

MA609 Análisis II. Semestre 2010-02

Profesor: Rafael Correa Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Tarea 1

Entrega 19 de noviembre de 2010

1. Sea $X \neq \emptyset$, y δ la medida de Dirac sobre X con respecto al punto a , es decir, $\delta(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$. Muestre que toda $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y que $\int f d\delta = f(a)$.
2. Sea $\{\mu_n\}$ una sucesión creciente de medidas definidas sobre una semi-álgebra $\mathcal{S}$, es decir, $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ para todo $A \in \mathcal{S}$ y para todo n . Defina $\mu: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ por $\mu(A) = \sup\{\mu_n(A)\}$ para cada $A \in \mathcal{S}$. Muestre que μ es una medida.
3. Sea $\mathcal{S}$ una semi-álgebra, y sea $\mu: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ una función de conjuntos tal que $\mu(A) < \infty$ para algún $A \in \mathcal{S}$. Muestre que si μ es σ -aditiva, entonces μ es una medida.
4. Considere una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no decreciente y continua a la izquierda. Considere $\mu: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ definida por $\mu([a, b)) = f(b) - f(a)$, donde $\mathcal{S}$ es la semi-álgebra

$$\mathcal{S} = \{[a, b): -\infty < a \leq b < \infty\}.$$

Pruebe que μ es una medida.

5. Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, y sea A denso en $\mathbb{R}$. Muestre que una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es medible ssi $\{x \in X: f(x) \geq a\}$ es medible para cada $a \in A$.
6. Dé un ejemplo de una función f no medible tal que $|f|$ es medible y $f^{-1}(a)$ es medible para cada $a \in \mathbb{R}$.
Indicación: Considere E un conjunto no Lebesgue medible de $[0, 1]$ y defina $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in E \\ -x & \text{si } x \in [0, 1] \setminus E. \end{cases}$$

7. Muestre que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua c.t.p., entonces f es Lebesgue medible.
8. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Muestre que f' es Lebesgue medible.
9. Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Muestre que:
 - a) $|f|^p$ es medible para todo $p \geq 0$.
 - b) Si $f(x) \neq 0$ para cada $x \in X$, entonces $1/f$ es medible.
10. Sean $\{f_n: X \rightarrow \mathbb{R}\}$ una sucesión de funciones sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Muestre que los siguientes conjuntos son medibles:
 - a) $A = \{x \in X: f_n(x) \rightarrow \infty\}$,
 - b) $B = \{x \in X: f_n(x) \rightarrow -\infty\}$, y
 - c) $C = \{x \in X: \lim f_n(x) \text{ existe en } \mathbb{R}\}$.
11. Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. Suponga que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua. Muestre que $g \circ f$ es una función medible.
12. Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de funciones continuas definidas sobre $\mathbb{R}$ tomando valores reales. Suponga que existe $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $f \in \mathcal{F}$. Muestre que la función $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \sup\{f(x): f \in \mathcal{F}\}$$

es Lebesgue medible.

13. Muestre que un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es Lebesgue medible si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un cerrado $F \subset \mathbb{R}$ tal que $F \subset E$ y $\lambda(E \setminus F) < \varepsilon$.
14. Muestre que si un subconjunto E de $[0, 1]$ satisface $\lambda(E) = 1$, entonces E es denso en $[0, 1]$.
15. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aditiva (es decir, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$) y Lebesgue medible. Muestre que f es continua y por lo tanto $f(x) = cx$.
16. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto Lebesgue medible de medida finita. Muestre que la función $f_E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f_E(x) = \lambda(E \triangle (x + E)),$$

es uniformemente continua.

17. Una función $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) se dice convexa si $F(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda F(s) + (1 - \lambda)F(t)$ para todo $s, t \in (a, b)$ y $\lambda \in (0, 1)$.

(i) Pruebe que F es convexa ssi para todo s, t, s', t' en (a, b) tal que $s \leq s' < t' < t$ y $s < t \leq t'$,

$$\frac{F(t) - F(s)}{t - s} \leq \frac{F(t') - F(s')}{t' - s'}.$$

- (ii) Pruebe que F es convexa ssi F es absolutamente continua sobre cada subintervalo compacto de (a, b) y que F' es creciente (sobre el conjunto donde está definida).
- (iii) Pruebe que si F es convexa y $t_0 \in (a, b)$, entonces existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $F(t) - F(t_0) \geq \beta(t - t_0)$ para todo $t \in (a, b)$.
- (iv) *Desigualdad de Jensen.* Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida con $\mu(X) = 1$, $g: X \rightarrow (a, b)$ está en $L^1(\mu)$, y F es convexa en (a, b) , entonces

$$F\left(\int g d\mu\right) \leq \int F \circ g d\mu.$$

Indicación: Considere $t_0 = \int g d\mu$, $t = g(x)$ y aplique (iii).

18. Sea f una función integrable, y sean $\{E_n\}$ una sucesión disjunta de conjuntos medibles de X . Pruebe que si $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

19. Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f, f_1, f_2, \dots$ funciones no negativas e integrables tal que $f_n \rightarrow f$ c.t.p. y $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$. Pruebe que si E es un conjunto medible, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

20. Sea $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \delta$. Muestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f(nx) dx = a\delta$ para cada $a > 0$.