FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

# VIBRACIONES MECÁNICAS
# (ME4701)
# Sistemas con un grado de libertad

Teoría: Lunes y Viernes 8:30 – 10:00 (SEM. ME)

Práctica: Miercoles 16:15 – 17:45 (SEM. ME)

Profesor: Dr MSc Ing Eduardo Salamanca H.

Correo: eduardosalamanca99@gmail.com

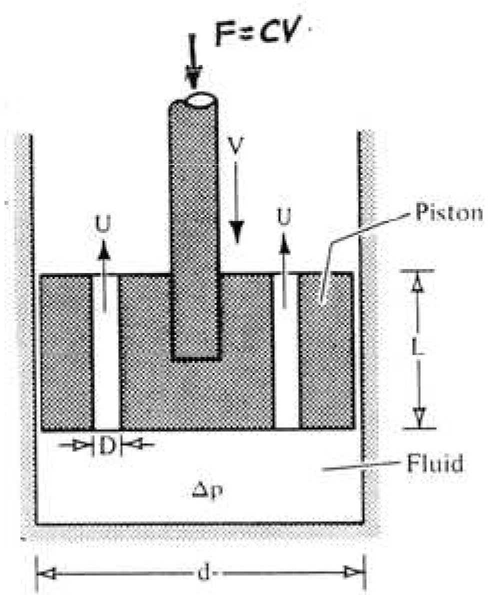
Blog: http://blogs.shen-re.cl/esh/

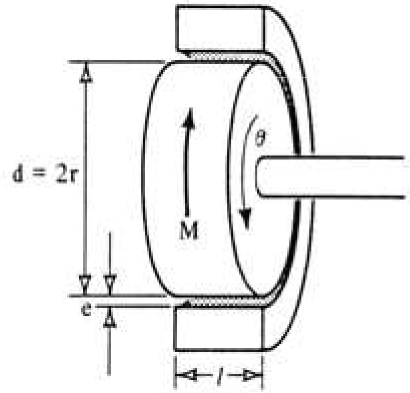
# Resumen clase anterior

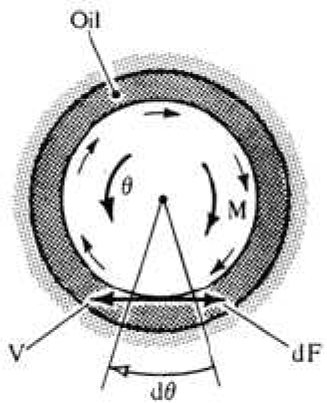
- Sistemas de un grado de libertad:
  - Amortiguamiento = disipación de energía
  - Mecanismos de disipación de energía:
    - Amortiguamiento viscoso
    - Rozamientos como el que ocurre al deslizar un elemento sobre otro (Coulomb).
    - Fricción interna en el material o amortiguamiento estructural o histérico.
    - Resistencia de un cuerpo a moverse dentro de un fluido (aire por ejemplo).
    - Por radiación: por propagación de ondas en un medio infinito.(ejemplos: boyas en el agua, fundaciones de máquinas y estructuras

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Amortiguamiento
    - Amortiguador viscoso

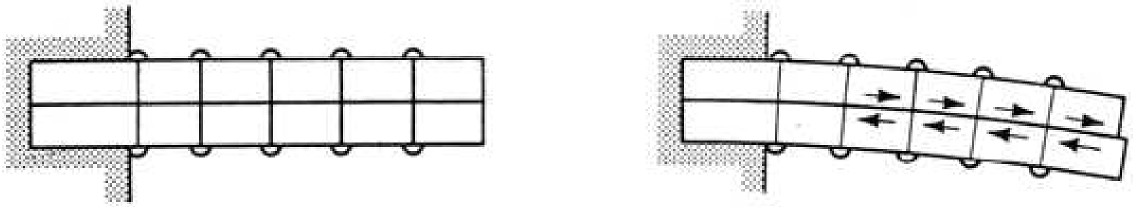


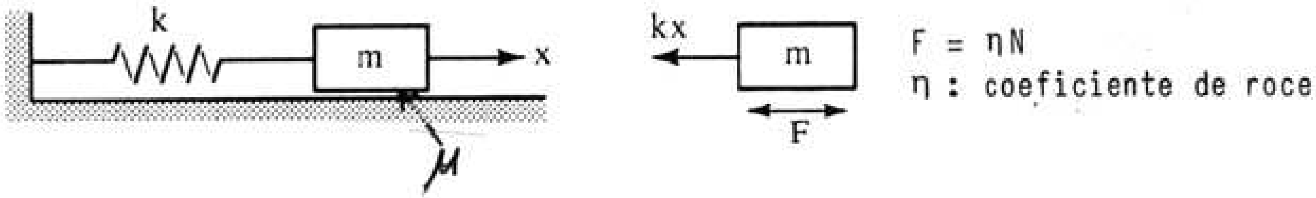



# Resumen clase anterior

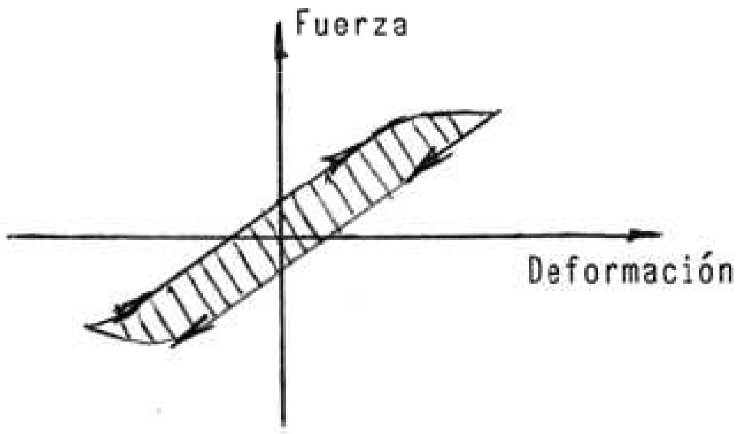
- Sistemas de un grado de libertad:
  - Amortiguamiento
    - Rozamientos como el que ocurre al deslizar un elemento sobre otro (Coulomb).





# Resumen clase anterior

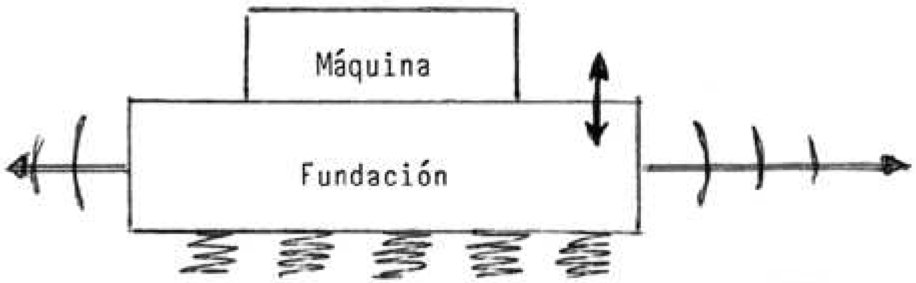
- Sistemas de un grado de libertad:
  - Amortiguamiento
    - Fricción interna en el material o amortiguamiento estructural o histérico




La energía por ciclo de vibración es proporcional al área del ciclo de histéresis.
$\eta$: factor de pérdida o constante de amortiguamiento estructural.

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Amortiguamiento
    - Por radiación: por propagación de ondas en un medio infinito




Pérdida de energía por propagación de ondas al ∞.

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Amortiguamiento
    - Amortiguador viscoso equivalente a utilizar en el modelo ideal

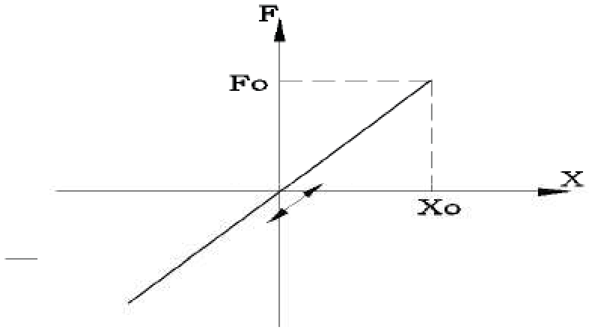
$$U_d = \int F_d dx = \int_0^{2\pi/\Omega} c\dot{x}\,\frac{dx}{dt}dt = \int c\dot{x}^2\,dt$$

$$\boxed{U_d = c\int_0^{2\pi/\Omega} \Omega^2\,X^2\cos^2\Omega t\,dt = \pi c\Omega X^2}$$

$$\underbrace{\pi C_{eq}\Omega X_0^{\ 2}}_{\text{Energía disipada por el amortiguador viscoso}} = \underbrace{Ud}_{\text{Energía real disipada por ciclo}}$$

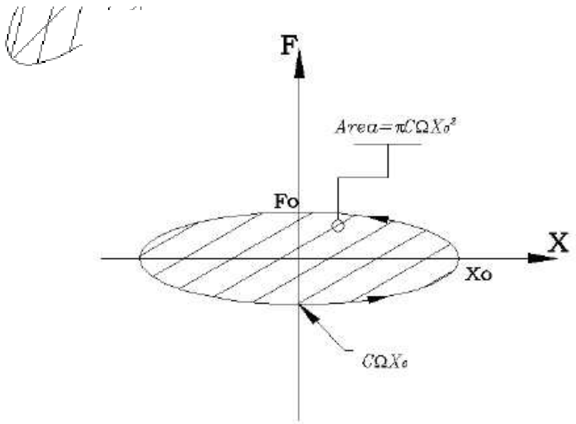
# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Amortiguamiento
    - Energía disipada por ciclo en un material viscoelástico (resorte ideal + amortiguador viscoso)




$$F = k\,x$$

Resorte ideal (sin disipación de 'eja energía en un ciclo de oscilación




$$x(b) = X_0 \operatorname{sen}(\Omega t - \phi)$$

$$\dot{x}(t) = X_0 \Omega \cos(\Omega t - \phi)$$

$$= \pm X_0 \Omega \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\Omega t - \phi)}$$

$$= \pm \Omega \sqrt{X_0{}^2 - x^2}$$

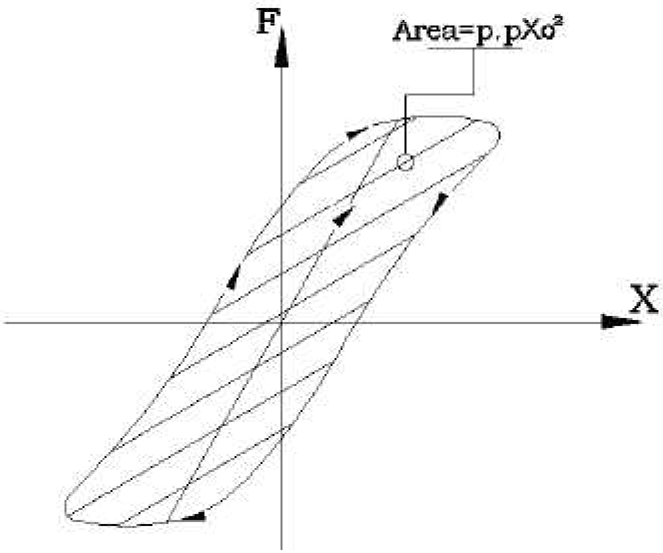
$$Fd = \pm c\Omega \sqrt{X_0{}^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Fd}{c\Omega X_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{X_0}\right)^2 = 1$$

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Amortiguamiento
    - Amortiguamiento histérico, sólido o estructural

$$U_d = \pi \cdot k \cdot \eta \cdot (X_0)^2$$




Similar al caso anterior,( ecuación (1a)), la fuerza elasto-disipativa se puede expresar por una rigidez compleja:

$$k^* = k(1 + j\eta)$$

$$\eta = \textit{factor de pérdida o constante de amortiguamiento histérico}$$

$\eta$

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Amortiguamiento
    - Amortiguamiento histérico, sólido o estructural

$$\pi C_{eq} \Omega X_0^2 = \pi k \eta X_0^2$$

$$C_{eq} = k \, \eta / \Omega$$

para factores de pérdida $\eta < 0{,}2$ (como es en la mayoría de los casos prácticos), es similar al comportamiento del sistema con amortiguamiento viscoso

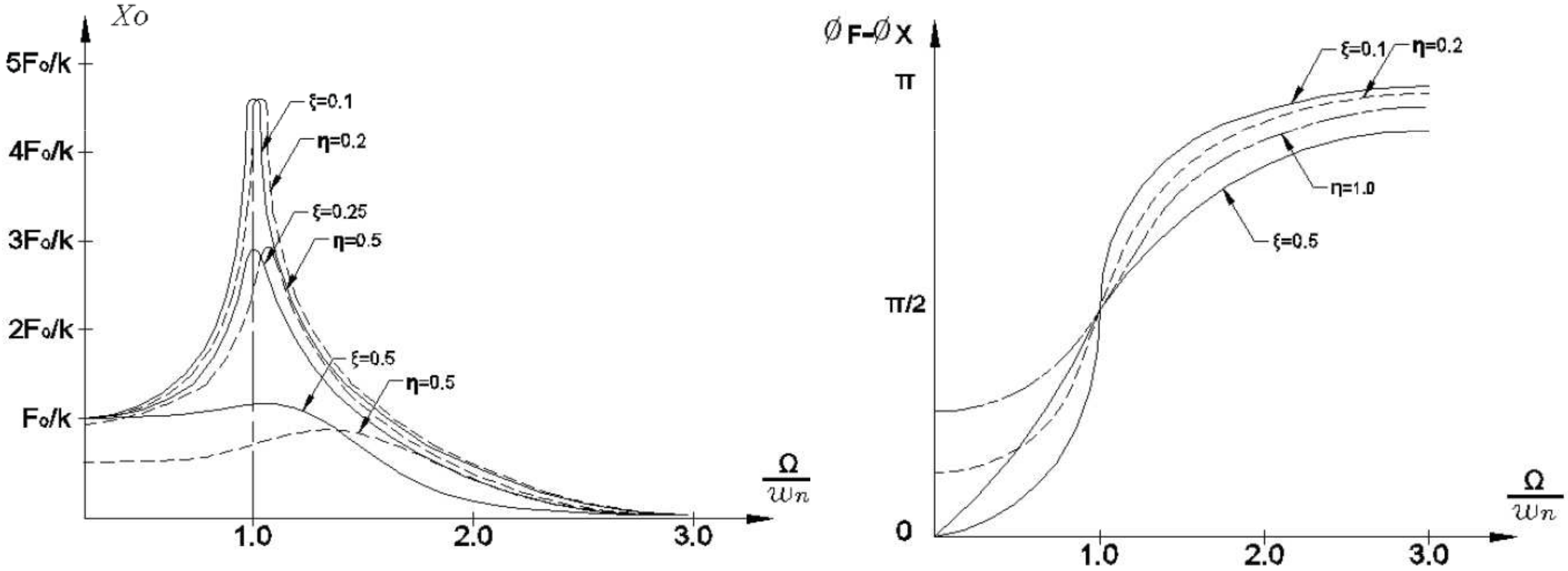
$$\xi = \eta / 2$$

$$C_{eq} = k \, \eta / \Omega$$

| Material | $\eta$ |
|---|---|
| Aluminio puro | $2 \times 10^{-5} - 2 \times 10^{-3}$ |
| Acero | 0,001 – 0,008 |
| Plomo | 0,008 – 0,014 |
| Fundición de fierro | 0,003 – 0,03 |
| Goma natural | 0,1 – 0,3 |
| Goma dura | ≈ 1,0 |
| Vidrio | 0,0006 – 0,002 |
| Concreto | 0,01 – 0,06 |

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Amortiguamiento
    - Amortiguamiento histérico, sólido o estructural



# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Amortiguamiento
    - Amortiguamiento histérico, sólido o estructural

| | Amortiguamiento viscoso | Amortiguamiento estructural |
|---|---|---|
| Ecuaciones del movimiento | $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 sen\Omega t$ | $m\ddot{x} + k(1+\eta j)x = F_0 sen\Omega t$ |
| Solución estacionaria | $x = X_0 \mathrm{sen}(\Omega t - \phi)$ <br> $X_0 = \dfrac{F_0/k}{\sqrt{\left[1-\left(\Omega/\omega_n\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \Omega/\omega_n\right]^2}}$ | $x = X_0 sen(\Omega t - \phi)$ <br> $X_0 = \dfrac{F_0/k}{\sqrt{\left[1-\left(\Omega/\omega_n\right)^2\right]^2 + \eta^2}}$ |
| Energía disipada por ciclo | $U_d = \pi c \Omega X_0^2$ | $U_d = \eta \pi k X_0^2$ <br> $\rightarrow c_{eq} = \dfrac{k\eta}{\Omega}$ |

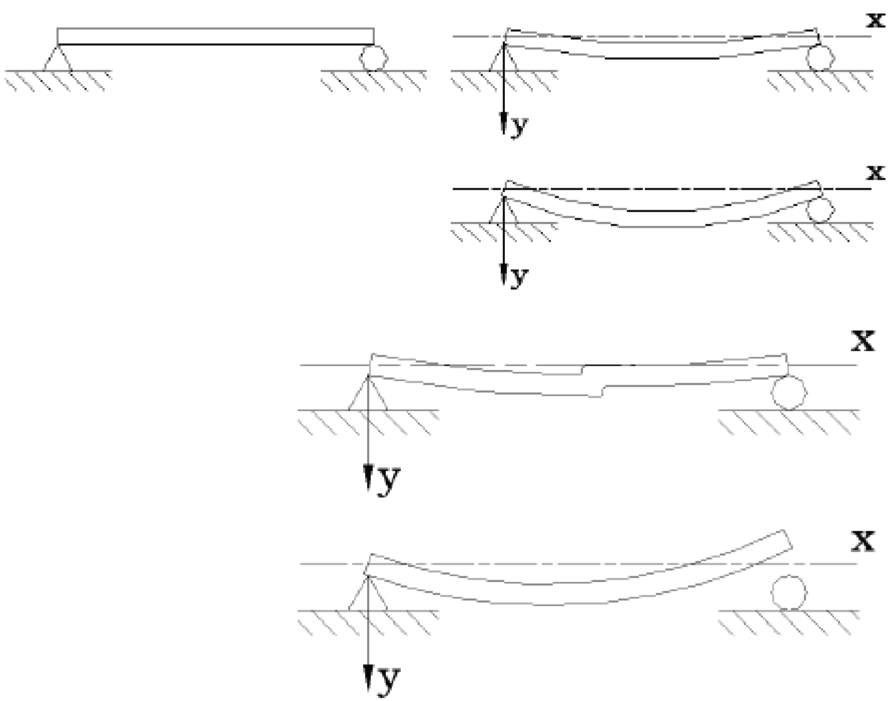
# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Amortiguamiento
    - Amortiguamiento histérico, sólido o estructural

| Frecuencia natural | Decrece al aumentar $c$ | Independiente del valor de $\eta$ |
|---|---|---|
| Desplazamiento estático | $X_{st} = F_0 / k$ | $X_{st} = \dfrac{F_0}{k\sqrt{1+\eta^2}}$ |
| Amplitud resonante | $X_{0\,\text{máx}} = \dfrac{F_0/k}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ <br> $para\ \Omega = \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n$ | $X_{0\,\text{máx}} = \dfrac{F_0}{k\eta}$ <br> $(independiente\ de\ la\ masa)$ <br> $para\ \Omega = \omega_n$ |
| Desfase $\phi_X - \phi_F = \phi$ | $tg\phi = \dfrac{-\eta}{1-\left(\Omega/\omega_n\right)^2}$ | $tg\phi = \dfrac{-2\xi\,\Omega/\omega_n}{1-\left(\Omega/\omega_n\right)^2}$ |

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Sistemas con masa y elasticidad repartidas a lo largo del cuerpo, donde se puede suponer una forma de deformación al vibrar




$$Y(x) = Y_0 sen \frac{\pi x}{l}$$

$$Y(x) = Y_0 \left( \frac{x}{l} \right) \left( \frac{x}{l} - 1 \right)$$

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Sistemas con masa y elasticidad repartidas a lo largo del cuerpo, donde se puede suponer una forma de deformación al vibrar

Conocida la deformación máxima de la viga, Y(x), la forma de ella en cualquier tiempo *t*, y(x,t) será determinada por:

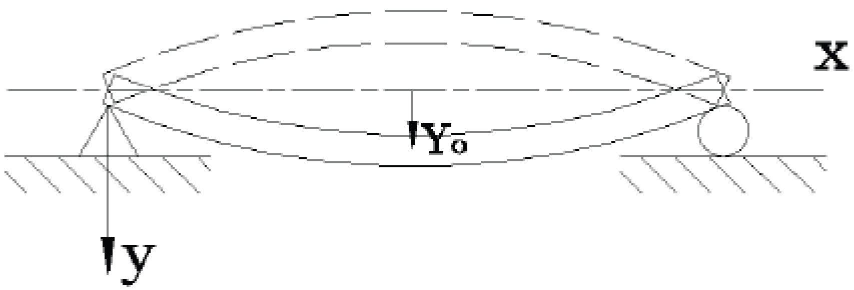
$$y(x,t) = Y(x) \cdot v(t)$$

*v(t)*= función llamada desplazamiento generalizado, que es la variable a determinar, pues se asume conocida Y(x)

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Sistemas con masa y elasticidad repartidas a lo largo del cuerpo, donde se puede suponer una forma de deformación al vibrar: Método de Rayleigh

$E_c máx$ (en su posición de equilibrio)= $E_p máx$ (posición de máxima deformación)




$$Y(x) = Y_0 sen\frac{\pi x}{l} \quad ,\text{Deformación máxima}$$

$$y(x,t) = Y(x) sen\,\omega_1 t \quad ,\text{Deformación en cualquier } t$$

$$\dot{y} = Y(x)\omega_1 cos\,\omega_1 t$$

$$E_c máx = \frac{1}{2}\int \dot{y}máx\, dm$$

$$= \frac{\omega_1^2}{2}\int_0^l Y^2(x)\frac{m}{l}dx$$

$$E_p máx = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx$$

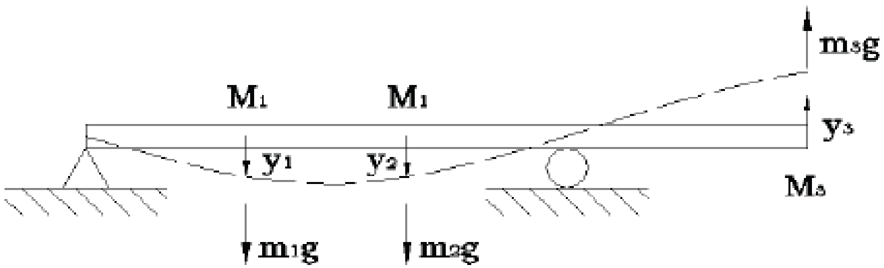
$$E_c máx = E_p máx$$

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^l Y^2(x)\frac{m}{l}dx} = \frac{\pi^4 EI}{ml^3} = \frac{97{,}4\, EI}{ml^3}$$

Para otra curva la frecuencia determinada será siempre mayor que la verdadera

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Sistemas con masa y elasticidad repartidas a lo largo del cuerpo, donde se puede suponer una forma de deformación al vibrar: Método de Rayleigh a vigas con masas concentradas




$E_c máx$ (en su posición de equilibrio)$=E_p máx$ (posición de máxima deformación)

$$E_c \text{máx} = \frac{1}{2}\omega_1^2(M_1y_1^2 + M_2y_2^2 + M_3y_3^2)$$

$$E_p \text{máx} = \frac{1}{2}g(M_1y_1 + M_2y_2 + M_3y_3)$$

$$\omega_1^2 = \frac{g\sum M_iy_i}{\sum M_iy_i^2} \qquad (1\text{-}15)$$

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Vibraciones forzadas por movimiento de la base

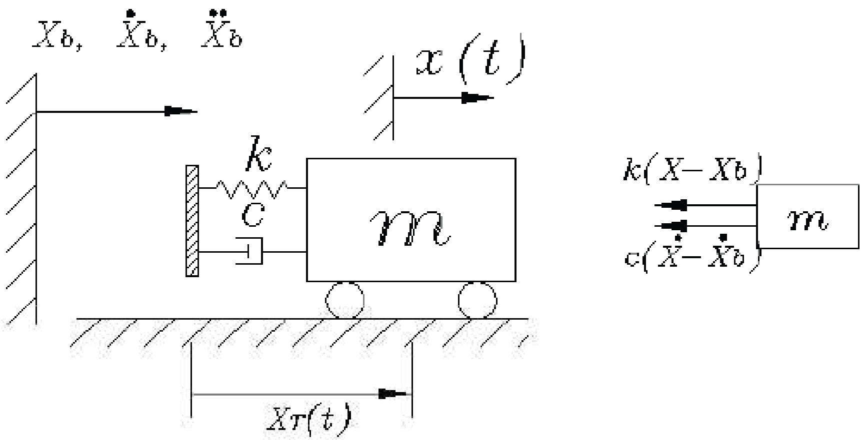



Figura 1.36. Coordenadas absolutas del movimiento

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_b) + k(x - x_b) = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{x}_b + kx_b = f^*(t)$$

$$si: \quad x_b = X_b sen\Omega t \quad ; \quad \dot{x}_b = \Omega X_b cos\Omega t$$

$$\to f^*(t) = c\Omega X_b cos\Omega t + kX_b sen\Omega t = X_b\sqrt{c^2\Omega^2 + k^2}\, sen\left(\Omega t + \phi_f\right) = F_0^*\, sen\left(\Omega t + \phi_f\right)$$

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Vibraciones forzadas por movimiento de la base

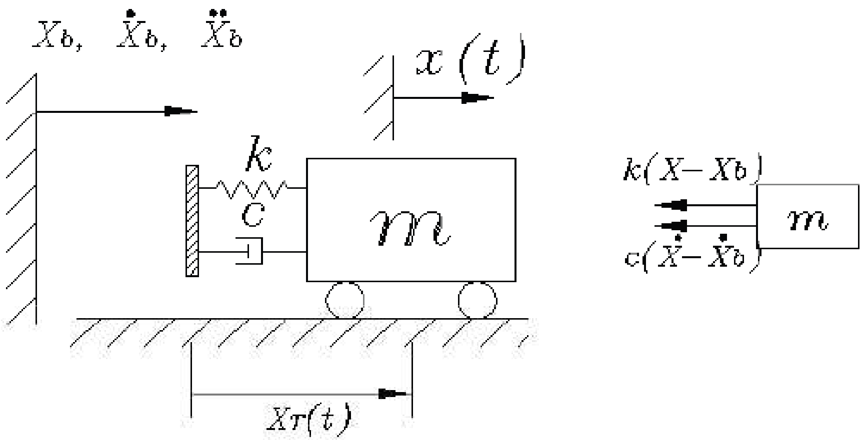



Figura 1.36. Coordenadas absolutas del movimiento

$$X_0 = \frac{X_b\sqrt{c^2\Omega^2 + k^2}\big/k}{\sqrt{\left[1-\left(\Omega/\omega_n\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\Omega/\omega_n\right]^2}} = X_b\sqrt{\frac{1+\left(2\xi\Omega/\omega_n\right)^2}{\left[1-\left(\Omega/\omega_n\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\Omega/\omega_n\right]^2}}$$

$x_r(t)$

# Resumen clase anterior

;

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Vibraciones forzadas por movimiento de la base: Ecuaciones del movimiento en función del desplazamiento relativo xr(t)

$$x(t) = x_b(t) + x_r(t)$$

$$m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r = -m\ddot{x}_b = p_{eff}(t)$$

$p_{eff}(t)$ : representa la carga efectiva debido a la excitación de los apoyos.

• Las normas de severidad vibratoria en máquinas y personas limitan el valor de la aceleración absoluta a(t) con el objeto de limitar las fuerzas de inercia.

• Sin embargo, para determinar los esfuerzos en los elementos elásticos es necesario determinar el desplazamiento relativo, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

•Para determinar el desplazamiento relativo se pueden seguir dos caminos:

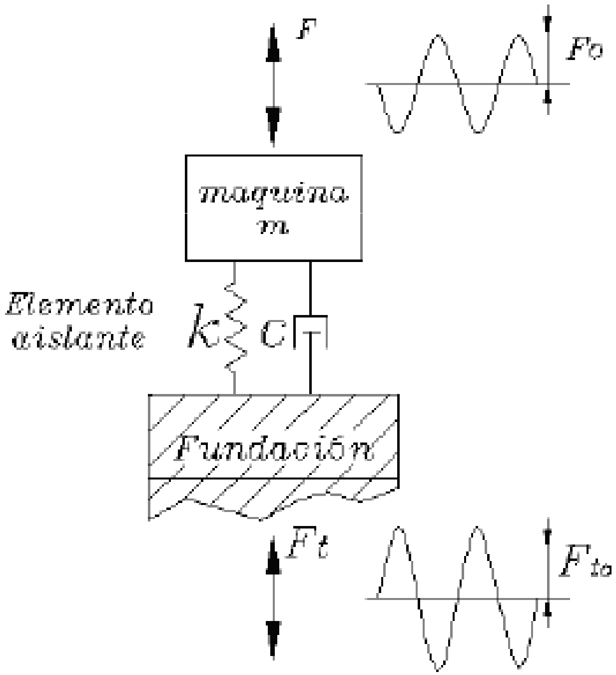
Calcular el desplazamiento absoluto y luego: x_r (t)=x(t)+x_b (t)

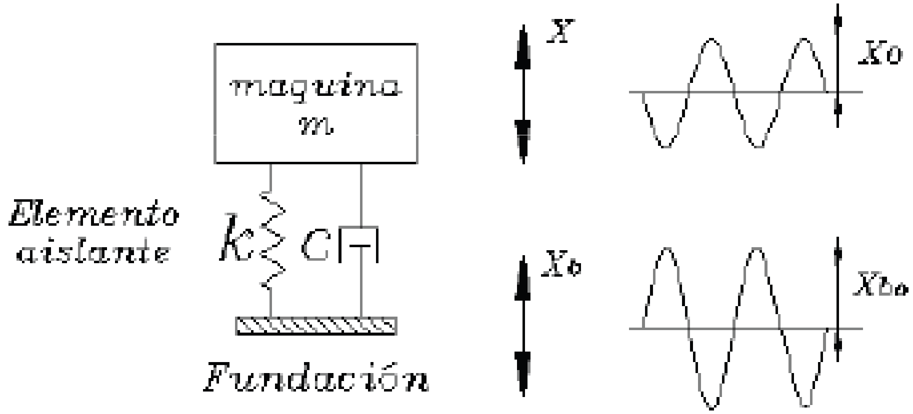
Calcular x_r (t) de la ecuación anterior directamente.

Este último método es más corto y útil

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - AISLAMIENTO DE VIBRACIONES



# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - AISLAMIENTO DE VIBRACIONES:
    - Reducción de la magnitud de la fuerza transmitida de una máquina a su base

$F_t$= fuerza transmitida a la base por el elemento elástico.

$$F = F_0 sen\Omega t$$

$$\vec{F}_t = c\dot{\vec{x}} + k\vec{x} = X_0\left[ksen(\Omega t - \phi) + c\Omega\cos(\Omega t - \phi)\right]$$

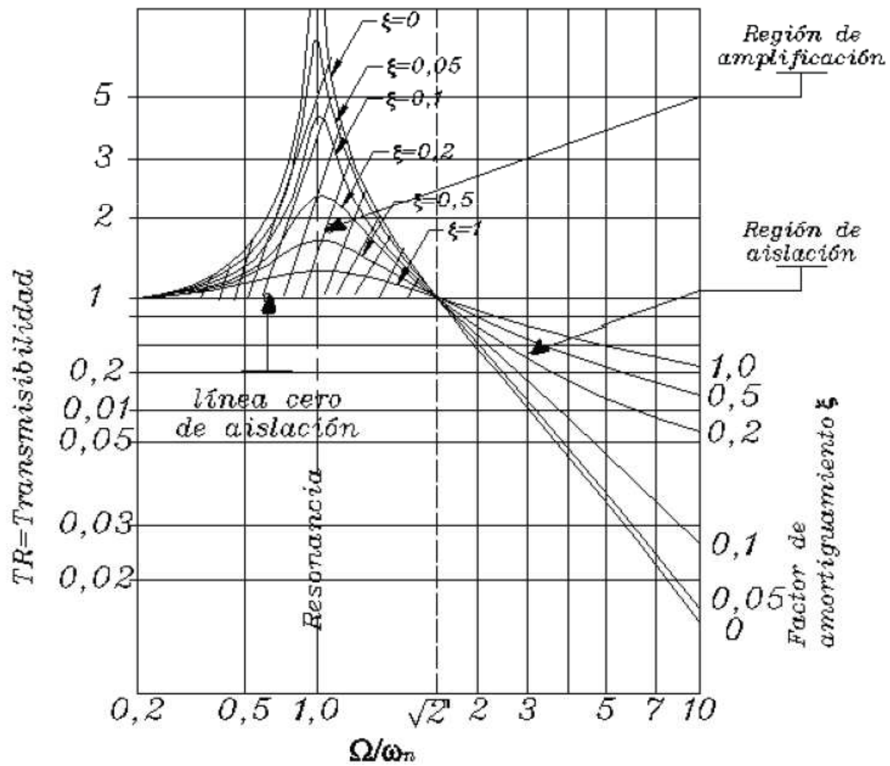
$$F_{t0} = \left|\vec{F}_t\right| = X_0\sqrt{k^2 + c^2\Omega^2} = kX_0\sqrt{1 + \left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

TR = Amplitud fuerza transmitida/ amplitud fuerza generada = $F_{t0}/F_0$

$$TR = F_{t0}/Fo = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - AISLAMIENTO DE VIBRACIONES:
    - Reducción de la magnitud de la fuerza transmitida de una máquina a su base

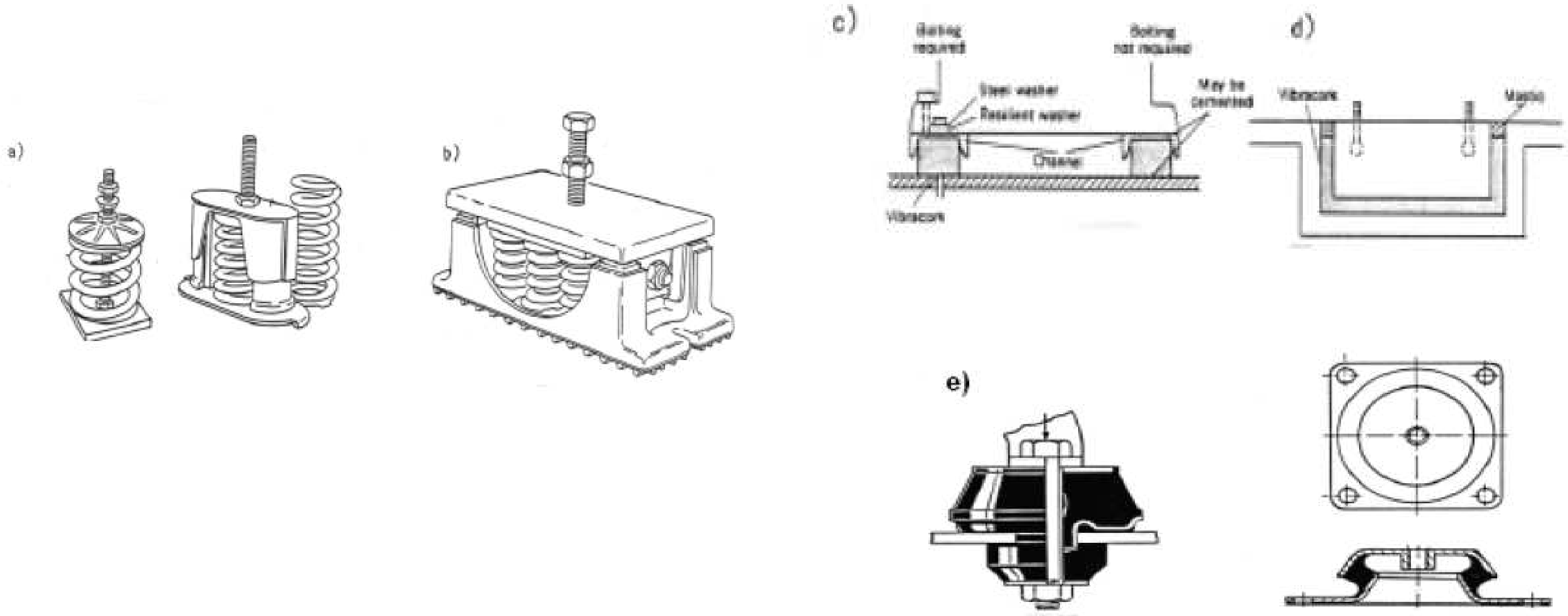


# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - Reducción de la magnitud de la fuerza transmitida de una máquina a su base
    - El aislamiento de vibraciones sólo se produce para $\Omega/wn > \sqrt{2}$. Para valores menores de este cuociente se produce una amplificación de la fuerza transmitida
    - Un elemento elástico sin amortiguamiento es más efectivo que uno con amortiguamiento. Sin embargo, debe tenerse presente que una máquina que pase lentamente a través de la resonancia requiere de algún grado de amortiguamiento.
    - A mayor $\Omega/wn$, menor es la transmisibilidad, y mejor es el aislamiento. Se podría pensar entonces para aumentar este cuociente disminuir disminuyendo significativamente *k*. Esto sin embargo, está limitado por el desplazamiento estático

# Resumen clase anterior

- Sistemas de un grado de libertad:
  - AISLAMIENTO DE VIBRACIONES:
    - Reducción de la magnitud de la fuerza transmitida de una máquina a su base



# VIBRACIONES MECÁNICAS

## (ME4701)

## Sistemas con un grado de libertad

| | |
|---|---|
| Teoría: | Lunes y Viernes 8:30 – 10:00 (SEM. ME) |
| Práctica: | Miercoles 16:15 – 17:45 (SEM. ME) |
| Profesor: | Dr MSc Ing Eduardo Salamanca H. |
| Correo: | eduardosalamanca99@gmail.com |
| Blog: | http://blogs.shen-re.cl/esh/ |

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE