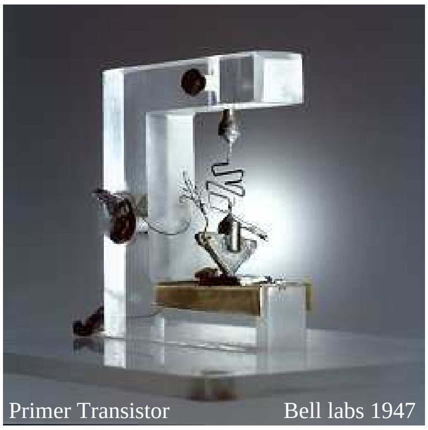
ME55A

Fundamentos de Control de Sistemas



R. H. Hernández Pellicer
Depto. Ing. Mecánica ∫ Universidad de Chile

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El control automático es el mecanismo de base a través del cual, los sistemas, sean mecánicos, eléctricos o biológicos, pueden matener un determinado equilibrio y así una determinada condición de trabajo (homeostasis).

Entre los ejemplos cotidianos tenemos el caso de la regulación de la temperatura del cuerpo humano [1], así como la regulación de la cantidad de luz que ingresa a la retina y que es controlada por la pupila.

Otro caso es el sistema de control de velocidad de un automóvil. Este usa la diferencia (o error) entre la velocidad actual y aquella deseada, para decidir variar el flujo de combustible al motor y así lograr que el vehículo se desplace a la velocidad deseada (o set-point).

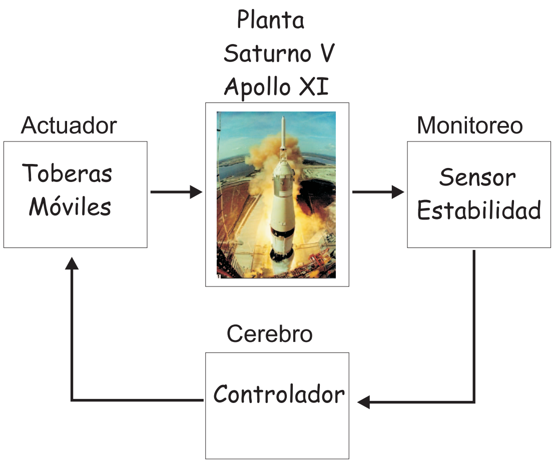


Figura 1.1: *Cohete Saturno V, Misión Apollo XI. Sistema de control de actitud del cohete.*

[1] Wiener publica su libro Cybernetics: Control and communication in the animal and the machine, 1948

1.1. Reseña histórica

En terminos históricos, el interés por el control automático se remonta, al menos, hasta los griegos y árabes de la antiguedad, entre el 300 A.C. hasta el 1200 D.C. [7]. La gran motivación para usar el control automático en la antiguedad, fue la necesidad de determinar de manera precisa el tiempo. Es así como en 270 A.C., el griego Ktesibios inventa un regulador por flotador para un reloj de agua (Fig. 1.2). Pero también los griegos utilizaron el control automático en la vida cotidiana, como es el caso del dosificador de vino de Heros (Fig. 1.2).

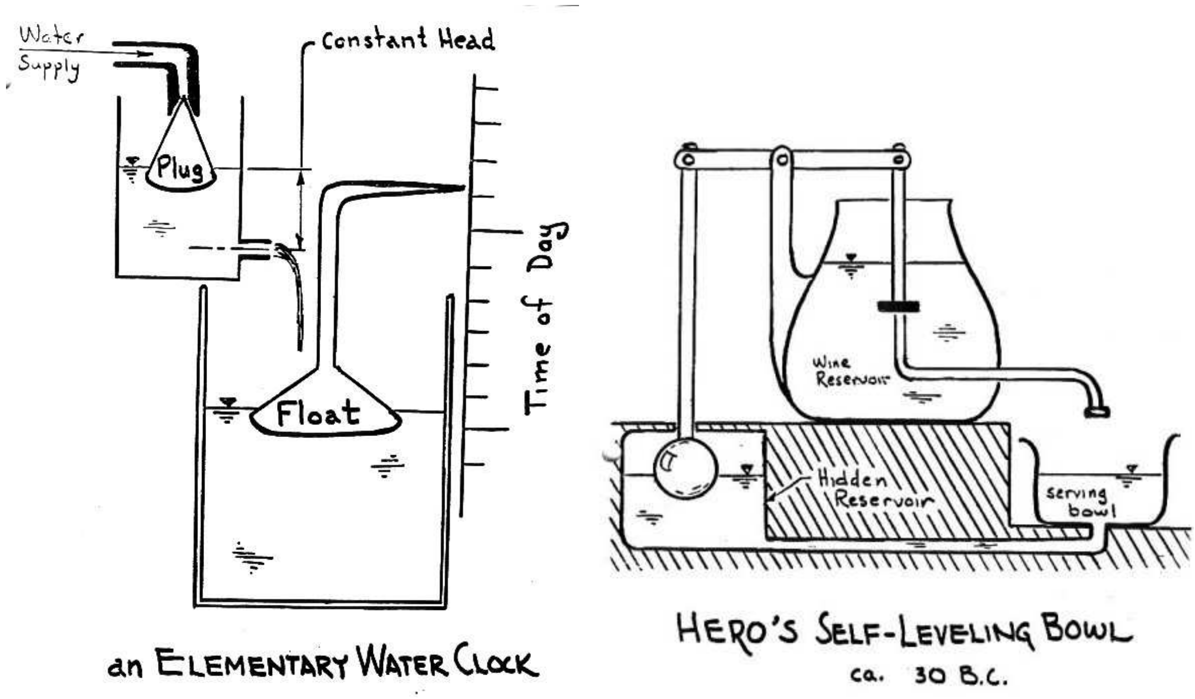


Figura 1.2: *Reloj de agua de Ktesibios, 270 a.c. (izq). Dosificador de vino de Heros 30 a.c. (der)*

También hay evidencia de que ingenieros arabes, entre el 800 al 1200 D.C., usaron reguladores por flotador también para relojes de agua y otras aplicaciones. (dosificador de vino de Heros). En este período, se inventó el principio del control ON/OFF, que fue re-estudiado intensamente a partir del año 1950. Posteriormente, los reguladores por flotador o también por flujo másico, aparecen nuevamente con la Revolución Industrial en el Siglo XVI que comienza con la invención del motor a vapor de J. Watt (1769) y su control de presión de vapor (Fig. 1.3).
El control automático ha jugado un rol vital en el avance de la ingeniería y la ciencia a través de su uso en diversos campos de aplicación a través de los años.
Los REGULADORES DE TEMPERATURA aparecen alrededor del año 1600 con el trabajo de Cornelis Drebbel, donde desarrolla un sistema de control automático de temperatura para un horno. Lo aplica

también a la incubación de pollos.
Los REGULADORES POR FLOTADOR reaparecen en Inglaterra en el año 1700.
Los REGULADORES DE PRESIÓN ya aparecen asociados a los motores a vapor, y en 1681 D. Papin inventa una válvula de seguridad para mantener la presión de vapor constante en la caldera del motor.
J. Watt introduce el REGULADOR CENTRÍFUGO para motor a vapor en 1788, con el objeto de regular la velocidad de rotación del motor a vapor.

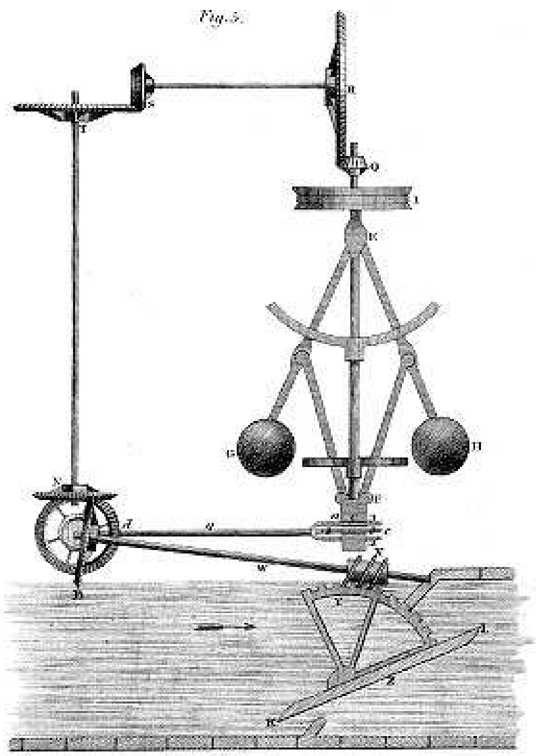


Figura 1.3: *Control de velocidad de J. Watt para su màquina de vapor, 1788*

Otro impacto significativo del control automático fue demostrado en el período pre y post II guerra mundial, con el desarrollo de la cohetería auto–guíada. Gran parte de estos desarrollos fueron basados en la estabilización que otorga el Giróscopo, inventado en 1910, por E.A. Sperry.
En el período post-guerra su campo de aplicaciones aumenta increíblemente, como en el desarrollo de vehículos espaciales, guía de misiles, sistemas complejos de piloteo de aviones y llegando actualmente a ser parte importante e integral de procesos modernos de manufactura.
El control automático es también esencial en procesos industriales, donde es necesario controlar variables *medibles* como la presión, temperatura, humedad, viscosidad, y flujos, sin dejar de lado el ensamblaje de piezas mecánicas en industrias manufactureras (vehículos u otras).

El hecho importante es que el control, visto desde esta perspectiva, provee mecanismos eficaces para obtener un comportamiento óptimo en sistemas dinámicos, mejorar la calidad y reducir los costos de producción así como reducir el tiempo de obra en procesos rutinarios.

El término *control* es un concepto bastante común. Hay que notar que es una ocurrencia natural, un principio de la naturaleza, como por ejemplo en el sistema de regulación de presión sanguíneo, concentración de azúcar en la sangre, diámetro de la pupila del ojo etc.

Otros trabajos significativos en las primeras etapas de la teoría de control son debidos a Minorsky, Hazen y sobre todo Harry Nyquist. Minorsky (1922) trabajó en controladores automáticos demostrando como podemos analizar la estabilidad de un sistema dinámico a través de las ecuaciones diferenciales que lo describen.

H. Nyquist (1932) desarrolló un procedimiento astuto para determinar la estabilidad de sistemas con loops–cerrados, basado en la respuesta de loops–abiertos frente a estímulos sinusoidales o estacionarios ($d/dt = 0$).

Durante la década de los 40, aparecen los métodos de respuesta en frecuencia que permiten diseñar sistemas de control con retro–alimentación lineales. Entre 1940 y comienzos de 1950 se desarrolla exitósamente el método del Lugar Geométrico de las Raíces (Root-Locus).

Ambos métodos, el corazón de la teoría clásica de control, permiten el estudio detallado de sistemas estables que satisfacen un conjunto más o menos arbitrario de condiciones de funcionamiento. A partir de 1950, se comienza a migrar desde la perspectiva del problema del diseño de las estrategias de control de un sistema dado hacia las del diseño de un sistema óptimo.

Las plantas de procesos modernas, contemplan muchos *inputs y outputs* cada vez más complejos. Esto conduce a la descripción del sistema a través de un gran número de ecuaciones diferenciales. La teoría clásica, que trata con inputs/outputs singulares pierde entonces utilidad frente a sistemas multi input/output.

Esta necesidad se hace sentir y es a partir de 1960, que se comienza a desarrollar la teoría moderna de control.Y es gracias a la aparición de computadores digitales (y análogos) que ella toma fuerza en el diseño de sistemas de control más complejos.

Los desarrollos más recientes en la teoría moderna de control automático, van en la búsqueda del control óptimo, ya sea de sistemas deterministas o estocásticos asi como en búsqueda del control adaptativo (redes neuronales) de sistemas ultra complejos [1, 2, 3, 4, 5, 6].

1.2. Algunas definiciones

Definimos algunos términos necesarios en este curso

Sistema

Combinación de componentes que actúan juntos y desarrollan una cierta tarea. Un sistema no está limitado a aquellos de índole física. El concepto de sistema puede ser aplicado a fenómenos abstractos y dinámicos, como en economía.

Perturbaciones

Una perturbación (disturbance en Inglés) es una señal que tiende a afectar el comportamiento de un sistema (su output o salida). Podemos tener perturbaciones internas, generadas al interior del sistema, o externas que son consideradas como un input.

Control con retroalimentación

Es una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre el output de un sistema y un valor prefijado (set-point en Inglés). Aquí las perturbaciones son sólo aquellas no predecibles (aleatorias) ya que aquellas predecibles pueden ser compensadas al interior del sistema.

Servo-mecanismo

Un servo-mecanismo es un sistema de control con retro-alimentación (Feedback en Inglés) en el cual el output es por ejemplo una posición determinada, una velocidad o una aceleración. Los servos son actualmente ampliamente utilizados en la industria.

Control de lazo cerrado

En un sistema de control de loop–cerrado la señal de salida tiene un efecto directo sobre la acción de control. Esto quiere decir simplemente que es un sistema de control con retro-alimentación. La figura 1.4 muestra un sistema de lazo-cerrado o closed loop, a través de un *diagrama de bloque*. Es el tipo de controlador que define si el sistema será automático o no.

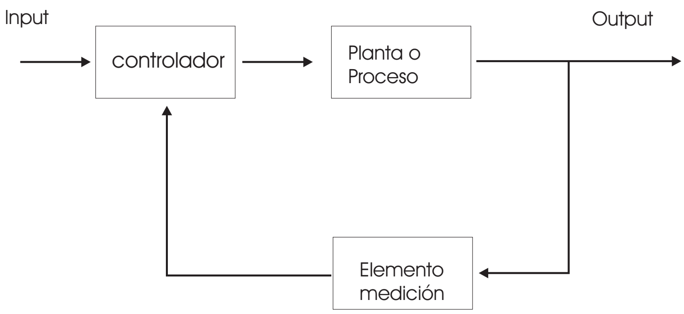


Figura 1.4: *Sistema de control de lazo-cerrado*

Control de loop–abierto

Son simplemente sistemas donde la señal de salida no tiene ningún efecto sobre la acción de control. No hay medición de esta señal, ni retro–alimentación, ni por ende comparación con la señal de entrada (input).(cf. Figure 1.4).

Control directo/indirecto

Para obtener buenos resultados del proceso de control es deseable medir y controlar directamente la variable que indica el estado del sistema o la calidad del producto o proceso. Si no es posible, habrá que controlar una variable secundaria relacionada a la variable de estado principal. Sin embargo, frecuentemente, esta operación no es tan eficiente como la primera.

Control adaptativo

Las características dinámicas de la mayoría de los sistemas de control no son constantes en el tiempo. Las razones son típicamente el deterioro de componentes y los cambios en las variables ambientales. Aunque pequeños cambios del sistema en el tiempo pueden ser fácilmente compensados con la retro–alimentación, los cambios significativos no. por ello se busca un sistema de control que se adapte a los cambios. Esto significa auto–ajuste o auto–modificación en concordancia con los cambios inpredecibles en las condiciones ambientales y estructura del sistema. Esto obliga a identificar constantemente las características dinámicas del sistema, de manera que se pueda ajustar los parámetros de control constantemente.

Control con aprendizaje

Típicamente un sistema de control de lazo-abierto puede ser convertido en loop–cerrado si se usa un controlador humano, quién compara las señales de entrada y salida y hace cambios correctivos basados en el error o diferencia entre éstas.
Aquí no podemos escribir ecuaciones que describan esta situación, dado que existe la dificultad de expresar matemáticamente el aprendizaje del operador humano. Las redes neuronales, un operador no humano capaz de aprender y así controlar eficientemente un proceso, constituyen avances modernos sobre la teoría de sistemas de control actual.
Como hemos dicho, el control con retro–alimentación es un caso especial. Esta clase está caracterizada por el hecho que ciertas variables del sistema están siendo controladas, como puede ser la temperatura de, la velocidad o la presión medidas por algún sensor. Esta información es re–inyectada o retro–alimentada en el sistema para influenciar a su vez el output del sitema.
Este principio se entiende bien en el caso de un sistema de calefacción controlado por un termostato. En la figura 1.5 se indica el *diagrama de bloque* del sistema.

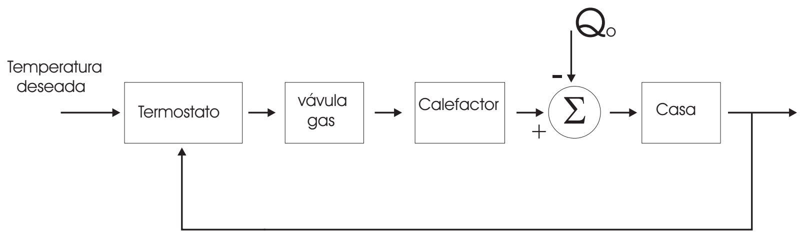


Figura 1.5: *Diagrama de Bloque del Sistema de Control de Temperatura*

Supongamos que la temperatura al interior de la casa (medida por el termostato) y aquella al exterior están por debajo de la temperatura deseada. El termostato se enciende, transmitiendo potencia a la válvula del horno (a gas), que hace que empiece la combustión al interior de éste, el soplador comienza a funcionar y un flujo de calor se establece al interior de la casa. Si el calefactor está bien diseñado, el flujo de calor Q_i es mucho mayor que las pérdidas Q_o y la temperatura de la casa aumenta, hasta que excede, por una pequeña diferencia, el valor prefijado en el termostato. Aquí el calefactor se apaga y la temperatura comienza a caer, tendiendo a la temperatura del exterior. Cuando ésta cae por debajo del valor prefijado en el termostato, el proceso comienza nuevamente.En este proceso los componentes necesarios para que exista retro-alimentación se pueden identificar en la figura 1.6.

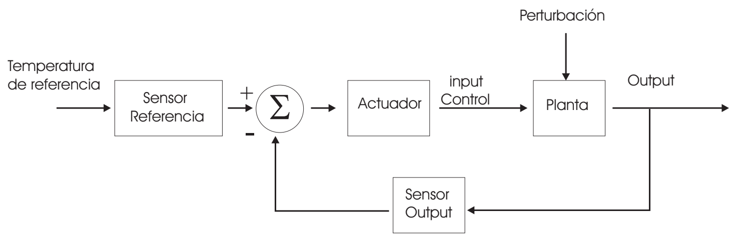


Figura 1.6: *Diagrama de Bloque del Sistema de Control Retro–alimentado*

Aqui el componente central es la *planta* (nombre genérico del objeto a controlar) o piezas de la casa, cuyas variables van a ser controladas. La señal de salida o de output es la temperatura de esta pieza, y las señales perturbativas (perturbaciones) corresponden al flujo de calor por conducción a través de las paredes de la pieza hacia el exterior (eventualmente convección y radiación).

El *actuador* es el mecanismo que modifica el proceso; el calefactor. El termostato está dividido (Figuras 1.5, 1.6) en tres elementos: La *referencia*, los *sensores de salida* y el*comparador*(símbolo Σ). El control se hace por comparación de dos señales medidas: temperatura de la pieza y temperatura prefijada (set–point).

Otro ejemplo que data desde la antiguedad. Un mecanismo de control de nivel de agua en un estanque. En la figura 1.7, si el nivel baja, el flujo de agua se incrementa, el nivel sube y el flotador logra obstruir el paso de agua. Aquí el sensor y actuador están combinados en un sólo elemento: el

flotador, de forma particular.
Otro ejemplo es el incubador de pollos de Drebbel (1620) donde el astuto sensor de temperatura es un recipiente de vidrio lleno de alcohol y mercurio en contacto con el recipiente de agua del incubador. Al aumentar la temperatura del agua el alcohol se expande elevando un flotador que cierra el escape de gases de combustion y disminuyendo el tiraje y por lo tanto la temperatura del agua y del incubador. Si el agua se enfría demasiado el alcohol se contrae y el flotador baja, abriendo el escape aumentando así la combustión.

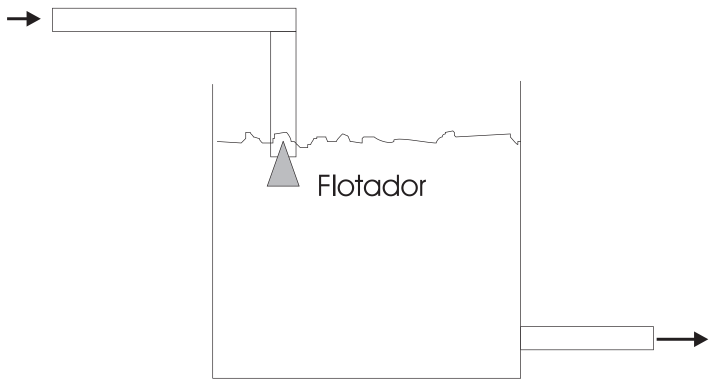


Figura 1.7: *Sistema de control de nivel de agua*

Un ejemplo más interesante aún es el uso del sistema de control de velocidad de la máquina a vapor de Watt por G.B.Airy en su telescopio. Airy (1835) necesitaba controlar la velocidad del telescopio para observar una estrella en régimen estacionario, es decir compensando la rotación de la tierra. Sin embargo el sistema, según propias palabras de Airy, se volvía completamente loco. Esta es la primera discusión sobre inestabilidad de un sistema de control con retro–alimentación conocido.
No olvidemos que el principal objetivo de este curso sera proveer una introducción a las técnicas y métodos mas importantes par el diseño de control de sistemas. Comenzaremos con algunos ejemplos de diagramas de bloque de sistemas a controlar en la sección que sigue y luego pasaremos a la Parte II, donde estudiaremos las técnicas modernas de tratamiento de señales, absolutamente necesarias para comprender los modelos matemáticos actuales en el diseño propiamente y los fundamentos del control de sistemas.

1.3. Diagramas de bloque

Control de nivel de líquido

En la figura 1.8 a) se aprecia esquemáticamente un diagrama del sistema de control de nivel de líquido de un estanque.

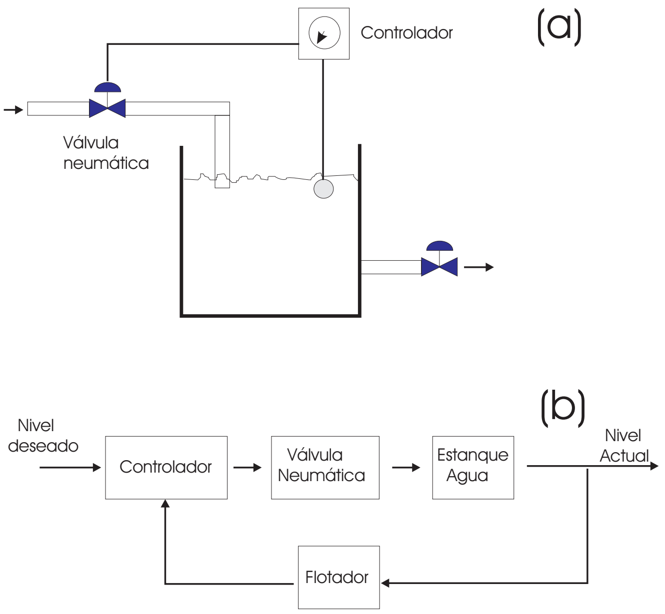


Figura 1.8: *Sistema de control de nivel de agua*

Aquí el controlador automático mantiene el nivel de líquido al comparar el nivel actual con un nivel deseado (set–point) y corrigiendo el error al ajustar la abertura de una válvula neumática. El diagrama de bloque correspondiente es el presentado en la figura1.8 b). Aquí el controlador es un operario humano.

Problemas propuestos

1. Dibuje el diagrama de bloque con retro–alimentación para el sistema de conducción automático de un automóvil. Considere, tanto el trayecto como la velocidad, inputs predefinidos o de referencia. Identifique las partes separadas,en el diagrama de bloque, de la planta, actuadores (servos) y sensores.

2. Identifique y dibuje el diagrama de bloque de un estanque con control de nivel como el de la figura 1.7.

3. Dibuje el diagrama retro–alimentado de un ascensor con control de posición. como podría Ud. medir la posición del ascensor ?.

Capítulo 2

Métodos y Técnicas de Tratamiento de Señales

2.1. Distribuciones

Dentro de las herramientas matemáticas útiles que veremos en este curso, se encuentra la llamada función δ de Dirac [1]. Esta función, que Dirac llamaba *función impropia*, posee propiedades bien interesantes e inusuales. Actualmente este tipo de funciones se denominan *Distribuciones* porque no son funciones matemáticas bien definidas, es decir, no poseen un valor definido en cada punto de su dominio de existencia. Sin embargo, cuando la δ aparece como un *factor* en el integrando de una integral, ésta última sí tiene un valor definido. Vamos a introducir una herramienta de base denominada distribución. En particular hablaremos de la distribución de Dirac.

Antes de eso, para tener una idea de la δ, considere una función de una variable real x que es nula en todos lados salvo en un pequeño dominio de ancho ϵ alrededor del origen $x = x_0$, donde vale $1/\epsilon$. La integral de esta función en ese dominio es unitaria, es decir, $\int_\epsilon D_\epsilon(x)dx = 1$. La forma exacta de esta función no tiene interés, salvo que debe ser de orden ϵ^{-1} para que todo esto tenga sentido y ello permite encontrar una familia de funciones que al tomar el límite $\epsilon \to 0$ convergen a la $\delta(x)$ [2]. El objeto más simple es una función cuadrada, es decir, un rectángulo angosto y alto de ancho ϵ y altura ϵ^{-1} centrado en x_0, definido como:

$$D_\epsilon(x - x_0) = \begin{cases} \epsilon^{-1}, & \text{si } |x - x_0| \leq \frac{1}{2}\epsilon \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

El área bajo la curva $D_\epsilon(x - x_0)$ es efectivamente unitaria.

[1] Paul Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, 4 Ed. Clarendon Press, 1958

[2] http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html

Consideremos ahora una función $F(x)$ e integremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} F(x)D_\epsilon(x-x_0)dx &= \frac{1}{\epsilon}\int_{x_0-\epsilon/2}^{x_0+\epsilon/2} F(x)dx \\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_{x_0-\epsilon/2}^{x_0+\epsilon/2} F(x_0)dx + \frac{1}{\epsilon}\int_{x_0-\epsilon/2}^{x_0+\epsilon/2} F'(x_0)(x-x_0)dx \\
&+ \frac{1}{2\epsilon}\int_{x_0-\epsilon/2}^{x_0+\epsilon/2} F''(x_0)(x-x_0)^2dx + \ldots \\
&= F(x_0) + \frac{\epsilon^2}{24}F''(x_0) + \ldots
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Aquí hemos desarrollado en serie de Taylor la función $F(x)$ alrededor de x_0, i.e,

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots$$

Donde los términos impares en $(x-x_0)$ se anulan.

Si tomamos el límite $\epsilon \to 0$, que corresponde a transformar $D_\epsilon(x) \to \delta(x)$, obtenemos que la integral anterior es simplemente $F(x_0)$, es decir, la integral adopta el valor de la función $F(x)$ en la posición de la delta de Dirac. Entonces,

$$\delta(x-x_0) = \lim_{\epsilon\to 0} D_\epsilon(x-x_0)$$

Con lo cual tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\delta(x-x_0)dx = F(x_0)$$

2.1.1. Definición

Sea T una distribución. A toda distribución ϕ, T asocia el número $T(\phi)$, que escribiremos como $\langle T,\phi\rangle$, el cuál posee las propiedades sgtes:

$$T(\phi_1+\phi_2) = T(\phi_1)+T(\phi_2) \tag{2.2}$$

$$T(\lambda\,\phi) = \lambda\,T(\phi) \tag{2.3}$$

$$\langle T_1+T_2,\phi\rangle = \langle T_1,\phi\rangle + \langle T_2,\phi\rangle \tag{2.4}$$

$$\langle \lambda T,\phi\rangle = \lambda\langle T,\phi\rangle \tag{2.5}$$

El número $\langle T,\phi\rangle$ se denomina *producto escalar* de T con ϕ. Si T fuese una función, entonces:

$$\langle T,\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} T^*(t)\cdot\phi(t)\,dt$$

Paul Dirac introdujo la *Distribución de Dirac* que se define:

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$$

La ditribución de Dirac en un punto dado del eje de las abscisas a, está definida por:

$$\langle \delta_{(a)}, \phi \rangle = \phi(a)$$

Una manera de interpretar físicamente la distribución de Dirac, es imaginar una particula puntual de masa m en una caja de volumen V asociandole una función delta a la densidad, $\rho = \delta(\mathbf{x})$, y luego calcular la masa total del sistema como $\int \rho d\mathbf{x} = m$

2.1.2. Función δ de Dirac

Aquí veremos algunas propiedades simpàticas de la función $\delta(x)$ de Dirac. Evidentemente su dominio de existencia puede ser cualquiera, distancias x, tiempos t, frecuencias ν etc.

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta(x) = 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \\ \delta(x) = \infty & \text{si } x = 0 \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1 & x \in [-\infty, \infty] \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, la función de Dirac se puede definir matemáticamente tomando el límite de una familia de funciones. Esta aproximación hace aparecer la función de Dirac como una impulsión breve. Existen muchas familias, $D(x)$, de funciones que convergen hacia esta función :

- Una función de duración w y amplitud $1/w$ cuando $w \to 0$
- Un triágulo de duración $2w$ y amplitud $1/w$ cuando $w \to 0$
- Un seno cardinal, normalizado: $\frac{1}{w} sinc(\pi t/w) = \frac{1}{\pi t} \sin(\pi t/w)$ cuando $w \to 0$
- Una Gaussiana normalizada $\frac{1}{\pi^{1/2} t} e^{-t^2/w^2}$ cuando $w \to 0$
- y muchas otras .. (http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html)

2.1.3. Propiedades de la Función de Dirac

La función $\delta(t)$ tiene las propiedades sgtes:

$$\delta(t) = 0 \, t \neq 0 \tag{2.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \tag{2.7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\, dt = f(0) \tag{2.8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\, dt = f(t_0) \tag{2.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\delta(t-\theta)\, d\theta = f * \delta = f(t) \tag{2.10}$$

De la última relación se desprende que la distribución de Dirac es el elemento neutro del producto de Convolución. Ella posee además otras propiedades interesantes, como el corrimiento de la función original,

$$f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0) \qquad \text{Shift}$$

Y también la llamada *localización*,

$$\text{localización} \begin{cases} f(t)\cdot\delta(t) & = f(0)\delta(t) \\ \\ f(t)\cdot\delta(t-t_0) & = f(t_0)\delta(t-t_0) \end{cases}$$

El producto de varias funciones δ se puede calcular de la forma:

$$\delta(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2) = \delta(t_2-t_1) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t_2 \neq t_1 \\ \delta(t-t_1) = \delta(t-t_2) & \text{si} \quad t_2 = t_1 \end{cases}$$

Supongamos que tenemos una función $y(t)$. Si escribimos $z(t) = y(t_0)$, $z(t)$ vale $y(t_0)$ para todo valor de t (cf. Figura 2.1). Pero, utilizando las propiedades de la δ: $z(t) = y(t)\delta(t-t_0)$ *valdrá simbólicamente* $y(t_0)$ para $t = t_0$ y 0 en el resto del eje. Esto nos permite formalizar el valor de $y(t)$ en el instante $t = t_0$. Tengamos bien en cuenta este procedimiento, porque lo utilizaremos en la sección de Teoría del Muestreo de Señales.

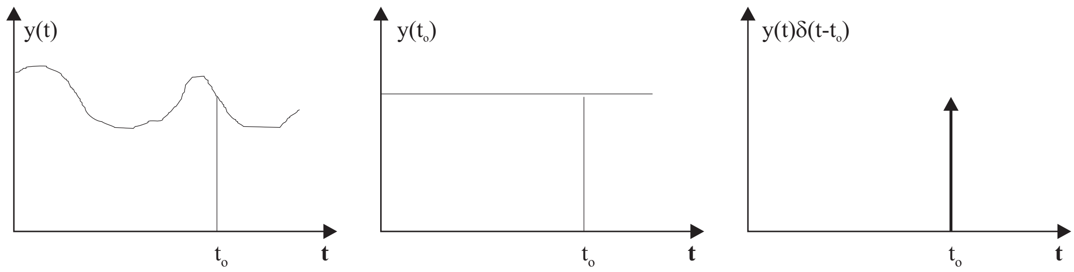


Figura 2.1: *Como extraer el valor de una función a un instante dado con la distribución de Dirac*

Otras propiedades

Se sugiere que trate de demostrar las propiedades sgtes:

$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{2.11}$$

$$x\delta(x) = 0 \tag{2.12}$$

$$\delta(ax) = \delta(x)/|a| \tag{2.13}$$

$$\delta(x^2 - b^2) = \{\delta(x-b) + \delta(x+b)\}/2|b| \tag{2.14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))\, dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|} \tag{2.15}$$

La última propiedad o identidad es válida si $g(x)$ tiene una sola raíz o zero en x_0. Su pendiente $g'(x) = dg(x)/dx$ debe ser distinta de zero en x_0. Cerca de x_0 la función $g(x)$ se comporta como $(x - x_0)g'(x_0)$ (Expansión de Taylor). Por otro lado, si $g(x)$ tine N zeros (simples) en $x = x_i$, donde $g(x) \sim g'(x_i)(x - x_i)$ con pendientes distintas de zero, entonces se cumple que:

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$$

2.1.4. Peine de Dirac

Un peine de Dirac es, como su nombre lo indica, una serie infinita de funciones de Dirac regularmente espaciadas. Si T_0 es el intervalo entre dos Diracs sucesivos, T_0 es el período del peine.

$$\delta_{T_0}^{\uparrow\uparrow\uparrow}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\,T_0)$$

Consideremos $x_0(t)$ y lo convolucionamos con el peine:

$$x_0(t) * \delta_{T_0}^{\uparrow\uparrow\uparrow}(t) = x_0(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\,T_0) \tag{2.16}$$

$$x_0 * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\,T_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0 * \delta(t - k\,T_0) \tag{2.17}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(\theta)\delta(t - k\,T_0 - \theta)\,d\theta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(t - k\,T_0) \tag{2.18}$$

Esto indica que podemos obtener una función periódica a partir de valores discretos de la función original. Este teorema es fácila de demostrar. Sólo hay que recurrir a las propiedades de la δ y a la definición de producto de Convolución, que puede generalizarse:

$$(G * R)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x')R(x')\,dx'$$

Interprételo como el producto acumulativo de dos funciones, donde una desliza sobre la otra.

Problemas

Este problema clarifica la representación de la delta de Dirac en tres dimensiones y en coordenadas cilíndricas.

Considere la identidad en Coordenadas Cartesianas:

$$\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d^3r' = 1 \tag{2.19}$$

En una dimension : $\int \delta(x - x')dx' = 1$ y $d^3r' = dx'dy'dz'$. Así, la ecuación 2.19 se satisface si:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$$

Se *desea* encontrar esta misma equivalencia en Coordenadas Esféricas:
En coordenadas esféricas, $d^3r' = r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'$. Como $\int \delta(r - r')dr' = 1$ y $\int \delta(\theta - \theta')d\theta' = 1$, la ecuación 2.19 es válida si:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{r'^2 \sin\theta'}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')$$

Entonces las ecuación 2.19, se transforma en coordenadas esféricas en:

$$\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^3r' = \int r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi' \frac{1}{r'^2 \sin\theta'}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')$$

$$\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^3r' = \int_0^\infty \delta(r-r')dr' \int_0^\pi \delta(\theta-\theta')d\theta' \int_0^{2\pi} \delta(\phi-\phi')d\phi$$

$$\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^3r' = 1$$

Este próximo problema le ayudará a acordarse de los cambios de escala. Para demostrar la propiedad de cambio de escala usando la delta de Dirac, escribimos:

$$\int_{-L}^{+L} f(x)\delta(ax)dx = \frac{1}{a}\int_{-aL}^{+aL} f(y/a)\delta(y)dy = \frac{f(0)}{a}$$

Resuelva los siguientes problemas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\delta(x^2-a^2)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\delta(\sin(x))\,dx$$

Representación simbólica

Para aclarar aún más el rol de estas funciones, vamos a recurrir a los diagramas de la figura 2.2.

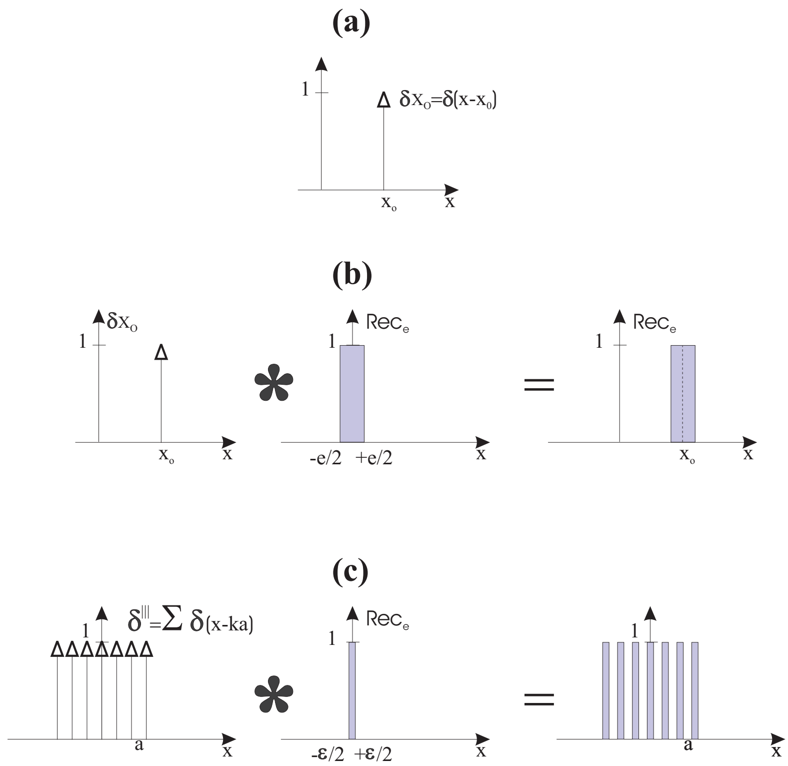


Figura 2.2: *Representación simbólica de: (a) La función δ, y del efecto de la convolución entre: (b) La δ con una función cuadrada y (c) El peine y la función cuadrada*

2.2. Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo

Estos sistemas son muy útiles como transformadores de señales. Pueden actuar sobre señales análogas o digitales (numéricas)

2.2.1. Definición

Consideremos un sistema sometido a una señal de entrada (input) $x(t)$. El sistema entregará como salida (output) una señal $y(t)$. El sistema será LINEAL si la relación entre las señales de entrada y salida constituye un sistema de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes. De forma equivalente, el sistema será LINEAL si cumple simultáneamente las propiedades de : Aditividad y Homogeneidad.

Homogeneidad Si al input $x(t)$ le corresponde un output $y(t)$, entonces al input $\alpha x(t)$ le corresponde un output $\alpha y(t)$, donde α es una constante.

Aditividad Si a dos inputs $x_1(t)$ y $x_2(t)$ le corresponden dos outputs $y_1(t)$ y $y_2(t)$ respectivamente, entonces al input $x_1(t) + x_2(t)$ le corresponderá el output $y_1(t) + y_2(t)$.

De esta manera el sistema será lineal si:

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \tag{2.20}$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \tag{2.21}$$

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \longrightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \tag{2.22}$$

Ahora bien, el sistema es INVARIANTE EN EL TIEMPO si se cumple que: Si se efectúa un corrimiento en el tiempo de duración θ en la señal de entrada, obtendremos un corrimiento del mismo valor en la señal de salida.

$$\text{Input} \qquad \text{Output} \tag{2.23}$$

$$x(t) \longrightarrow y(t) \tag{2.24}$$

$$x(t-\theta) \longrightarrow y(t-\theta) \tag{2.25}$$

Así, si un sistema es lineal e invariante en el tiempo, tendremos las siguientes correspondencias:

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \tag{2.26}$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \tag{2.27}$$

$$\alpha_1 x_1(t-\theta_1) + \alpha_2 x_2(t-\theta_2) \longrightarrow \alpha_1 y_1(t-\theta_1) + \alpha_2 y_2(t-\theta_2) \tag{2.28}$$

2.2.2. Respuesta Impulsional

La función respuesta impulsional $h(t)$ nos resuelve la pregunta sgte: Si tenemos un sistema desconocido, como podemos conocer la salida $y(t)$ correspondiente a una entrada cualquiera $x(t)$?. Supongamos que la entrada es una delta de Dirac $\delta(t)$, la salida correspondiente $h(t)$ se denomina *respuesta impulsional o a la impulsión*

$$\delta(t) \longrightarrow h(t) \tag{2.29}$$

$$\delta(t-\theta) \longrightarrow h(t-\theta) \tag{2.30}$$

$$x(\theta)\delta(t-\theta) \longrightarrow x(\theta)h(t-\theta) \tag{2.31}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)\delta(t-\theta)\, d\theta \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)h(t-\theta)\, d\theta \tag{2.32}$$

Pero como una de las propiedades de la distribución de Dirac es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)\delta(t-\theta)\, d\theta = x(t)$$

obtenemos que la salida correspondiente a $x(t)$ será:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)h(t-\theta)\, d\theta$$

Es por eso que es importante conocer la respuesta impulsiva o impulsional $h(t)$ de un sistema. Para toda entrada $x(t)$, la salida $y(t)$ será *la convolución de la señal de entrada con la función de respuesta impulsional.*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)h(t-\theta)\, d\theta \tag{2.33}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)x(t-\theta)\, d\theta \tag{2.34}$$

Nota: Si inyectamos al sistema una señal de dimensión D, obtenemos a la salida una señal de dimensión D (ej. señal eléctrica de voltaje, v). Por lo tanto la respuesta impulsional h tiene la dimensión del inverso de un tiempo s^{-1}.

2.2.3. Funciones propias

Consideremos una entrada $x_f(t) = Ae^{2\pi jft}$, donde A y f son constantes:

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_f(t-\theta)h(\theta)d\theta \tag{2.35}$$

$$y_f(t) = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi jf(t-\theta)}h(\theta)d\theta \quad (2.36)$$

$$y_f(t) = Ae^{2\pi jft}\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)e^{-2\pi jf\theta}d\theta \quad (2.37)$$

$$y_f(t) = x_f(t)H(f) \quad (2.38)$$

Donde $H(f)$ es un coeficiente tal que:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)e^{-2\pi jf\theta}d\theta$$

Vemos que la exponencial compleja es una función *propia* de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

2.3. Función de Transferencia

2.3.1. Definición

Como hemos visto una función $x(t)$ puede descomponerse naturalmente en una base de funciones propias, gracias a que el sistema es lineal e invariante en el tiempo. La descomposición de la señal en una base de exponenciales complejas, no es otra cosa que la Transformación de Fourier, que veremos más adelante.
Así, la función $H(f)$, que se escribe:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)e^{-2\pi jf\theta}d\theta$$

corresponde a la transformada de Fourier de la respuesta impulsional $h(t)$. También se le denomina Ganancia compleja o Función de Transferencia. Notar que aquí la dimensión de la función de transferencia es 0, por lo tanto podemos representarla en *decibeles* (su módulo, $|H(f)|$).

2.3.2. Medición de la Función de Transferencia

En el método temporal, aplicamos una impulsión de Dirac a la entrada y medimos la respuesta impulsional a la salida. El método armónico nos entrega la ganancia compleja. Existe otro método, denominado estocático, donde la entrada es una señal de tipo aleatoria con una cierta densidad espectral de potencia (Ej. ruido blanco, Gausiano, etc.).

Principio del método armónico

Consideramos un sistema lineal, invariante en el tiempo, o equivalentemente, regido por ecuaciones integro–diferenciales a coeficientes constantes A una señal de entrada $A\cos 2\pi ft$ le corresponde una

señal $B\cos(2\pi ft - \phi)$. La razón B/A, que es una función de f, es la Ganancia de la Función de Transferencia; el ángulo de fase ϕ se denomina desfase.
Este resultado se puede encontrar simplemente si consideramos como señal de entrada $Ae^{2\pi jft}$. Así, en la salida tendremos $Be^{2\pi jft-\phi}$. Si hacemos la razón salida/entrada,

$$\frac{Be^{2\pi jft-\phi}}{Ae^{2\pi jft}} = \frac{B}{A}e^{-j\phi}$$

Claramente el módulo de esta función, B/A, es la *ganancia* y ϕ el *desfase*. Entonces bastaría medir para cada frecuencia, la razón de amplitudes (cresta–cresta) y el desfase, para tener punto por punto la Función de Transferencia del sistema en estudio.

Nociones Adicionales de Función de Transferencia

Aquí veremos la forma de la función de transferencia utilizando únicamente los diagramas de bloque de la figura 2.3.

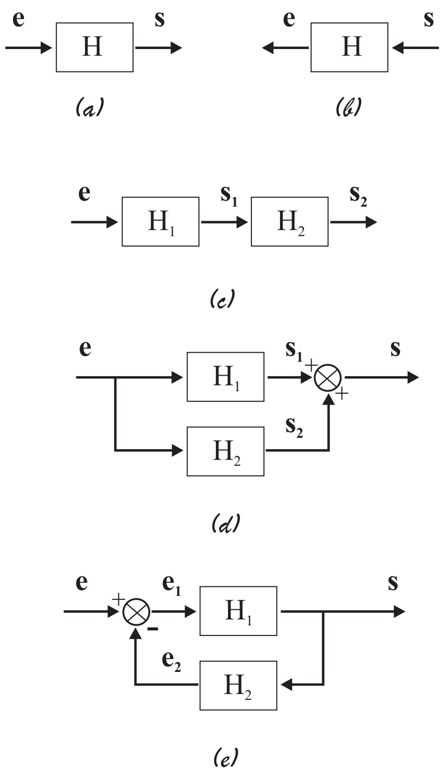


Figura 2.3: *Diagramas de bloque mostrando propiedades de Funciones de Transferencia*

Consideremos el sistema H (Figura 2.3 a) con una entrada e que provoca una salida s. Es evidente que la relación entre entrada y salida puede escribirse como $H \cdot e = s$ o mejor,

$$H = \frac{s}{e}$$

Donde H es la función de transferencia del sistema, así como vimos anteriormente.
Entre las propiedades importantes de esta función de transferencia está la denominada **irreversibilidad**. Los diagramas de la figura 2.3 nos ayudaran.
La figura 2.3 a), indica que:

$$s = H \cdot e$$

pero si cambiamos el sentido de las flechas, como en la figura 2.3 b), tendremos que $e = H_1 \cdot s$ y por lo tanto,

$$s = \frac{1}{H_1} \cdot e \Rightarrow H = \frac{1}{H_1}$$

con lo cual concluímos que hay que precisar el sentido de las flechas sobre el diagrama de bloque: Un sentido de flecha corresponde a una función de transferencia dada.

Consideremos una función de transferencia en **série**, como aparece en la figura 2.3 c). Tenemos que $H_1 \cdot e = s_1$ y s_1 es la entrada de H_2, entonces reemplazando s_1 por su valor anterior:

$$s_2 = H_2 \cdot H_1 e$$

Donde la función de transferencia global es $H = H_2 \cdot H_1$ y además (demostrar en casa) $H = H_2 \cdot H_1 = H_1 \cdot H_2$ (conmutatividad).

Ahora consideremos una función de transferencia en **paralelo**. Aquí se pueden distinguir dos casos que se aprecian en las figuras 2.3 d), e):

1. En la figura 2.3 d) tenemos que

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 \\ s &= H_1 e + H_2 e \\ s &= (H_1 + H_2) e \\ H &= H_1 + H_2 \end{aligned}$$

2. En la figura 2.3 e) tenemos que

$$\begin{aligned} s &= H_1 e \\ e_1 &= e - e_2 \\ e_2 &= H_2 \cdot s \quad \Rightarrow \\ s &= H_1 \left[e - H_2 s\right] \\ &\rightarrow s\left[1 + H_1 H_2\right] = H_1 e \\ \frac{s}{e} &= H = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} \\ H &= \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} \end{aligned} \tag{2.39}$$

si en el sumador hubiésemos tenido dos signos + en lugar de un signo + y uno −, entonces la función de transferencia global hubiese sido:

$$H = \frac{H_1}{1 - H_1 H_2}$$

Un ejemplo de laboratorio

En la figura 2.4 se aprecia el montaje experimental para medición de vorticidad usando una técnica de scattering de ondas ultrasonoras. El emisor (Emetteur) envía una onda plana de frecuencia ν_o que interactúa con un *blanco* fluido o sólido. Esta es re–enviada en todo el espacio por el *blanco* y es medida por el receptor acústico (Récepteur)

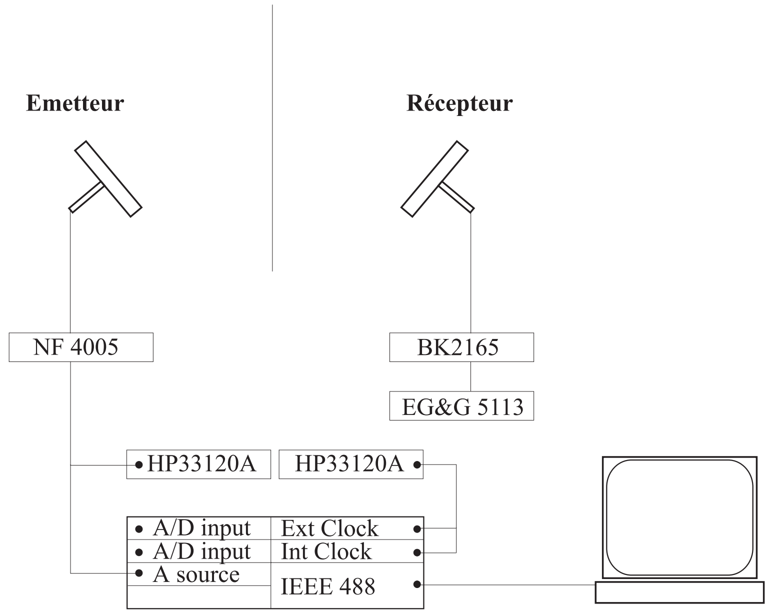


Figura 2.4: *Esquema experimental de medición con transductores acústicos*

Para poder medir en forma confiable, es necesario caracterizar el sistema emisor–receptor usando la técnica del Método Armónico que vimos anteriormente. Ambos transductores se colocan frente a frente, creando una cavidad acústica. Efectuamos un BARRIDO en frecuencia ν_o con el emisor y registramos con el receptor esas ondas; tanto su amplitud como su fase. Como es una cavidad, esta debe resonar cada vez que L es un múltiplo de $\lambda/2$ (longitud de onda acústica).

Una onda sonora acústica lineal, posee una relación de dispersión lineal, es decir, relación entre frecuencia y longitud de onda del tipo:

$$\begin{aligned} \omega(k) &= ck \\ \nu &= c/\lambda \end{aligned} \tag{2.40}$$

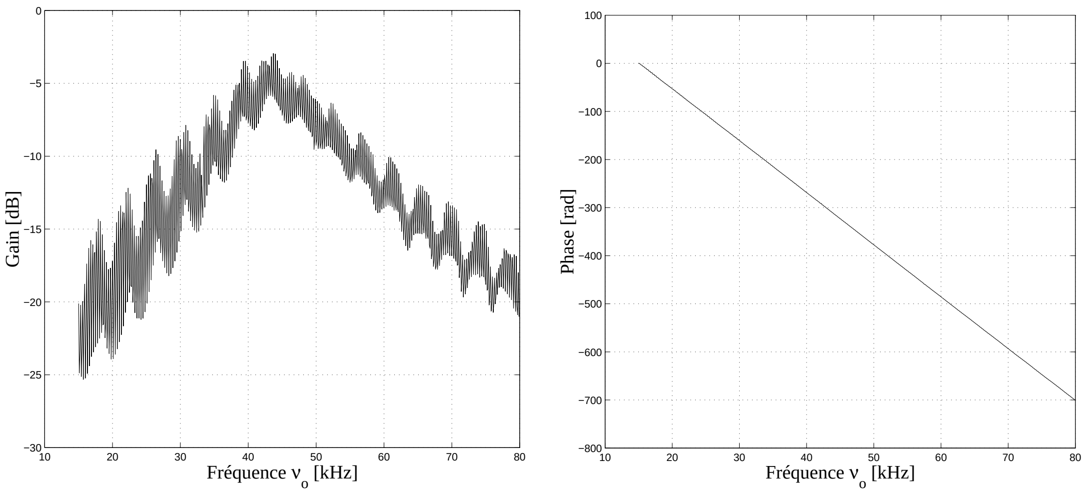
Así, si $\nu = c/\lambda$, y $n\lambda/2 = L$, entonces $d\nu = cdn/2L$. Con lo cual si $dn = 1$, $d\nu = c/2L$.

Esto explica las oscilaciones rápidas en amplitud de la respuesta en frecuencia (Figura 2.5 a), que corresponden a reflexiones múltiples en las caras de los transductores. La distancia entre máximos sucesivos es $\delta\nu = c/2L$.
En cambio, la fase del sistema (Figura 2.5 b) evoluciona linealmente, dado el número creciente de longitudes de onda λ que se encuentran en la cavidad. La pendiente de la curva de fase nos entrega la velocidad del sonido en la cavidad, c. En el receptor la fase está dada por $\phi = 2\pi\nu t$, donde $t = L/c$ y entonces se obtiene experimentalmente el valor de la velocidad del sonido, $c = 337{,}2 \pm 2{,}9$ m/s.
Para ello simplemente escribimos la fase ϕ como: $\phi = 2\pi t\nu$ con $t = L/c$. Derivamos con respecto a la frecuencia y encontramos que:

$$\frac{d\phi}{d\nu} = 2\pi(L/c)$$

Con lo cual podemos calcular la velocidad del sonido c, de la forma:

$$c = \frac{2\pi L}{d\phi/d\nu}$$



(a) **(b)**

Figura 2.5: *Curvas de respuesta en frecuencia experimentales entre dos transductores acústicospuestos frente a frente. $L = 58$ cm. Evolución (a) de la Ganancia y (b) de la fase. entre la onda sonora emitida y la recibida en función de la frecuencia ν_o de laonda emitida*

2.4. Sistemas Muestreados (Discretos)

Estos sistemas actúan sobre señales digitales o numéricas.

2.4.1. Muestreo de señales

Las señales naturales son representadas por funciones continuas del tiempo: señales análogas. Actualmente, para utilizar microprocesadores, uno muestrea esas señales extrayendo una série de valores de esa señal (se dicretiza). En general uno realiza un muestreo regular y perfecto de la señal análoga, asociando a la señal análoga esta série de valores discretos en instantes de tiempo nT_e, siendo T_e el período de muestreo utilizado. Esta série discreta $x(nT_e)$ será la señal digital, $x(n)$. Estas señales, así como las señales análogas que vimos anteriormente, pueden ser usadas en sistemas lineales e invariantes en el tiempo, los llamados sistemas muestreados o discretos.

2.4.2. Definición de sistemas muestreados

Consideremos un sistema muestreado (discreto) sometido a una entrada discreta $x(n)$. El entrega en al salida $y(n)$. El sistema es lineal si posee las mismas propiedades de homogeneidad y aditividad mencionadas anteriormente. Además el sistema será invariante en el tiempo si también cumple la propiedad correspondiente para sistemas continuos.
Podemos resumir esas correspondencias como:

$$x_1(n) \longrightarrow y_1(n) \tag{2.41}$$

$$x_2(n) \longrightarrow y_2(n) \tag{2.42}$$

$$\alpha_1 x_1(n-n_0) + \alpha_2 x_2(n-n_0) \rightarrow \alpha_1 y_1(n-n_0) + \alpha_2 y_2(n-n_0) \tag{2.43}$$

En este tipo de sistema discreto, las señales de entrada pueden ligarse a través de una ecuación de diferencias, que veremos más adelante.

2.4.3. Respuesta Impulsional

Consideremos ahora, la entrada como una función de Dirac *discreta*:

$$\delta(n) = \delta_{0,n} = \begin{cases} 0 & \text{si}\, n \neq 0 \\ 1 & \text{si}\, n = 0 \end{cases}$$

Así como lo vimos anteriormente en sistemas continuos, la respuesta impulsional es la salida correspondiente a la impulsión de Dirac aplicada a la entrada. Sea $h(n)$ la respuesta impulsional.Entonces:

$$y(n) = \sum_p h(n-p)x(p) = \sum_p h(p)x(n-p)$$

Esta relación es la *Convolución a Tiempo Discreto*. Estos sistemas muestreados, pueden ser descritos en función de las frecuencias; Nosotros volveremos a ese punto más adelante, luego de haber introducido la Transformada en **Z**. Con ello uno puede describir estos sistemas a través de ecuaciones de diferencias que son el equivalente a ecuaciones diferenciales para los sistemas a tiempo continuo.

2.4.4. Ecuación de Diferencias

La relación lineal e invariante en el tiempo más general que permite relacionar dos señales a tiempo discreto $x(n)$ y $y(n)$ es la ecuación de diferencias:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k y(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k x(n-k) \tag{2.44}$$

Uno considera generalmente que el sistema descrito por esta ecuación es causal y además no puede involucrar señales de salida futuras. Si normalizamos por a_0 tenemos:

$$y(n) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x(n-k)$$

Esta relación describe de manera general los sistemas lineales y estacionarios causales.
En la práctica, uno se limita a valores del retardo sobre las variables $y(n)$ y $x(n)$, lo que conduce a:

$$y(n) + \sum_{1}^{P} a_k y(n-k) = \sum_{0}^{M} b_k x(n-k)$$

Esta expresión de la relación salida/entrada es muy útil, porque nos entrega un algoritmo de fácil implementación para calcular la salida en el instante n cuando uno conoce las P y M salidas y entradas precedentes respectivamente.
En la literatura técnica aobre estos sistemas, encontramos la clasificación sgte:

- Filtros Autoregresivos (AR): en estos sistemas discretos, la salida en el instante n se calcula a partir de las P salidas precedentes y sólo de la entrada al instante n, es decir: $b_k = 0$ para $k > 0$.

  Se elige casi siempre $b_0 = 1$ que significa una normalisación de la entrada. El filtro autoregresivo (AR) se describe con la ecuación de diferencias:

  $$y(n) + \sum_{1}^{P} a_k y(n-k) = x(n)$$

- Filtros de Promedio Ajustable (PA). es el caso simétrico de los filtros que cumplen: $a_k = 0$ para $k \geq 1$ y nos dan la relación:

  $$y(n) = \sum_{0}^{M} b_k x(n-k)$$

En estos filtros la salida en el instante n es un promedio de los valores de la entrada en el instante n y en los instantes precedentes.

La respuesta impulsional $h(n)$ de estos filtros (PA) se obtiene haciendo $x(n) = \delta(n)$ con lo cual se obtiene $h(k) = b_k$, lo que muestra que la respuesta impulsional tiene una largo finito (M). Se les llama también filtros de respuesta impulsional finita (RIF).

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta(n-k) \rightarrow h(k) = b_k$$

Esto porque $\delta(n-k) = 1$ para $n = k$. Así podemos escribir la convolución

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} h(k)x(n-k)$$

que nos entrega la salida discreta $y(n)$ frente a cualquier entrada $x(n)$ usando la respuesta impulsional $h(n)$. Por el contrario, se puede apreciar que los filtros AR tienen una respuesta impulsional infinita, de donde proviene la denominación de filtros de respuesta impulsional infinita (RII).

- Finalmente, los filtros descritos por la relación 2.44, el caso más general, se denominan filtros ARMA, que son filtros RII.

2.5. Transformación de Señales

La naturaleza nos entrega señales continuas en el tiempo. En los sistemas modernos esas señales son muestreadas para producir señales a tiempo discreto que sean accesibles para los métodos numéricos actuales. Nosotros veremos tres tipos de descripciones de esas señales y sus respectivas transformaciones.
La dualidad entre señales discretas y continuas y la dualidad de la representación tiempo y frecuencia nos entrega cuatro clases de señales asociadas a cuatro familias de transformaciones.
Las señales a tiempo y frecuencia continua están relacionadas a través de la Transformada de Fourier (TF) o la Transformada de Laplace (TL) que hacen transitar la señal $t \rightleftharpoons \nu$. Las señales periódicas poseen un estatus particular. Son señales a tiempo continuo y frecuencia discreta (fundamental y armónicos). Su representación tiempo–frecuencia esta relacionada a través de las Series de Fourier. Ahora bien, las señales a tiempo discreto hacen aparecer la denominada Transformada en **Z**. Lamentablemente la noción de frecuencia no está bien representada en la Transformada en **Z**, con lo cual uno debe incorporar la Transformada en Frecuencias Reducidas para poder recuperar la noción intuitiva de frecuencia. Estas señales a tiempo discreto dependerán de una variable continua en frecuencia.
Por último, las señales a tiempo y frecuencia discretos serán representadas a través de la Transformada de Fourier Discreta (TFD) que posee una versión (algoritmo) muy conocido denominado *fast Fourier Transform, FFT*.

2.5.1. Transformada de Fourier

Transformada de Fourier Directa

Sea $x(t)$ una señal transitoria (no periódica) que verifica:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \quad \text{FINITA}$$

La transformada de Fourier nos entrega el *Espectro* complejo de $x(t)$:

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j\nu t} \, dt \rightarrow X(\nu) = TF[x(t)] \tag{2.45}$$

Este espectro es una función de valores complejos. Las partes Real e Imaginaria del espectro son:

$$Re[X(\nu)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi\nu t) \, dt \tag{2.46}$$

$$Im[X(\nu)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi\nu t) \, dt \tag{2.47}$$

Son componentes en Fase (cos) y Cuadratura (sin) a la frecuencia ν. Típicamente el espectro se escribirá en módulo (espectro de amplitud):

$$|X(\nu)| = \left\{ Re[X(\nu)]^2 + Im[X(\nu)]^2 \right\}^{1/2}$$

y en fase (espectro de fase):

$$\phi_{X(\nu)} = \arctan \left\{ \frac{Im[X(\nu)]}{Re[X(\nu)]} \right\}$$

Transformada de Fourier Inversa

Una de las propiedades esenciales de la TF es que es invertible. Se puede reconstruir una señal a partir de su espectro complejo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{2\pi j \nu t} \, df \rightarrow x(t) = TF^{-1}[X(\nu)] \tag{2.48}$$

La TF inversa (TF^{-1}) permitirá interpretar a $x(t)$ como una suma de componentes de frecuencias puras ($e^{2\pi j \nu t}$) donde el módulo y la fase están determinados (fijos) a través del espectro complejo $X(\nu)$.

Otras notaciones

Generalmente la TF se representa usando la frecuencia física ν en unidades de ciclos/segundo (Hertz, Hz). Hay gente (matemáticos) que prefieren representar la TF usando la frecuencia angular $\omega = 2\pi\nu$ en unidades de rad/segundo. En ese caso, la TF y la TF^{-1} se pueden escribir como:

$$X(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} \, dt \tag{2.49}$$

$$x(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega \tag{2.50}$$

Sin embargo el algebra resultante es la misma.

Significado Físico

$X(\nu)$ y $x(t)$ representan el mismo observable físico en dos representaciones diferentes. Para $x(t)$ la señal se desplaza en un dominio amplitud–tiempo y para $X(\nu)$ la señal se desplaza en un dominio amplitud compleja–frecuencia.
Es importante notar que ambas relaciones 2.45 y 2.48 son complemetarias. Una señal localizada en el plano de Fourier corresponderá a una señal totalmente no–localizada en el espacio directo. A

la inversa es lo mismo. Existe una relación de *Incerteza* que nos obligará a predecir con un cierta incertitud una componente en ambos espacios (Heisenberg).

Condiciones de Existencia

Se puede demostrar que, para que una función $f(t)$ tenga una TF, función de ν definida por 2.45 es necesario y suficiente que:

1. La función $f(t)$ sea acotada (no diverja)

2. La integral de $|f(t)|$ entre $[-\infty, +\infty]$ tenga un valor finito

3. Las discontinuidades de $f(t)$ y sus máximos y mínimos sean, en número, finitos.

Es decir para que la TF de $f(t)$ exista es necesario que la señal contenga una energía finita (observar en un intervalo de tiempo o ventana temporal).

Algunas Propiedades de la TF

Linealidad

La TF es una operación **lineal**:

$$\begin{aligned} f(t) &\rightleftharpoons F(\nu) \\ g(t) &\rightleftharpoons G(\nu) \end{aligned} \tag{2.51}$$

Estas dos relaciones permiten ver la linealidad:

$$af(t) + bg(t) \rightleftharpoons aF(\nu) + bG(\nu)$$

Paridad

Relaciones de paridad de la TF	
$x(t)$	$X(\nu)$
Real y Par	Real y Par
Real e Impar	Imaginaria e Impar
Imaginaria y Par	Imaginaria y Par
Imaginaria e Impar	Real e Impar
Compleja y Par	Compleja y Par
Compleja e Impar	Compleja e Impar
Real Cualquiera	Parte Real Par
Real Cualquiera	Parte Imaginaria Impar
Imaginaria Cualquiera	Parte Imaginaria Par Parte Real Impar
Parte Real Par y Parte Imaginaria Impar	Real
Parte Real Impar y Parte Imaginaria Par	Imaginaria

Si $x(t)$ es cualquiera (por ej. compleja) tenemos las relaciones siguientes, donde el asterisco significa complejo conjugado:

$$\begin{aligned} x(t) &\rightleftharpoons X(\nu) \\ x^*(t) &\rightleftharpoons X^*(-\nu) \end{aligned} \tag{2.52}$$

Aquí vienen otras relaciones simples entre la TF de $x(t)$, $x^*(t)$ y $x(-t)$:

Relaciones Simples de la TF		
$x(t)$	$x^*(t) \rightleftharpoons X^*(-\nu)$	$x(-t) \rightleftharpoons X(-\nu)$
Real	$X(\nu)$	$X^*(\nu)$
Imaginaria	$-X(\nu)$	$-X^*(\nu)$
Par Cualquiera	$X^*(\nu)$	$X(\nu)$
Impar Cualquiera	$-X^*(\nu)$	$-X(\nu)$
Cualquiera	$X^*(-\nu)$	$X(-\nu)$

Las relaciones de paridad pueden quedar más claras si analizamos un ejemplo: Suponga que la función $q(t)$ es REAL y posee una transformada de Fourier $Q(\nu)$ dada por :

$$Q(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{-2\pi j \nu t} dt$$

Donde

$$Q(\nu) \equiv U(\nu) + jV(\nu)$$

Si identifica los términos haciendo:

$$\begin{aligned} U(\nu) + jV(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{-2\pi j \nu t} dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} q(t) \cos(2\pi\nu t) dt}_{U(\nu)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} q(t) \sin(2\pi\nu t) dt}_{V(\nu)} \end{aligned} \tag{2.53}$$

Esto implica que $U(\nu) = Re[Q(\nu)]$ es PAR y $V(\nu) = Im[Q(\nu)]$ es IMPAR. Con ello tenemos que: $U(\nu) = U(-\nu)$ y $V(\nu) = -V(-\nu)$. Al usarlo en $Q(\nu)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} Q(-\nu) &= U(-\nu) + jV(-\nu) \\ &= U(-\nu) - jV(\nu) \\ &= \underbrace{U(\nu) - jV(\nu)}_{Q^*(\nu)} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Esto se resume diciendo que si $q(t) \in \mathbf{R}$ entonces $Q(-\nu) = Q^*(\nu)$ donde el símbolo $*$ representa el complejo conjugado. Este es el principio de reflexión. También es válido al revés: Si se cumple este principio, entonces la función $q(t)$ es real.

Similitud

La ecuación $f(t) \rightleftharpoons F(\nu)$ conduce a una relación de escala:

$$f(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

Una agrandamiento de la escala de tiempo conduce a una *contracción* de la escala de frecuencias (ver figura 2.6).

Traslación

La ecuación $f(t) \rightleftharpoons F(\nu)$ conduce a una relación de translación:

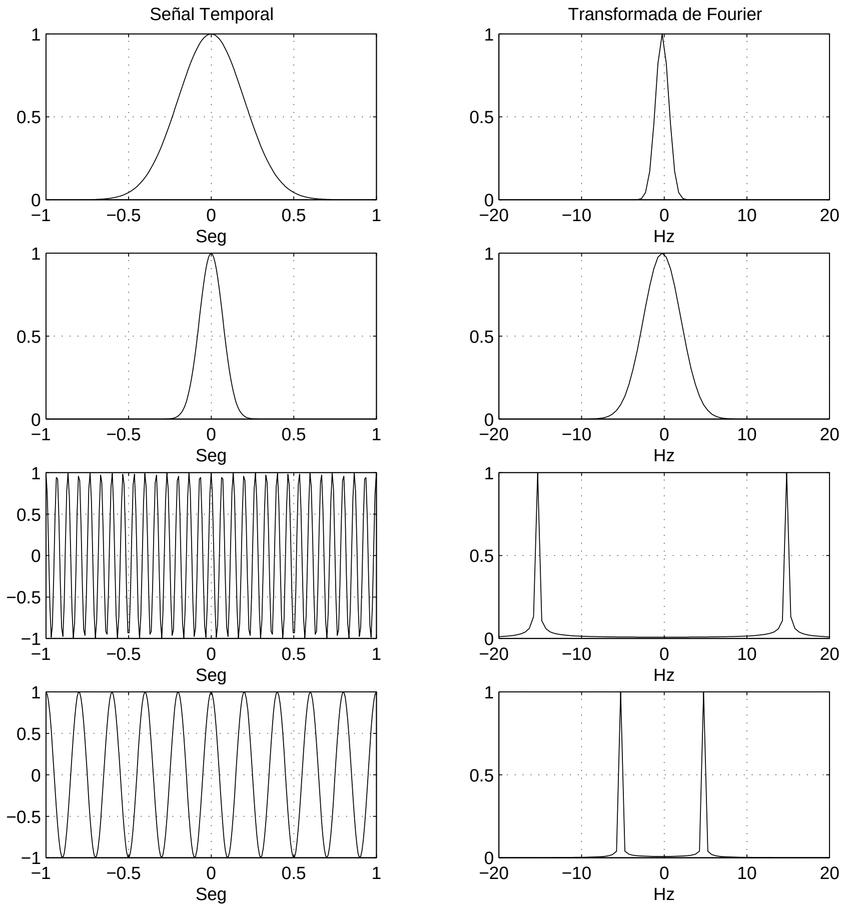


Figura 2.6: *Ilustración de la Propiedad de Similitud*

$$\begin{aligned} f(t-a) &= e^{-2\pi j a\nu} F(\nu) \\ f(t-a) &= \cos(2\pi\nu a)F(\nu) - j\sin(2\pi\nu a)F(\nu) \end{aligned} \tag{2.55}$$

Ambas TF de $f(t)$ y $f(t-a)$ tienen el mismo módulo pero la TF de $f(t-a)$ sufre una *rotación* de fase en el plano de Fourier de $-2\pi a\nu$.

En el caso de una función cualquiera dada, una translación crea una deformación de las partes Real e Imaginaria de la TF, pero más importante aún, la translación puede modificar la pendiente de la fase de la señal de origen. Esta propiedad es obviamente reciproca, es decir que si $F(\nu) \rightleftharpoons f(t)$ entonces

$$F(\nu - a) \rightleftharpoons f(t)e^{+2\pi j a t}$$

Como ejemplo tomemos la Distribución de Dirac $\delta(\nu)$, que posee una TF cosntante:

$$\delta(\nu) \rightleftharpoons 1$$

Si efectuamos una translación en la delta en $-a$ y $+a$ tenemos:

$$\begin{aligned} \delta(\nu - a) &= e^{+2\pi jat} \\ \delta(\nu + a) &= e^{-2\pi jat} \\ \delta(\nu + a) + \delta(\nu - a) &= 2\cos 2\pi at \end{aligned} \tag{2.56}$$

Translación en Frecuencia y Modulación
Sabemos que la relación $f(t) \rightleftharpoons F(\nu)$ conduce a:

$$f(t)e^{-2\pi j\nu_p t} \rightleftharpoons F(\nu - \nu_p)$$

Esto corresponde a una *Modulación* de la señal $e^{-2\pi j\nu_p t}$ por la señal $f(t)$, muy utilizado en telecomunicaciones. La señal $f(t)$ es la señal *Modulante* y la señal oscilatoria $e^{-2\pi j\nu_p t}$ es la *Portadora* (Carrier Wave), cuya frecuencia depende del canal utilizado en la comunicación. La translación en frecuencia en una señal $f(t)$ se hace multiplicando por una frecuencia pura. En el caso de señales reales, la multiplicación se hace con coseno o seno:

$$f(t) \longrightarrow f(t)\cos 2\pi\nu_p t$$

Evidentemente (usando teorema de convolución), la TF de la señal modulada es:

$$TF[f(t)\cos 2\pi\nu_p t] = \frac{1}{2}\{F(\nu - \nu_p) + F(\nu + \nu_p)\}$$

Esta operación queda clara en la figura 2.7. La señal de baja frecuencia $f(t)$ luego de la multiplicación por $\cos 2\pi\nu_p t$ queda **localizada** alrededor de las frecuencias $+\nu_p$ y $-\nu_p$. No le recuerda esto la localización de una función cuando le aplicamos una delta de Dirac ? (cf. ecuación 2.56).
Derivación
Si tenemos :

$$\begin{aligned} x(t) &\rightleftharpoons X(\nu) \\ \frac{dx(t)}{dt} &\rightleftharpoons (2\pi j\nu)X(\nu) \\ \frac{d^n x(t)}{dt^n} &\rightleftharpoons (2\pi j\nu)^n X(\nu) \end{aligned}$$

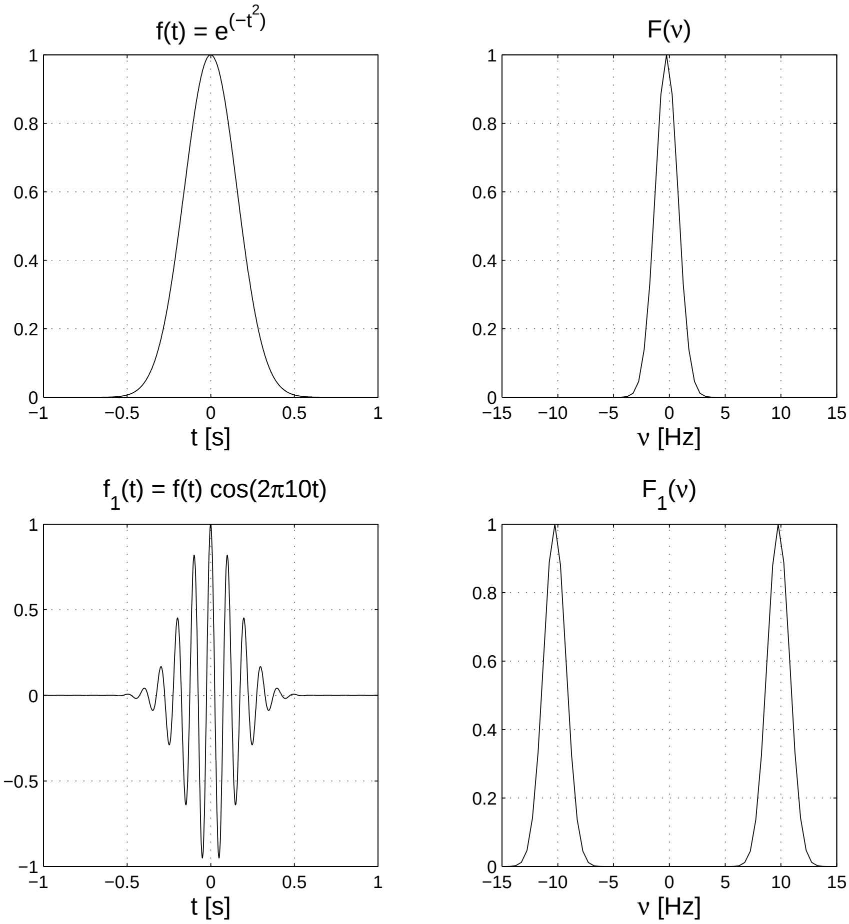


Figura 2.7: *Ilustración de la Propiedad de Modulación. Aquí la frecuencia de la portadora es* $\nu_p = 10$ *Hz*

Esta propiedad se aclara con una Gaussianna:

$$
\begin{aligned}
e^{-\pi t^2} &\rightleftharpoons e^{-\pi\nu^2} \\
te^{-\pi t^2} &\rightleftharpoons -j\nu e^{-\pi\nu^2}
\end{aligned}
$$

Detalle del Proceso de Modulación

Como dijimos anteriormente, la modulación es la alteración de alguna propiedad de una onda portadora (carrier wave) producida por otra señal la cual contiene información relevante. Las portadoras pueden ser sinusoides o trenes de pulsos. En el caso de las sinusoides, la señal modulante puede alte-

rar la amplitud o la frecuencia de la portadora. Para los pulsos, la señal modulante puede modificar la amplitud o la duración de ellos provocando alteración de fase.
La modulación es usada en tres áreas:

1. Señales de TV, radio, cintas magnéticas. Cuando la señal modulante no puede ser transmitida directamente en un medio dada su baja frecuencia.

2. Señales Multicarrier. Cuando se necesita transmisión de muchos canales sobre un sólo medio. Se usan muchas portadoras a diferentes frecuencias. El caso de la fibra óptica.

3. Mejorar razón señal/ruido. En mediciones eléctricas, ópticas. Aquí la modulación es usada para mover el ancho de banda correspondiente a la señal que contiene información a una porción del espectro donde el ruido es menor.

Para que la modulación tenga utilidad, debe ser un proceso reversible. Esto se denomina **demodulación.**

Modulación de Amplitud, DSB y AM

La señal modulante (información) alterará la amplitud de una portadora sinusoidal. La frecuencia de la onda portadora es en general mucho más grande que las frecuencias contenidas en la señal modulante. Con este procedimiento, la información en la señal modulante es trasladada (shift) hacia las altas frecuencias, logrando llevarla a regiones del espectro libres de ruidos como el ruido típico $1/\nu$, el ruido asociado a los 50 Hz alterno y sus armónicos etc.
Dentro de la modulación de amplitud existen dos tipos: Modulación DSB (Double Side Band) y Modulación AM (Amplitude Modulation). Consideremos el caso particular de una onda modulante sinusoidal de la forma $f(t) = A_o \cos(\omega_o t)$. La portadora es en general también sinusoidal, de la forma : $p(t) = A_p \cos(\omega_p t)$, con $\omega_p \gg \omega_o$.
Comenzamos con la modulación DSB, que consiste en multiplicar ambas señales directamente (a través de un dispositivo electrónico, ej AD554). El resultado es una señal de la forma:

$$M(t) = f(t) \cdot p(t) = \frac{A_o A_p}{2} \left(\cos(\omega_p + \omega_o)t + \cos(\omega_p - \omega_o)t\right)$$

Donde sólo aparecen las frecuencias suma y diferencia: $(\omega_p \pm \omega_o)$. Esto se verá reflejado en el espectro. Sólo apareceran estas frecuencias, no veremos las rayas espectrales ni de $f(t)$ ni de $p(t)$. Por este motivo a este tipo de modulación se le denomina DSB, dos rayas espectrales a ambos lados de la frecuencia de la portadora ω_p sin que esta aparezca directamente.
Ahora veamos el proceso de modulación AM. Este es el proceso de modulación usado en señales radio. La única diferencia con la modulación DSB es que aquí se agrega (suma) a la señal resultante $M(t)$ la onda portadora $p(t)$:

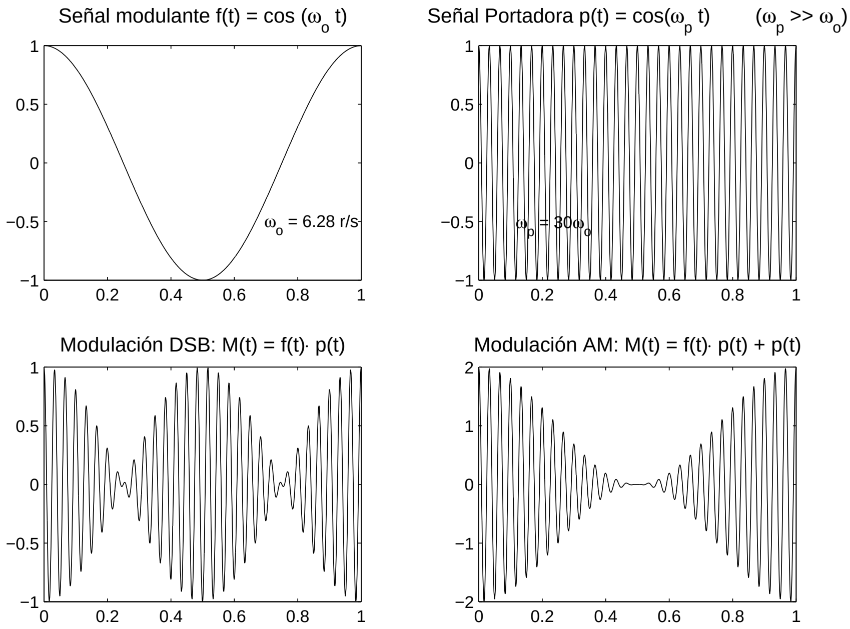


Figura 2.8: *Procesos de Modulación tipo DSB y AM*

$$M(t) = f(t) \cdot p(t) + p(t)$$

Aunque esto parezca una diferencia insignificante, tiene profundas consecuencias en el proceso de *demodulación*. La gracia de la modulación AM es que la envolvente de la señal $M(t)$ es exactamente la señal modulante $f(t)$. En general esto no es cierto para la modulación DSB, porque allí los cambios de signo de $f(t)$ se codifican en cambios de fase de $M(t)$ y esto complica la demodulación. Los circuitos para demodulación AM son más simples que para modulación DSB, con lo cual se explica la popularidad de la modulación AM (demuestre que un cambio de signo en una señal $f(t)$ produce cambios de fase o inversión de fase en la señal $M(t)$).
En la figura 2.8 se aprecia que sólo en el caso de la modulación AM, la envolvente de $M(t)$ coincide exactamente con la señal modulante $f(t)$. La señal resultante de la AM es entonces:

$$M(t) = [1 + A_o \cos(\omega_o t)] \cos(\omega_p t)$$

Con ello, aparecen en el espectro tres rayas espectrales asociadas a: $\omega_p \pm \omega_o$ y a ω_p. Note que el proceso de modulación es No Lineal, y en el curso vimos que la aparición de las frecuencias $\omega_p \pm \omega_o$ es característico de este tipo de procesos.

Demodulación

El método general para demodulación de amplitud, DSB o AM, es la multiplicación *síncrona* con una señal sinusoidal, $d(t)$, de igual frecuencia y fase que la portadora $p(t)$, seguido de un filtraje pasa-baja (electrónico). Este proceso traslada la señal $M(t)$ hacia las bajas frecuencias en el espectro hacia su ubicación original, pero genera algunas componentes de alta frecuencia ($2\omega_p$). De esta manera es posible decodificar la información transmitida en el proceso de modulación. Note que si no puede crear una señal $d(t)$ de igual frecuencia y fase con $p(t)$, entonces tendrá que transmitirla junto a $M(t)$ para poder realizar la demodulación (especialmente en el caso de DSB).
En la figura 2.9 se aprecia el proceso de demodulación, usando la referencia $d(t) = A_p \cos(\omega_p t)$.

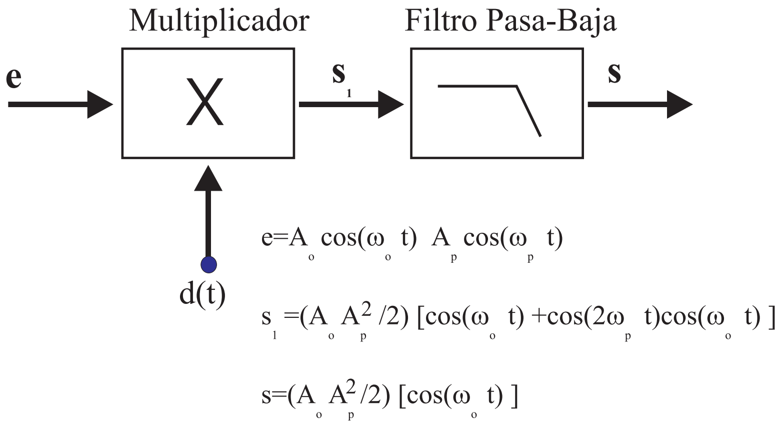


Figura 2.9: *a) Proceso de Demodulación para casos DSB y AM*

En los experimentos de laboratorio se usa preferentemente la modulación DSB, en particular para muestreo síncrono de señales luminosas y sonoras.

Casos particulares

Función Ventana (Window)

Esta función, $\sqcap_T(t)$, se aprecia en la figura 2.6, vale 1 dentro del intervalo $[-T/2, +T/2]$ y cero fuera de él. Su TF es la siguiente (Ejercicio para la casa):

$$\sqcap_T(t) \rightleftharpoons T\frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T}$$

Si efectuamos una translación, $\sqcap_T(t - T/2)$, su TF es la TF de $\sqcap_T(t)$ multiplicada por $e^{-\pi j\nu T}$, osea :

$$\sqcap_T(t - T/2) \rightleftharpoons T\frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T}[\cos(\pi\nu T) - j\sin(\pi\nu T)$$

Distribución de Dirac

La TF de la Delta sabemos que es: $\delta(t) \rightleftharpoons 1$, Con lo cual:

$$\delta(t - t_0) \rightleftharpoons e^{-2\pi j\nu t_0}$$

Peine de Dirac

El peine de Dirac se escribía :

$$\delta_T^{\uparrow\uparrow\uparrow}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

con la ayuda de las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi j \frac{t}{T} n) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) &\rightleftharpoons \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \frac{1}{T}) \end{aligned}$$

Así la TF del Peine es:

$$\delta_T^{\uparrow\uparrow\uparrow}(t) \rightleftharpoons \frac{1}{T} \delta_{1/T}^{\uparrow\uparrow\uparrow}(\nu)$$

Frecuencias Negativas

La TF de una función está definida para frecuencias tanto positivas como negativas. No es fácil dar una interpretación física a las frecuencias negativas, aunque hay casos como en la velocimetría Laser Doppler (http://en.wikipedia.org/wiki/Laser_Doppler_velocimetry), donde el sentido físico de dichas frecuencias se asocia al efecto de una modulación de la señal de interés producto del movimiento de párticulas dentro de un fluido, produciéndose un corrimiento (shift) de la componente espectral de la señal. Un ejemplo más cotidiano son los cambios en la frecuencia audible de un móvil que se acerca o se aleja de un observador (ambulancias), producto del efecto Doppler (http://en.wikipedia.org/wiki/Doppler_effect)

Generalmente, las señales usadas en experiencias de laboratorio son reales, y si calculamos la transformada de Fourier de una señal real, el espectro de Fourier es una función par. Ahora bien, si quisiéramos construir una señal compleja a partir de una señal real dada, podemos, a partir de la TF para $\nu \geq 0$, tratar de reconstruir por simetría la TF a frecuencias negativas. A esta técnica se le denomina Señal Analítica.

Transformada de Hilbert

En tratamiento de señales, generalmente se necesita relaciones entre la parte real e imaginaria de una señal. Esas relaciones son normalmente descritas con ayuda de la transformada de Hilbert. Esta transformación, muy utilizada en teoría de comunicaciones, permite describir la *envolvente* de una señal real (portadora) y su *frecuencia instantánea.*
En el diagrama de la figura 2.10 se muestra el proceso de modulación de una señal $x(t)$ usando la portadora $\cos(\omega t)$ entregada por el oscilador. El módulo de transformación de Hilbert crea una señal $sin(\omega t)$ a partir de la señal $\cos(\omega t)$.

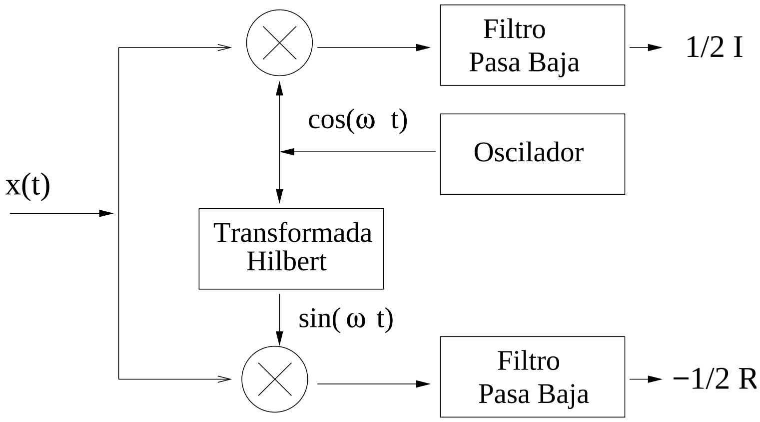


Figura 2.10: *Rol de la transformada de Hilbert en el proceso de Modulación*

Este diagrama entrega dos componentes (R, I, real e imaginaria) de la señal modulada.
La transformada de Hilbert (TH) se define como

$$TH[x(t)] = x(t) * \frac{1}{\pi t} = V.P. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\theta)}{t-\theta} \, d\theta$$

donde V.P. es el valor principal de la integral, es decir, el valor de la integral al evitar las singularidades en $\theta = t$ y $\theta = \pm\infty$.
Al escribir la transformada de Fourier de la transformada de Hilbert de la función $x(t)$ y usando el teorema del producto de Convolución, tenemos

$$TF\left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right) = TF\left(\frac{1}{\pi t}\right) X(\nu) \qquad \text{donde} \qquad TF\left(\frac{1}{\pi t}\right) = -j \, sgn(\nu)$$

Un truco es expresar la función *signo* como $sgn(\nu) = 2\Theta(\nu) - 1$, donde $\Theta(\nu)$ es la función escalón unitario en el dominio frecuencial. De esta manera,

$$TF\left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right) = \begin{cases} -jX(\nu) & \nu > 0 \\ +jX(\nu) & \nu < 0 \end{cases}$$

Esto se traduce en que la transformada de Hilbert produce una rotación de -90^o en las componentes de frecuencia positivas y una rotación de $+90^o$ en las componentes de frecuencia negativas de la señal $x(t)$ (al multiplicar por $\pm j$).
Algunos ejemplos:

Transformada de Hilbert	
Señal $x(t)$	TH$[x(t)]$
$\sin(t)$	$-\cos(t)$
$cos(t)$	$\sin(t)$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\frac{t}{1+t^2}$
$\frac{\sin(t)}{t}$	$\frac{1-\cos(t)}{t}$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$

Señal analítica

Cuando uno considera una señal real, su espectro es par, por lo que los valores del espectro para las frecuencias negativas son superfluos y pueden no considerarse sin tener ningun efecto sobre la señal de interés. Sólo nos interesan las frecuencias positivas. Si es necesario construir una señal compleja $z_x(t)$ que represente a $x(t)$, tal que $Z_x(\nu) = TF[z_x(t)]$ sea idénticamente nula para $\nu < 0$ e igual a $2X(\nu)$ para $\nu \geq 0$, tenemos que la señal anàlìtica de $x(t)$ es $Z_x(t)$ dada por

$$Z_x(t) = x(t) + j\,TH[x(t)] \qquad \text{y en Fourier} \qquad Z_x(\nu) = X(\nu) + X(\nu)sgn(\nu)$$

Donde la función *sgn* se puede re-definir por:

$$sgn(\nu) = \begin{cases} +1 & \text{si}\,\nu \geq 0 \\ 0 & \text{si}\,\nu = 0 \\ -1 & \text{si}\,\nu < 0 \end{cases}$$

Ahora la función $z_x(t)$ es compleja:

$$z_x(t) = TF^{-1}[Z_x(\nu)] = x(t) + jTF^{-1}[-jsgn(\nu)X(\nu)]$$

Lo cual nos entrega:

$$z_x(t) = x(t) + j\frac{1}{\pi t} * x(t)$$

Donde la TH es (idem anteriormente)

$$TH[x(t)] = x(t) * \frac{1}{\pi t} = V.P. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\theta)}{t-\theta} \, d\theta$$

Así, nuestra función analítica queda representada por

$$z_x(t) = x(t) + jTH[x(t)]$$

Note que la TH equivale a filtrar la señal con un filtro de ganancia compleja, dado por: $j\, sgn(\nu)$ como vimos anteriormente.

Ejemplo 1: Si $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ entonces $TH[x(t)] = \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \sin(\omega_0 t)$. Y la señal analítica es entonces $Z_x(t) = \cos(\omega_0 t) + j \cdot \sin(\omega_0 t) = e^{j\omega_0 t}$.

Ejemplo 2: Si $x(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$, entonces $Z_x(t) = e^{j|\omega_1|t} + e^{j|\omega_2|t}$.

Nota para fanáticos de Matlab: Si Ud. tiene una función real $v_r(t)$ y quiere encontrar la señal analítica, $v_a(t)$, correspondiente, puede usar, en Matlab, el comando siguiente:

$$v_a = v_r + j \star Imag(hilbert(v_r))$$

Transformada de Fourier del Producto de Convolución

La idea es determinar cual es el aspecto del producto de convolución en el espacio de Fourier.
El producto de convolución entre dos funciones $g(t), r(t)$ está definido por la relación:

$$(g * r)_t = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t')r(t')dt'$$

Si calculamos la TF del producto de convolución, obtenemos lo sgte:

$$\begin{aligned}
TF[g*r] &= \int e^{-2\pi j\nu t} \left(\int g(t-t')r(t')dt' \right) dt \\
TF[g*r] &= \underbrace{\int g(t-t')e^{-2\pi j\nu(t-t')}d(t-t')}_{G(\nu)} \underbrace{\int e^{-2\pi j\nu t'} r(t')dt'}_{R(\nu)} \\
TF[g*r] &= G(\nu)R(\nu) \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

Esto es, la TF del producto de convolución en el espacio real de dos funciones, se transforma en el producto simple entre las TF de cada una de las funciones.

Lo mismo ocurrirá, en sentido inverso, si calculamos la TF^{-1} del producto de convolución entre dos funciones en el espacio de Fourier. Obtendremos el producto simple de ambas funciones en el espacio real. Es decir:

$$TF^{-1}\left[\int G(\nu-\nu')R(\nu')d\nu'\right]=g(t)r(t)$$

2.5.2. Transformada de Laplace

Como hemos venido viendo, la función de transferencia de un sistema lineal es la razón entre la salida y la entrada del sistema. Cuando el sistema está descrito por ecuaciones diferenciales es dífícil calcular esa razón s/e. Por este motivo hemos introducido ya la TF y ahora la Transformada de Laplace.

Definición

Sea $f(t)$ una función de variable real t y NULA para $t < 0$, es decir, una función causal. La transformada de Laplace (**TL** o **L**) es:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \rightarrow F(s) = TL[f(t)] \tag{2.58}$$

En esta integral, s puede ser una variable real o compleja. Si s es compleja se supone que la parte real de s, σ, es superior a un cierto valor σ_0 y que en esas condiciones la integral converge. Si $s = \sigma + j\omega$ entonces $\sigma > \sigma_0$.

Si s es imaginaria pura ($s = j\omega$), $F(s)$ se reduce a la Transformada de Fourier de la función $f(t)$, y será igual a 0 si $t < 0$ y a $f(t)$ si $t \geq 0$. Escribiremos continuamente $F(s) = TL[f(t)]$. Además esta transformación es LINEAL, con lo cual:

$$\begin{aligned} TL[f_1(t) + f_2(t) &= TL[f_1(t)] + TL[f_2(t)] \\ TL[\alpha f(t)] &= \alpha TL[f(t)] \end{aligned} \tag{2.59}$$

La transformada inversa de Laplace está dada por la integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds \rightarrow f(t) = TL^{-1}[F(s)] \tag{2.60}$$

Demostración

Mostramos anteriormente que la TF de una función $f(t)$ existe si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ es finita. Esto requiere que $f(\pm\infty) = 0$. Pero si $f(t)$ tiene las sgtes. propiedades:

1. $f(t) = 0$ para $t < 0$

2. $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$ con $\sigma > 0$

Podemos deducir la integral que representa la TL de $f(t)$. La propiedad 2 no requiere que $f(\infty) = 0$ o incluso finita, sino que requiere que $f(t)$ se aproxime a su límite al infinito en forma más lenta que $e^{\sigma t}$.
Definimos:

$$q(t) \equiv \begin{cases} f(t)e^{-\sigma t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Donde σ es real y mayor que cero. Además conocemos la función escalón de Heaviside $\Theta(t)$ definida por:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Al usar $\Theta(t)$ podemos escribir la función $q(t)$ como:

$$q(t) = \Theta(t)f(t)e^{-\sigma t}$$

Calculamos la transformada de Fourier de $q(t)$, que gracias a $\Theta(t)$ nos entrega en realidad la TF de $f(t)$

$$Q(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t)f(t)e^{-(\sigma+2\pi j\nu)t}dt = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+2\pi j\nu)t}dt \tag{2.61}$$

Escribimos también la transformada inversa de Fourier como:

$$q(t) = f(t)e^{-\sigma t} = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\nu)e^{2\pi j\nu t}d\nu \quad t > 0$$

Multiplicamos por $e^{\sigma t}$ a ambos lados, con lo cual nuestra función $f(t)$ queda definida por:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\nu)e^{(\sigma+2\pi j\nu)t}d\nu \quad t > 0 \tag{2.62}$$

Hacemos el cambio de variables $s \equiv \sigma + 2\pi j\nu$, la integral 2.61 se transforma en:

$$Q(\nu) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad \text{donde} \quad F(s) = TL[f(t)]$$

y la integral 2.62 se transforma en:

$$f(t) = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\frac{ds}{2\pi j} \quad \text{donde} \quad f(t) = TL^{-1}[F(s)]$$

En la tabla siguiente se resumen algunas de las propiedades de la Transformada de Laplace.

Propiedades de la Transformada de Laplace		
Transformada de Laplace	Función Temporal	Comentario
$F(s)$	$f(t)$	Par de transformación
$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	Superposición
$F(s)e^{-s\lambda}$	$f(t-\lambda)$	Shift temporal
$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at)$	Escala
$F(s+a)$	$e^{-at}f(t)$	Shift frecuencial
$sF(s) - f(0)$	$\frac{df(t)}{dt}$	Derivación
$s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	Derivación
$\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}[\int f(t)dt]_0$	$\int f(t)dt$	Integración
$F_1(s)F_2(s)$	$f_1(t) * f_2(t)$	Convolución
$-\frac{d}{ds}F(s)$	$tf(t)$	Multiplicación por t
$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\theta)F_2(s-\theta)d\theta$	$f_1(t)f_2(t)$	Producto de funciones

A continuación se presenta una lista de TL's de las funciones típicas. Más adelante veremos que la gracia de la TL aplicada a una función del tiempo es que convierte la ecuación diferencial que gobierna el sistema en una ecuación algebraica. La TL va a ser usada para encontrar la solución (en el dominio s) de las ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes (para $t \geq 0$).

Tabla de pares transformados de Laplace		
$F(s)$	$f(t)\ t \geq 0$	Comentario
1	$\delta(t)$	Dirac
$1/s$	$\Theta(t)$	Escalon unitario
$1/s^2$	t	Rampa unitaria
$2!/s^3$	t^2	Parabola
$3!/s^4$	t^3	Cubica
$m!/s^{m+1}$	t^m	Potencia m
$1/(s+a)$	e^{-at}	Exponencial
$1/(s+a)^2$	te^{-at}	Exponencial
$1/(s+a)^3$	$\frac{1}{2!}t^2e^{-at}$	Exponencial
$1/(s+a)^m$	$\frac{1}{(m-1)!}t^m e^{-at}$	Exponencial
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	Exponencial
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(at-1+e^{-at})$	Rampa-Escalon-Exp
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	Exponencial
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	Exponencial
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-at}(1+at)$	Exponencial
$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bt}-ae^{-at}$	Combinacion
$\frac{a}{(s^2+a^2)}$	$\sin at$	Sinusoide
$\frac{s}{(s^2+a^2)}$	$\cos at$	Sinusoide
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$	Modulacion
$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin bt$	Modulacion
$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1-e^{-at}\left(\cos bt+\frac{a}{b}\sin bt\right)$	Combinacion
$\frac{a^2}{s^2+2\zeta as+a^2}$	$\frac{a}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta at}\sin(a\sqrt{1-\zeta^2}t)$	Sist. 2^o orden

Casos Interesantes

Aquí veremos algunos trucos asociados al cálculo de Transformadas de Laplace y que serán utilizados en el análisis de sistemas de control en los capítulos siguientes del curso.

Considere la TL de la Delta de Dirac δ.

$$TL[\delta(t-t_0)] = \int_0^\infty \delta(t-t_0)e^{-st}\,dt = \begin{cases} e^{-st_0} & t_0 > 0 \\ 0 & t_0 < 0 \end{cases}$$

Si ahora calculamos la TL^{-1}, obtenemos otra representación integral de la δ

$$\delta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s(t-t_0)}\,ds \;\; t_0 > 0$$

Considere ahora la TL de la función escalón (step) de Heaviside $\Theta(t-t_0)$:

$$TL[\Theta(t-t_0) = \int_0^\infty \Theta(t-t_0)e^{-st}\,dt = \int_{t_0}^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}e^{-st_0}$$

con lo cual la función escalón se puede representar en forma integral como:

$$\Theta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s(t-t_0)}\frac{ds}{s}$$

Si tomamos la derivada de esta ecuación con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}\Theta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{s(t-t_0)}ds = \delta(t-t_0)$$

Parece más o menos claro que la derivada de una función escalón es nula alrededor del punto de quiebre y es justo allí donde la derivada se hace infinita, asemejándose a una delta de Dirac. Este caso se puede estudiar en detalle al modelar el punto de quiebre con una función suave, a la cual le hacemos tender el radio de curvatura a cero.

Considere la función $f(t)$ que posee una TL dada por $F(s)$. Su derivada c/r al tiempo es df/dt. Calculemos la $TL[df/dt]$:

$$\begin{aligned} TL\left[\frac{df}{dt}\right] &= \int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= (\underbrace{e^{-s\infty}}_{=0}f(\infty) - f(0)) + sTL[f(t)] \end{aligned} \tag{2.63}$$

Ojo que el primer término del lado izquierdo de la ecuación anterior es nulo siempre y cuando $Re(s) > 0$. Finalmente, tenemos que:

$$TL\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

Para la derivada de segundo orden, el cálculo es también simple y nos entrega:

$$TL\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Se advierte que gracias a la TL, aparecen naturalmente las condiciones iniciales asociadas a los operadores de diferenciación, $f(0), f'(0)$.
Calculemos ahora la TL de una integral. Sea $R(t)$ una función del tiempo dada por:

$$R(t) = \int_0^t f(t')dt'$$

Calculamos sabiendo que $TL[f(t)] = F(s)$:

$$\begin{aligned}
TL[R(t)] &= \int_0^\infty e^{-st}R(t)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(t')dt'dt \\
&= \left(-\frac{1}{s}e^{-st} - R(t)\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\frac{dR}{dt}dt}_{F(s)} \\
&= \frac{1}{s}R(0) + \frac{1}{s}F(s) \\
&= \frac{1}{s}\left(\int_0^t f(t')dt'\right)\Big|_0 + \frac{1}{s}F(s)
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Evaluación de Integrales de Laplace

Obtener la TL de una función del tiempo es simplemente calcular una integral. En la mayoría de los casos para obtener la transformada inversa se usa una tabla, pero no siempre funciona. Hay casos en que se debe evaluar la integral a través del cálculo de la integral por integración compleja (Teorema de Cauchy) usando el cálculo de residuos que aprendió en los cursos de Variable Compleja. Si ud. está interesado en entender esta técnica de evaluación de integrales, le sugiero revisar algún texto de Variable Compleja.

Ejemplo

Tenemos la sgte. ecuación diferencial de un oscilador (péndulo) efectuando oscilaciones de pequeña amplitud.

$$m\ddot{x} + kx = f(t)$$

Aplicamos la TL a dicha ecuación término por término, usando la tabla de pares transformados dada en clases, y obtenemos:

$$\begin{aligned} TL[m\ddot{x}] &= m(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) \\ TL[kx] &= kX(s) \\ TL[f(t)] &= F(s) \end{aligned}$$

Con lo cual, ordenando, obtenemos:

$$(ms^2 + k)X(s) - msx(0) - m\dot{x}(0) = F(s)$$

Despejamos $X(s)$:

$$X(s) = \underbrace{\frac{F(s)}{ms^2 + k}}_{\text{Sol. Particular}} + \underbrace{\frac{msx(0) + m\dot{x}(0)}{ms^2 + k}}_{\text{Efecto Condiciones Iniciales}}$$

Evidentemente si queremos la solución temporal $x(t)$ debemos calcular la transformada de Laplace inversa TL^{-1}. Esta la calculamos utilizando la tabla de pares transformados de Laplace. Pero antes de ello, debemos definir cual es la función $f(t)$, función forzante del oscilador. Supongamos (algo simple) que es una función escalón de Heaviside $\Theta(t)$, cuya TL está dada en la tabla, y es $F(s) = TL[\Theta(t)] = 1/s$. Con esto la solución de la ecuación diferencial es,

$$\begin{aligned} x(t) &= TL^{-1}\left[\frac{1}{s(ms^2 + k)}\right] + TL^{-1}\left[\frac{msx(0) + m\dot{x}(0)}{ms^2 + k}\right] \\ x(t) &= \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}t}\right] + \left[x(0)\cos\sqrt{\frac{k}{m}t} + \dot{x}(0)\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}t}\right] \end{aligned}$$

2.6. Transformación de Señales a Tiempo Discreto

Las señales a tiempo discreto son usadas en el tratamiento numérico de datos. Se obtienen a través de un muestreo de señales análogas. Para poder expandir la representación frecuencial a las señales de tiempo discreto, se introduce ls Transformada en Z y la Transformada en Frecuencias Reducidas.

2.6.1. La Transformada en Z (TZ)

La transformada en Z de una señal a tiempo discreto $x(n)$ es la función de variable compleja z:

$$X(z) = TZ[x(n)] = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Esta función está definida en un disco del plano complejo. Entre sus propiedades poder mencionar la Linealidad, es decir, si $X(z) = TZ[x(n)]$ y $Y(z) = TZ[y(n)]$ entonces:

$$TZ[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z)$$

También existe la traslación en tiempo discreto, que nos permite dar un significado físico a z^{-1}:

$$\begin{aligned} TZ[x(n - n_0)] &= X(z) z^{-n_0} \\ TZ[x(n - 1)] &= X(z) z^{-1} \end{aligned}$$

Con esto z^{-1} representa la operación *retardo unitario*. Esta propiedad hace que la TZ sea tan útil en teoría de muestreo de señales.

Función de Transferencia

Sea un sistema discreto (muestreado) de respuesta impulsional $h(n)$. Le aplicamos $x(n)$ a la entrada y en la salida obtenemos $y(n)$. Nosotros conocemos la ecuación de convolución,

$$y(n) = \sum_p h(n - p) x(p)$$

Si le calculamos la TZ a esta ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_p y(n) z^{-n} = \sum_n \sum_p h(n-p) x(p) z^{-n} \\ &= \sum_{n-p} \sum_p h(n-p) z^{-(n-p)} x(p) z^{-p} \\ Y(z) &= H(z) X(z) \end{aligned} \tag{2.65}$$

Así como vimos en la transformada de Fourier y la transformada de Laplace, también en la transformada en Z el producto de convolución se transforma en un producto simple en el espacio transformado. Ojo que será $H(z)$ la función de transferencia de nuestro sistema discreto.

Polos y Zeros

La salida $y(n)$ y la entrada $x(n)$ de un sistema discreto pueden relacionarse a través de la *ecuación de diferencias* vista anteriormente.

$$y(n) + \sum_{1}^{P} a_k y(n-k) = \sum_{0}^{M} b_k x(n-k)$$

Si tomamos la TZ a esta ecuación y usamos las propiedades de linealidad y translación en el tiempo, entonces obtenemos:

$$Y(z)(1 + \sum_{1}^{P} a_k z^{-k}) = X(z) \sum_{0}^{M} b_k z^{-k}$$

Si además sabemos que el sistema debe tener un función de transferencia $H(z)$ tal que:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Entonces, esta función estará dada por:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_0^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_1^P a_k z^{-k}}$$

Esta es una función tipo fracción racional en z. Si factorizamos el numerador y el denominador, tenemos que:

$$H(z) = b_0 z^{P-M} \frac{\prod_{i=1}^{M}(z - z_{0i})}{\prod_{j=1}^{P}(z - z_{pj})}$$

Los zeros del numerador z_{0i} son ZEROS del sistema o de $H(z)$. Los zeros del denominador son z_{pj} son POLOS del sistema o de $H(z)$. Los polos y zeros van a describir toda la dinámica del sistema alrededor de un factor de amplitud (b_0) y un retardo (z^{P-M}).

2.6.2. Transformada en frecuencias Reducidas, (TR)

Esta transformación, originada por la TZ, permite extender el concepto de frecuencia a las señales a tiempo discreto.

La TR

Si escribimos la transformada de Fourier (TF) de una señal a tiempo continuo:

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi j\nu t}dt$$

Para llevar esta TF a señales a tiempo discreto hay que hacer lo sgte: Reemplazar la integral $\int$ por una sumatoria $\sum$ (una série discreta) y cambiar la variable temporal t continua por un tiempo discreto n. Para una señal muestreada con un período de muestreo T_E, el producto νt se trasnforma en $\nu n T_E$. Ahora introducimos la *frecuencia reducida*

$$\lambda = \nu T_E$$

que es un número sin dimensión, con lo cual:

$$X(\lambda) = TR[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-2\pi j\lambda n}$$

Esta transformada en frecuencias reducidas está relacionada a la transformada en Z, al hacer:

$$z = e^{2\pi j\lambda}$$

la TR es la TZ obtenida al describir, en el plano complejo de z, un círculo de radio 1 (cf. Figura 2.11). Esto se puede interpretar diciendo que la frecuencia está contenida en la *fase* de $z : 2\pi\lambda$.

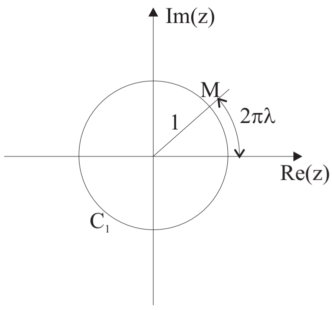


Figura 2.11: *Plano complejo de z y la frecuencia reducida*

Frecuencia y frecuencia reducida

A partir de la TR, uno puede encontrar la señal a tiempo discreto dada por:

$$x(n) = \int_{+1/2}^{+1/2} X(\lambda)e^{2\pi j\lambda n}d\lambda$$

Esta expresión permite de re encontrar la interpretación frecuencial que habíamos dado a las señales a tiempo continuo. La señal a tiempo discreto es una suma de señales a frecuencia pura $e^{2\pi j\lambda n}$. Para asociar a λ una dimensión de frecuencia, hay que introducir el período de muestreo, con lo cual, la frecuencia es: λ/T_e en [Hertz].
En la ecuación anterior, la integral no fue tomada entre $\pm\infty$ sino que enfrecuencias reales de $-1/(2T_E)$ a $1/(2T_E)$. Esto porque debe cumplir el teorema de Shanon del muestreo de señales que veremos más adelante.

Propiedades de la TR

Esta es lineal (como la TF, TL, TZ)

$$TR[ax(n) + by(n)] = aX(\lambda) + bY(\lambda)$$

La translación en el tiempo conduce a:

$$TR[x(n - n_0)] = X(\lambda)e^{-2\pi j\lambda n_0}$$

2.6.3. Algunos ejemplos

Integradores

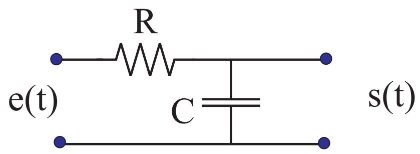


Figura 2.12: *Integrador analógico*

El integrador analógico clásico está formado de una resistencia R y de un condensador de capacidad C. La salida $s(t)$ está relacionada con la entrada $e(t)$ a través de la ecuación diferencial:

$$e(t) = s(t) + RC\frac{ds(t)}{dt}$$

Es también representado como un filtro de entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ tal que:

$$y(t) + \tau_R\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

Donde τ_R es la constante de tiempo (RC) del circuito.

La respuesta impulsional, $h(t)$, del integrador analógico está dada por

$$h(t) = \frac{1}{\tau_R} e^{-t/\tau_R}$$

se puede obtener calculando la TL de la ecuación con $x(t) = \delta(t)$, y luego usando la tabla de pares transformados de Laplace (función exponencial).
La función de transferencia en frecuencia $H(\nu)$ corresponde a la transformada de Fourier de $h(t)$ y se encuentra calculando la TL de $h(t)$ y luego imponiendo $s = 2\pi j\nu$:

$$H(\nu) = |H(\nu)|e^{j\phi_H(\nu)} = \frac{1}{1 + 2\pi j\nu\tau_R}$$

Este filtro calcula la integral de la señal de entrada en un intervalo de tiempo τ_R.
El INTEGRADOR DISCRETO se usa para señales discretas (muestreadas). También se comporta como un filtro, pero esta vez como filtro de tipo AR1 (Autoregresivo de retardo unitario).

$$y(n) - a_1 y(n-1) = x(n) \qquad 0 \leq a_1 \leq 1$$

La respuesta impulsional de este integrador es:

$$h(n) = a_1^n u(n)$$

Obviamente con $u(n) = 1(n \geq 0)$ y $u(n) = 0(n < 0)$.
La función de transferencia se puede calcular usando la TZ sobre $h(n)$ considerando la relación $\sum_0^\infty br^n = b/(1-r)$

$$TZ[h(n)] = H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_1^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_1/z)^n 1 = \frac{1}{1 - a_1/z}$$

También se puede calcular tomando la TZ de la ecuación del filtro AR1, con el lado derecho $x(n) = \delta(n)$.

$$H(z) - a_1 H(z) z^{-1} = 1$$

Con lo cual la función de transferencia en Z es:

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{z}{z - a_1}$$

Y la función de transferencia en frecuencias reducidas se obtiene haciendo: $z = e^{-2\pi j\lambda}$, con lo cual:

$$H(\lambda) = |H(\lambda)|e^{j\phi_H(\lambda)} = \frac{1}{1 - a_1 e^{-2\pi j\lambda}}$$

El POLO de este filtro es : $z_p = a_1$ (cf. Figura 2.13).

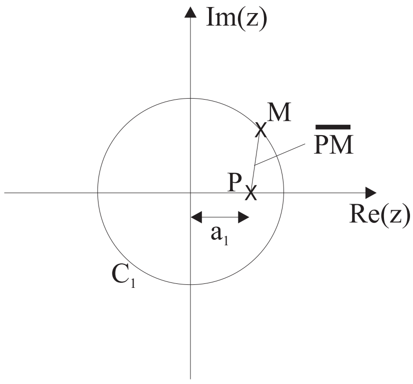


Figura 2.13: *Polo del integrador discreto*

El módulo de la función de transferencia en Z puede deducirse GEOMÉTRICAMENTE a través de la posición del POLO:

$$|H(\lambda)| = |\frac{e^{2\pi j\lambda}}{e^{2\pi j\lambda} - a_1}| = \frac{1}{|e^{2\pi j\lambda} - a_1|}$$

Sea M un punto que describe el círculo de radio 1, $e^{2\pi j\lambda}$. Sea P el punto a_1 (cf. Figura 2.13).

$$|H(\lambda)| = \frac{1}{PM}$$

El módulo de la función de transferencia del filtro se VE como el inverso de la distancia del segmento MP. El tiempo de integración puede relacionarse de manera simple al MÓDULO DEL POLO.

$$h(nT_E) = u(n)e^{n\log|z_p|}$$

Donde el tiempo de integración es : $\tau_R = -\frac{T_E}{\log|z_p|}$

2.6.4. Problemas Propuestos

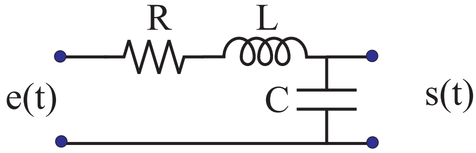


Figura 2.14: *Resonador Analógico*

Resonador Analógico

El circuito resonante analógico de la figura 2.14 está constituído por una resistencia R en série con una inductancia L y un condensador de capacidad C.

1. Encuentre la ecuación diferencial que gobierna la salida $s(t)$ en función de la entrada $e(t)$.
2. Calcule la respuesta impulsional $h(t)$
3. Calcule la función de transferencia $H(s)$ y $H(j\omega)$.
4. Calcule la frecuencia de resonancia. Para ello, Ud. debe saber que la frecuencia de resonancia ω_r hace diverjer la función $H(j\omega)$.

Resonador Numérico

El circuito resonante de la figura 2.14 puede ser descrito por una ecuación de diferencias tipo filtro AR2 que relaciona la entrada $e(n)$ con la salida $s(n)$.

$$s(n) - a_1 s(n-1) - a_2 s(n-2) = e(n)$$

Para obtener un filtro resonante debe considerar $a_1 = 2\rho\cos\theta$, $a_2 = -\rho^2$ ($0 < \rho < 1$, con ρ cercano a 1).

1. Escriba la respuesta impulsional del filtro AR2, $h(n)$
2. Escriba la función de transferencia en Z
3. Escriba la función de transferencia en frecuencias reducidas TR
4. Encuentre los polos de $H(z)$ y estime geométricamente el módulo de la función de transferencia $|H(\lambda)|$.

Transformada de Fourier

Encuentre la TF de :

1. $$f(t) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at}\sin(bt) & x > 0 \end{cases}$$

2. Si $G(\nu) = TF[g(t)]$, calcule la TF de
$$f(at)e^{ibt}$$
en función de $G(\nu)$ con $a > 0$

3. Si $f(t) = dg/dt$, $\int_{t_0}^{t} f(t')dt' = g(t) - g(t_0)$. Encuentre la $TF[\int_{t_0}^{t} f(t')dt']$ en función de $G(\nu)$ y $R(t_0)$.

4. Demuestre que la función delta se puede expresar como

$$\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu(t-t_0)} d\nu$$

Calcule la TF del producto de convolución entre $\delta(t - t_0)$ y $\cos(2\pi\nu_0 t)$

5. Determine la primera derivada de la función-δ de Dirac $d\delta(t - t_o)/dt$.

6. Use el teorema del producto de convolución aplicado a las trasnformadas de Fourier para evaluar la integral

$$f(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-t')^2/2} e^{-t'^2/2} dt'$$

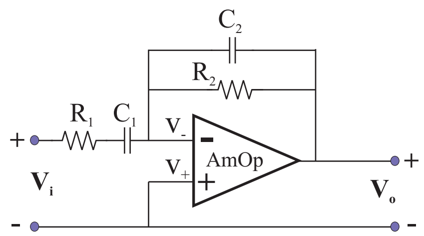
Transformada de Laplace

Calcule las funciones de transferencia del circuito de la figura 2.15 a). Use las leyes de Mallas y Nodos de Kirchhoff y acuérdese que

$$\begin{array}{rcl} V = & Ri & \text{ley de Ohm} \\ i = & C\frac{dV}{dt} & \text{condensador} \\ V = & L\frac{di}{dt} & \text{inductancia} \\ V_+ & = V_- & \text{en la entrada del AmOp} \end{array}$$

Encuentre el diagrama de bloque del circuito. Puede utilizar la regla de Mason.

(a)



(b)

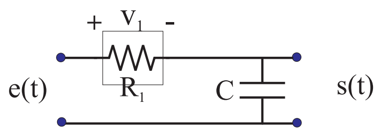


Figura 2.15: *a) Circuito con AmOp b) Circuito RC con componente No Lineal*

Linearización

1. Encuentre la ecuación diferencial del circuito de la figura 2.15 b), donde la resistencia R_1 es un componente **no lineal** de las sgtes. características: la corriente a través de la resistencia R_1 es $i_1 = F(v_1) = v_1^3$. Considere que el régimen de equilibrio está dado por una entrada $e(t) = e_0$ generando una salida $s(t) = s_0$. Suponga que el circuito es perturbado $e(t) = e_0 + \epsilon(t)$ con $\langle \epsilon(t) \rangle \ll e_0$. Aplique las reglas de linealización para obtener una ecuación diferencial linealizada. Encuentre la función de transferencia del sistema.

2. El estanque cónico de la figura 2.16 a) recibe un caudal de agua $q(t)$ y evacúa a través del orificio inferior a una tasa $q_R(t)$. Suponga que el estanque está funcionando en régimen estacionario donde la altura de líquido es h_0, y el volumen es V_0. Encuentre la ecuación diferencial que gobierna la variación de volumen del estanque. Esta es una ecuación **no lineal**. Si Ud. quiere estudiar el comportamiento del sistema frente a perturbaciones de altura $h(t) = h_0 + h_\epsilon (h_\epsilon \ll h_0)$, y de caudal de entrada $q(t) = q_0 + q_\epsilon (q_\epsilon \ll q_0)$ debe linealizar las ecuaciones. Encuentre la función de transferencia del sistema. Dibuje el diagrama de bloque, considerando las perturbaciones como entradas adicionales al sistema.

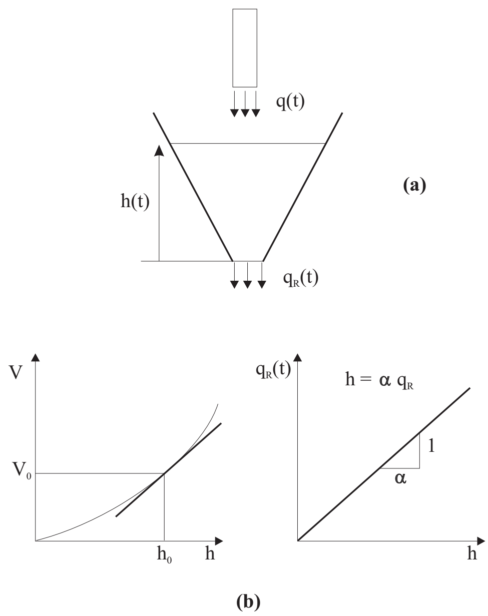


Figura 2.16: *a) Estanque cónico b) Curvas características*

Capítulo 7

Bibliografía

Bibliografía

[1] Coughanor, D.R., & L.B. Koppell, Process Systems Analysis and Control, McGraw-Hill, New York, 1965

[2] Denn, M.M., Process Modelling, Longman, New York & London, 1986

[3] Franks, R.G.E., Modelling, and Simulation in Chemical Engineering, John Wiley & Sons Inc., New York, 1972

[4] Gould, L.A., Chemical Process Control: theory and Applications, Addison-Wesley, 1969

[5] Luyben, W.L., Process Modelling, Simulation, and Control for Chemical Engineers, McGraw-Hill, Kogakusha, Tokio, 1973

[6] A. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw Hill, New York, 1965

[7] Capítulo 1: Introduction to Modern Control Theory, in: F.L. Lewis, Applied Optimal Control and Estimation, Prentice-Hall, 1992.