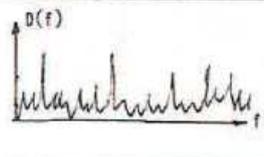
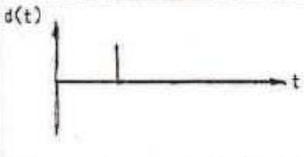
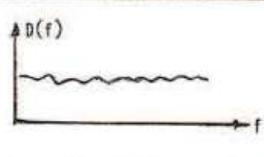
CLASIFICACION		DOMINIO TIEMPO	DOMINIO FRECUENCIAS	EJEMPLOS
P E R I O D I C A S	ARMÓNICA SIMPLE (Senoidal)			- Desbalanceamiento de rotores
	PERIÓDICA CUALQUIERA			- Fuerzas de inercia en motores de combustión interna. - Paso de álabes en turbomáquinas. - Componente de engrane.
N O P E R I O D I C A S	TRANSIENTE			- Laminadores - Prensas - Golpes - Sismos
	ALEATORIA			- Cavitación - Turbulencias - Ruidos eléctricos - Rozamientos - Proceso
	IMPULSIVA			- Golpe de martillo (Ensayo dinámico de estructuras)

Figura 1.43. Clasificación de las vibraciones que se encuentran en máquinas y estructuras.

Las funciones no periódicas han sido clasificadas en figura 1.43 en transientes, aleatorias e impulsivas o de impacto. Una vibración transiente es la que solo dura un pequeño tiempo y luego desaparece. Los espectros de todas las funciones no periódicas, no son espectros a rayas, sus espectros tienen una forma continua sobre un rango de frecuencias en el espectro (se llaman por lo tanto, espectros de banda ancha).

Las funciones aleatorias (random) o estocásticas son funciones no determinísticas, es decir, que si se conoce una parte de la función en el tiempo, no es posible determinar cómo continuará su forma a posterior. Ejemplo de fuerzas aleatorias o vibraciones aleatorias son las que generan:

- el comportamiento turbulento en turbomáquinas (bombas, turbinas, ventiladores, sopladores, etc)
- el rozamiento continuo
- la cavitación en bombas
- las fuerzas que genera el aire sobre un avión
- las fuerzas que genera el mar sobre un buque
- los terremotos

El espectro de una función o vibración aleatoria es un espectro de banda ancha sobre un amplio rango de frecuencias. Para el caso de la cavitación este rango de frecuencias es infinito. En la práctica estos espectros de vibraciones aleatorias se llaman “espectros de pasto” (es como ver un corte transversal de un prado de pasto).

1.8.2. Respuesta del sistema ideal a una fuerza periódica cualquiera

Para determinar la respuesta del sistema ideal a una fuerza periódica cualquiera, se utilizan las mismas ecuaciones anteriores desarrolladas para una fuerza armónica. Para ello es necesario seguir los dos pasos siguientes:

1. Expresar la fuerza de excitación en una serie de Fourier. Es decir reemplazar la fuerza periódica por una suma de fuerzas armónicas.
2. Como la respuesta a una fuerza armónica es conocida, entonces utilizar el principio de superposición. Es decir, la respuesta total del sistema será la suma de las respuestas individuales obtenidas para cada una de las fuerzas armónicas que contiene la serie de Fourier.

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n0} \sin(n2\pi f_0 t + \varphi_n)$$
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t)$$

1.9.- Respuesta a una excitación dinámica cualquiera

La respuesta del sistema ideal a una fuerza excitadora cualquiera puede determinarse utilizando el principio de convolución, el cual puede resumirse en los pasos siguientes:

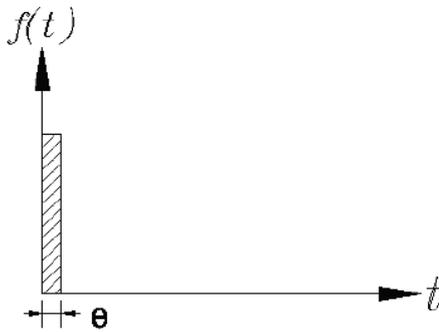
1. Considerar la fuerza arbitraria como una serie de impulsos (como el achurado para $t = \eta$ en figura 1.44). y determinar la respuesta a cada impulso.
2. La respuesta a un impulso es conocida, pues es equivalente a darle al sistema una velocidad inicial (vibraciones libres).
3. Utilizar el principio de superposición (sistema lineal) para sumar la contribución de todos los impulsos.

1.9.1.- Respuesta a una impulso (\hat{I})

Una fuerza impulsiva es una fuerza de gran magnitud que actúa durante un tiempo muy pequeño (el significado de pequeño es definido más formalmente más adelante). El valor \hat{I} de un impulso está definido por:

$$\hat{I} = \int f(t) dt$$

La acción de un impulso de muy corta duración, ver figura 1.44, es equivalente a comunicarle al sistema una velocidad inicial, la cual puede ser determinada del teorema: impulso = variación de la cantidad de movimiento. Se obtiene entonces:



Cuando θ tiende a cero e $\hat{I}=1$, se denomina al impulso, impulso unitario o función delta δ de Dirac.

Figura 1.44. Función impulso

$$\dot{x}(0) = \hat{I}/m$$

y por lo tanto, la respuesta del sistema ideal de acuerdo a ecuación (1-5), será:

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_d t = \frac{\hat{I}}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_d t$$

1.9.2.- Respuesta impulsional h(t)

La respuesta impulsional, $h(t)$, de un sistema se define como la respuesta del sistema a un impulso unitario. Por lo tanto, para el sistema ideal utilizando la ecuación anterior se obtiene:

$$h(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t$$

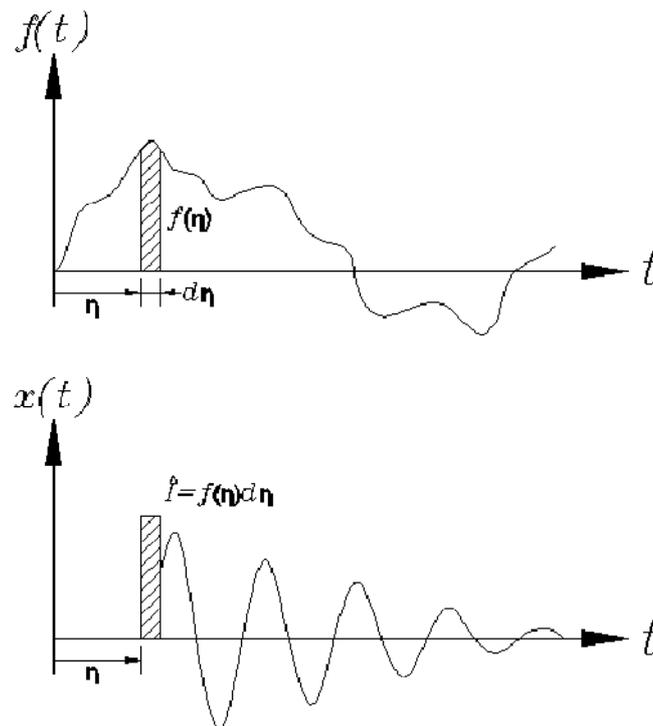


Figura 1.45. a) Excitación cualquiera reemplazada utilizando una serie de impulsos
b) Respuesta a un impulso $f(\eta)d\eta$ el que actúa en el tiempo η

1.9.3.- Respuesta del sistema ideal a una fuerza cualquiera.

$h(t)$ es la respuesta del sistema a un impulso 1, el cual actúa para $t=0$. Para determinar la respuesta del sistema para un impulso unitario actuando en $t = c$, solo es necesario realizar la traslación de los ejes coordenados, obteniéndose que la respuesta del sistema para un impulso unitario actuando en $t = \eta$, es $h(t - \eta)$. Por lo tanto, la respuesta $dx(t)$ a un impulso $f(\eta)d\eta$, como el achurado en figura 1.44, será $f(\eta)d\eta$ veces la respuesta al impulso unitario. Es decir:

$$dx(t) = f(\eta)d\eta \cdot h(t - \eta)$$

Por lo tanto la respuesta del sistema a la fuerza arbitraria en un tiempo t cualquiera, será la suma de las respuestas a los impulsos elementales. Es decir:

$$x(t) = \int_0^t f(\eta) h(t - \eta)d\eta = f(t) * h(t)$$

Esta integral es denominada la integral de convolución, de superposición o de Duhamel . El símbolo (*) indica producto de convolución.

Nota: Debe tenerse presente que la ecuación (1-22) da la respuesta total del sistema, es decir la respuesta transiente más la respuesta estacionaria. MATLAB determina esta expresión por el comando conv(h,t)

Ejemplo:

Determine la respuesta total del sistema ideal no amortiguado a una fuerza $f(t) = F_0 \sin \Omega t$, si el desplazamiento y la velocidad inicial son cero.

- utilizando el procedimiento clásico
- utilizando el producto de convolución

1. Utilizando las ecuaciones (1-1) y (1-11), se obtiene para la respuesta total:

$$x(t) = A \sin w_n t + B \cos w_n t + \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \sin \Omega t$$

De $\dot{x}(0) = 0$ se obtiene que $B=0$

De ; $x(0) = 0$ se obtiene:

$$0 = A w_n + \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \Omega \rightarrow A = - \frac{F_0 \Omega / w_n k}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$x(t) = \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{w_n} \sin w_n t \right)$$

2. Utilizando la integral de Duhamel:

$$x(t) = \int_0^t f(\eta) h(t - \eta) d\eta = \int_0^t F_0 \sin \eta \Omega \frac{\sin w_n(t - \eta)}{m w_n} d\eta$$

$$\text{Utilizando: } \sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) - \cos(A - B)]$$

$$x(t) = \frac{F_0}{2m w_n} \int_0^t \cos [\Omega \eta + w_n(t - \eta)] d\eta + \int_0^t \cos [\Omega \eta - w_n(t - \eta)] d\eta$$

$$x(t) = \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{w_n} \sin w_n t \right)$$

Representación de un sistema lineal como una caja negra que actuando sobre la entrada da la salida; en el dominio tiempo y en el dominio frecuencias a través de su función impulso y de su función respuesta respectivamente.

Note que al pasar del dominio tiempo al dominio frecuencias a través de la transformada de Fourier el producto de convolución (*) se transforma en un producto simple (·)

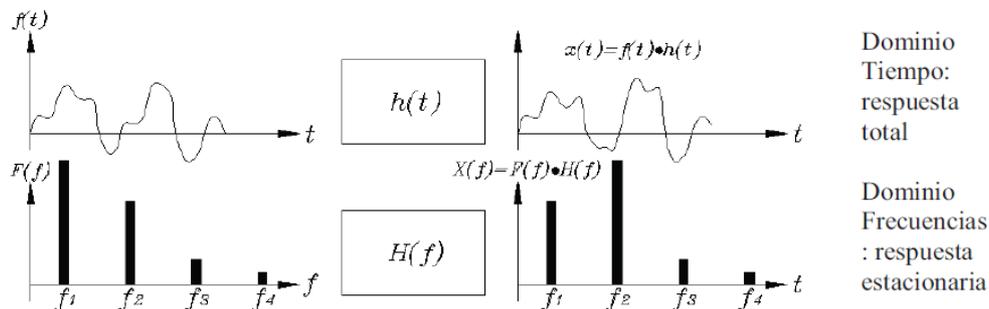


Figura 1.46. Representación de un sistema lineal en el dominio tiempo y en el dominio frecuencias.

1.10.- Respuesta del sistema ideal a una fuerza de impacto o impulsiva.

1.10.1. Excitación impulsiva (o de impacto)

¿Cuándo a una fuerza la llamaremos de impacto? No existe una definición clara en la literatura, generalmente se llama a una “transferencia rápida de energía” o “a la aplicación rápida de una fuerza”. La palabra “rápida” para que tenga significado debe ser referida a algo. Ella es generalmente referida a su período natural de vibrar.

1.10.2. Espectros respuesta.

Para fines de diseño el ingeniero está generalmente solo interesado en la fuerza máxima, que actúa sobre el elemento elástico, pues es el dato que necesita para diseñarlo o seleccionarlo.

El gráfico de los espectros de respuesta, es un gráfico de la respuesta máxima del sistema, X_{\max} , para diferentes tiempos de aplicación de diferentes tipos transientes de fuerzas que se dan en la práctica. Conocido X_{\max} se determina

$$F_{\max} = k X_{\max}$$

Figura 1.47 muestra en un gráfico adimensional $X_{\max} / (F_0/k) = X_{\max} / X_{\text{est}}$, versus t_0/t_n para tres tipos de transientes : pulso rectangular, pulso triangular y pulso de forma sinusoidal. F_0 es el valor máximo de la fuerza actuando, t_0 es el tiempo de aplicación de la fuerza y t_n es el periodo natural de vibrar del sistema.

La gran aplicación de estos gráficos en la práctica es que permite determinar X_{\max} fácilmente, de no contar con ellos sería necesario realizar el largo cálculo desarrollado en el ejemplo siguiente. De aquí, la necesidad de poder contar con los gráficos de los espectros respuesta.

Ver manuales de ingeniería para otros tipos de fuerzas actuando sobre sistemas con y sin amortiguamiento.

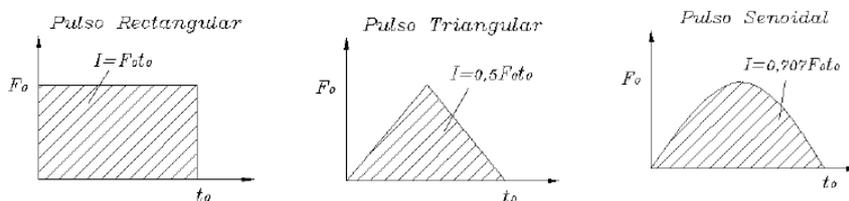
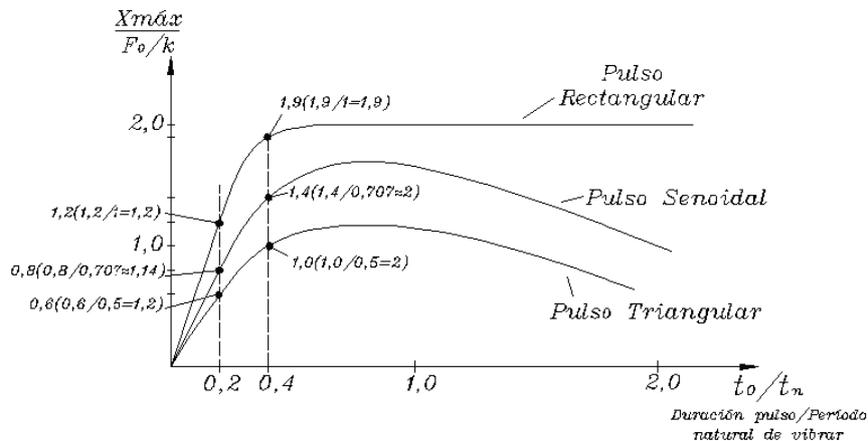


Figura 1.47. Espectros respuesta del sistema ideal no amortiguado para diferentes tipos de transientes

Ejemplo.

Determinar X_{max} (máximo desplazamiento del sistema ideal no amortiguado) cuando sobre él actúa un pulso senoidal de amplitud F_0 y duración t_0 , como se indica en figura 1.47.

El desplazamiento máximo se puede producir en la etapa I, mientras está actuando la fuerza $f(t)$, o en la etapa II de vibraciones libres una vez que la fuerza dejó de actuar.

Fase I: Mientras actúa la fuerza $f(t)$:

Mientras actúa la fuerza $f(t)$:

$$f(t) = F_0 \sin \frac{\pi t}{T_0} = F_0 \sin \omega_0 t$$

La respuesta total del sistema es:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{\sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t}{\left[1 - \left[\frac{\omega_0}{\omega_n}\right]^2\right]} \quad 0 \leq t \leq t_0$$

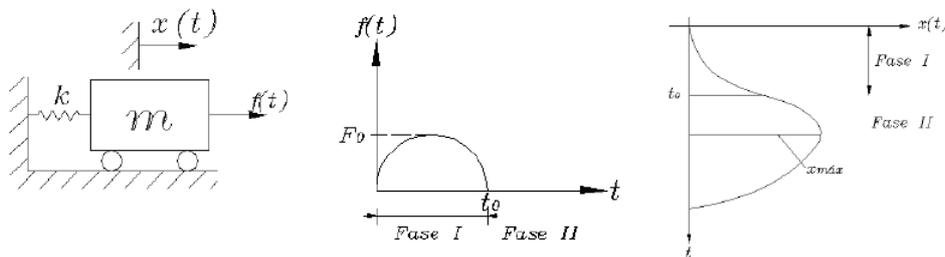


Figura 1.48. Respuesta del sistema ideal a pulso sinusoidal

Fase II: Vibraciones libres con condiciones iniciales: $\dot{x}(t_0), x(t_0)$

$$x(t) = \frac{\dot{x}(t_0)}{\omega_n} \sin \omega_n t + x(t_0) \cos \omega_n t \quad t \geq t_0$$

Con:

$$x(t_0) = -\frac{F_0/k}{k \left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n} \right)^2 \right]} \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t_0$$

$$\dot{x}(t_0) = -\frac{F_0 \omega_0}{k \left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_n} \right)^2 \right]} (1 + \cos \omega_n t_0)$$

Debe tenerse presente como se ilustra en figura 1.48 que dependiendo del tiempo de aplicación de la fuerza, el desplazamiento máximo se puede producir mientras actúa la fuerza como se indica en la figura a), o después que deja de actuar la fuerza, o sea en las vibraciones libres, como indica la figura b).

1.10.3. Espectros respuesta para el caso de un terremoto

Para diseñar una estructura antisísmica, es usual utilizar los datos del mayor sismo registrado que ha ocurrido en el mundo: El terremoto de El Centro, California, ocurrido el 18 de Mayo de 1940. Figura 1.50 muestra el registro de dicho terremoto. Se muestra la aceleración del suelo (en g), la velocidad vibratoria (en inch/s) y el desplazamiento vibratorio (en inch).

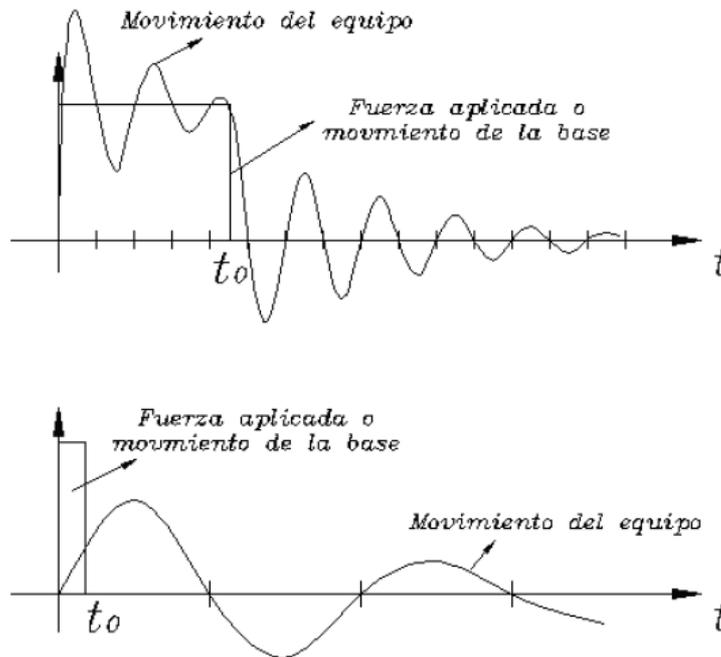


Figura 1.49. a) desplazamiento máximo mientras está actuando la fuerza
 b) desplazamiento máximo en las vibraciones libres (después que deja de actuar la fuerza)

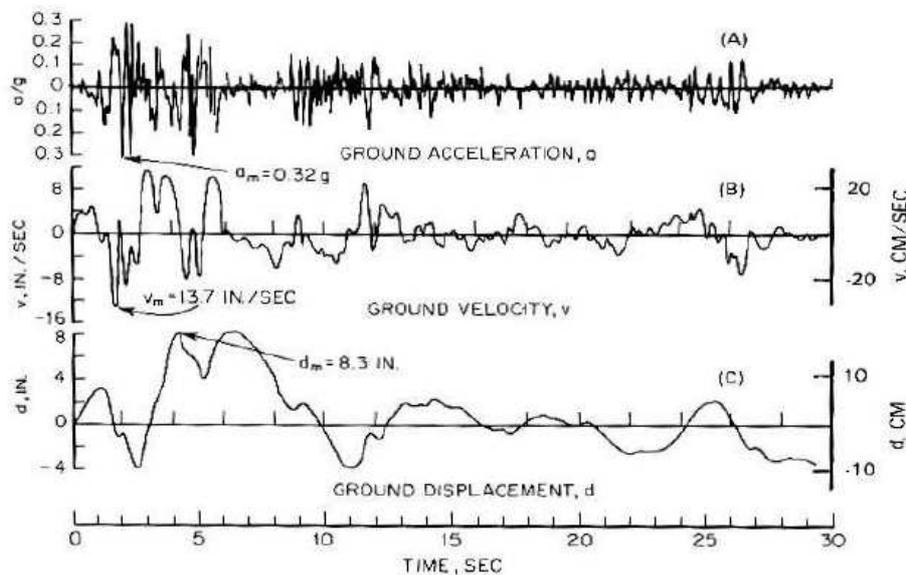


Figura 1.50. Terremoto del Centro. (EShock Vibration HandbookE, Cyril M. Harris, 3F ed., pag. 24-5, 24-7)

Valores máximos indicados en el gráfico:

$d_m = 8,3$ pulg.

$v_m = 13,7$ pulg/s

$a_m = 0,32g$

Figura 1.51 muestra los espectros respuesta del desplazamiento, velocidad y aceleración, relativos a la base, que experimenta el sistema ideal cuando la base de él está sometido al terremoto de El Centro, para varios valores del factor de amortiguamiento ξ .

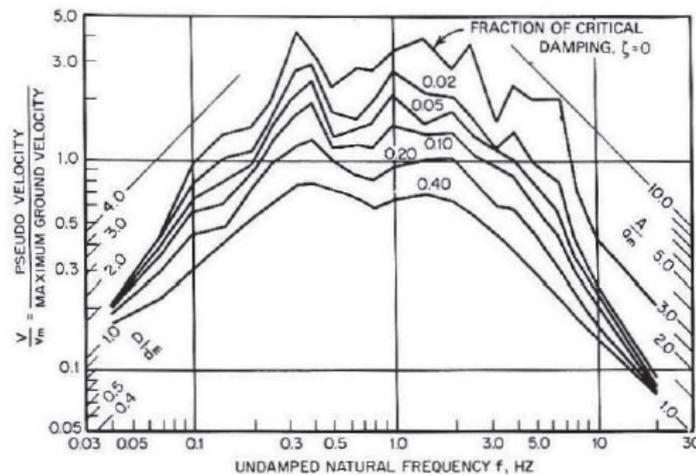


Figura 1.51. Espectros respuesta para movimiento de la base de un sistema de un grado de libertad con terremoto de el Centro

De la figura 1.50 se puede obtener los movimientos relativos de la masa m:

D/d_m = amplitud del desplazamiento relativo/ d_m = 8,3 pulg.

V/V_m = seudo - velocidad (movimiento supuesto armónico) = $\omega_n D/V_m$ = 13,7 pulg/s

A/a_m = seudo - aceleración = $\omega_n V_m = \omega_n^2 D/a_m$ = 0,32g

Nota: Un sistema de ω_n bajo corresponde a una masa grande y/o a un resorte poco rígido. En este caso para ω_n muy bajos, $D/d_m \rightarrow 1,0$; o sea , la máxima deformación en el resorte = al máximo desplazamiento del suelo (el suelo se mueve relativo a la masa y ésta no tiene tiempo para moverse). En el otro extremo para ω_n altos y resortes rígidos, la masa y suelo se mueven de la misma manera (tiene igual aceleración).

Ejemplo:

Figura 1.51 es la modelación de una estructura de un piso. La masa de la losa es m y la rigidez transversal de cada viga es $k/2$. Para el sismo de El Centro actuando horizontalmente determine:

- Desplazamiento relativo máximo
- Fuerza de corte máximo sobre la viga elástica.

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{\sqrt{1840 \cdot 32,2/1500}}{2\pi} = 1Hz$$

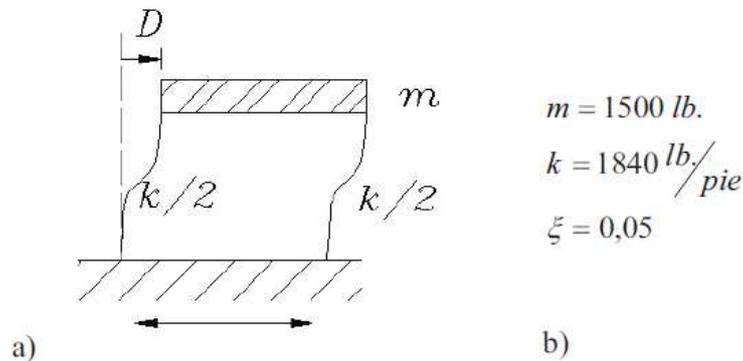


Figura 1.52. Modelación de una estructura de un piso sometida a un sismo horizontal

a) De la figura 1.51 se obtiene:

$$\frac{D}{dm} \approx 0,45 \rightarrow D = 0,45 \cdot 8,3 = 3,74 \text{ pulg.}$$

$$\frac{A}{am} \approx 1,2 \rightarrow A = 1,2 \cdot 0,32 = 0,38 \text{ g}$$

b) $f_s = kD = \frac{1840 \frac{\text{lb}}{\text{pie}} \cdot 3,74}{12 \text{ pie}} = 573 \text{ lb}$

1.10.4. Fuerzas de impacto

Es aparente que para cortas duraciones del impulso, digamos $T_0 < T_n/2$, lo importante para obtener la respuesta es el valor del impulso y su forma tiene un efecto menor. Esto trae como consecuencia que en la práctica impulsos con duración $T_0 < T_n/2$ sean considerados como fuerzas de impacto, es decir, sea equivalente a darle al sistema una velocidad inicial dada por:

$$v_i = \int_0^{T_0} \frac{I(t)}{m} dt = \frac{1}{m} \int_0^{T_0} f(t) dt, \text{ para el caso de una fuerza impulso}$$

$$v_i = \int_0^{T_0} a_b(t) dt, \text{ para un movimiento de la base } a_b(t)$$

Esto se puede verificar en Figura 1.47 donde se ha trazado 2 rectas verticales que cumplen con $t_0 < T_n$. Los valores entre paréntesis dan el valor de $X_{\text{máx}}$ por unidad de impulso. Se consideró para ello $F_0=1=t_0=1$, por lo tanto el impulso de el pulso rectangular es 1, el del triangular es 0,5 y el del sinusoidal es 0,707. Se observa que $X_{\text{máx}}$ por unidad de impulso para la línea de $t_0/T_n = 0,2$ es 1,2; independiente de la forma del pulso (para los 3 tipos de pulsos dio el mismo valor). Lo mismo sucede para la línea a $t_0/T_n = 0,2$. Se obtiene el mismo valor 2 para los 3 tipos de pulsos. Lo mismo sucede para cualquiera otra línea $t_0/T_n < 0.5$. Es decir, la respuesta máxima no depende de la forma del impulso, o sea son fuerzas de impulso.