MA609 Análisis II. Semestre 2010-01
Profesor: Rafael Correa **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Auxiliar # 1

18 de agosto de 2010

P1. Sea $C([0,1]) = C([0,1];\mathbb{R})$ dotado de la norma usual

$$\|u\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|.$$

Considere $E = \{u \in C([0,1])\ ;\ u(0) = 0\}$, de manera que E es un subespacio cerrado de $C([0,1])$. Considere la forma lineal

$$f\colon u \in E \mapsto f(u) = \int_0^1 u(t)dt.$$

a) Muestre que $f \in E'$ y calcule $\|f\|_{E'}$.

b) ¿se puede encontrar $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E'}$?

P2. Sea $\mathcal{F}$ una familia de operadores en $\mathcal{L}(E,E)$ con E Banach reflexivo, y $\mathcal{C} \subset E$ un conjunto convexo, cerrado y acotado en E. Suponga que

$$T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C} \quad \text{para todo } T \in \mathcal{F}$$

y que $ST = TS$ para todo $S, T \in \mathcal{F}$. El objetivo de este problema es demostrar el *Teorema del punto fijo de Markov*: Existe $x \in \mathcal{C}$ tal que

$$T(x) = x \quad \text{para todo } T \in \mathcal{F}.$$

(i) Demuestre el *Teorema del punto fijo de Markov.*
Para ello siga el siguiente esquema.

(a) Para $T \in \mathcal{F}$ defina

$$T_n = \frac{1}{n}\left(I + T + \cdots + T^{n-1}\right), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Muestre que para todo $n, m = 1, 2, \ldots$ se tiene que

$$T_n S_m(\mathcal{C}) \subset T_n(\mathcal{C}) \cap S_m(\mathcal{C}), \quad \text{para todo } S, T \in \mathcal{F},$$

(b) Use la parte (a) para probar que

$$\mathcal{M} \equiv \bigcap_{n\geq 1,\, T\in\mathcal{F}} T_n(\mathcal{C}) \neq \emptyset.$$

Indicación: Dote a E de la topología $\sigma(E, E')$.

(c) Sea $x \in \mathcal{M}$, y suponga que existe $T \in \mathcal{F}$ y $f \in E'$ con $\langle f, Tx - x\rangle = 1$. Deduzca la existencia, para cada $n \geq 1$, de $y_n \in \mathcal{C}$ con la propiedad que $n = \langle f, T^n y_n - y_n\rangle = 0$. Deduzca de esto una contradicción, y pruebe por último el teorema.

(ii) Demuestre el *Teorema del punto fijo de Markov.*
Para ello siga el siguiente esquema alternativo.

(a) Pruebe que si $T \in \mathcal{F}$ entonces $\exists x \in \mathcal{C}$ tal que $T(x) = x$.
Indicación: Por contradicción, defina $\Delta := \{(x,x) \,\big|\, x \in \mathcal{C}\} \subset E \times E$ y $\Gamma := \{(x, Tx) \,\big|\, x \in \mathcal{C}\} \subset E \times E$. Usando el teorema de Hahn-Banach pruebe que existen $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\ell_1(x) + \ell_2(x) \leq \alpha < \beta \leq \ell_1(y) + \ell_2(Ty) \quad \forall x, y \in \mathcal{C}.$$

Muestre que para $x \in \mathcal{C}$ fijo $\ell_2(Tx) - \ell_2(x) \geq \beta - \alpha$, deduzca que $\ell_2(T^n x) - \ell_2(x) \geq n(\beta - \alpha)$ y concluya.

(b) Para $T, S \in \mathcal{F}$ defina $K_T = \{x \in \mathcal{C} \,|\, T(x) = x\}$ y $K_S = \{x \in \mathcal{C} \,|\, S(x) = x\}$. Demuestre que $T(K_S) \subset K_S$, $T|_{K_S}$ posse un punto fijo y por lo tanto $K_T \cap K_S \neq \emptyset$.

(c) Demuestre el *Teorema del punto fijo de Markov.*
Indicación: Recuerde que K es compacto si y sólo si toda familia $(F_i)_{i\in I}$ de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

P3. Sea E un e.v.n. Diremos que la norma $\|\cdot\|$ es estrictamente convexa si

$$\|tx + (1-t)y\| < 1, \forall x, y \in E\, x \neq y,\ \|x\| = \|y\| = 1,\ \forall t \in (0,1).$$

Diremos que una función $\varphi\colon E \to (-\infty, +\infty]$ es estrictamente convexa si

$$\varphi(tx + (1-t)t) < t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \quad \forall x, y \in E,\ x \neq y,\ \forall t \in (0,1).$$

Muestre que la norma $\|\cdot\|$ es estrictamente convexa si y sólo si la función $\varphi(x) = \|x\|^2$ es estrictamente convexa.

P4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Para cada $x \in E$ definimos la aplicación de dualidad por

$$F(x) = \{f \in E'\,;\, \|f\| = \|x\| \text{ y } \langle f, x\rangle = \|x\|^2\}.$$

a) Muestre que
$$F(x) = \{f \in E'\,;\, \|f\| \leq \|x\| \text{ y } \langle f, x\rangle = \|x\|^2\},$$
y deduzca que $F(x)$ es no vacío, convexo y cerrado.

b) Muestre que si E' es estrictamente convexo, entonces $F(x)$ se reduce a un elemento.

c) Muestre que
$$F(x) = \{f \in E'\,;\, \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geq \langle f, y - x\rangle\, \forall y \in E\}.$$

d) Muestre que
$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in E$$
y deduzca que
$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq (\|x\| - \|y\|)^2 \quad \forall x, y \in E.$$

e) Suponga que E' es estrictamente convexo. Sean $x, y \in E$ tales que
$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle = 0$$
Muestre que $F(x) = F(y)$.