MA609 Análisis II. Semestre 2010-02
Profesor: Rafael Correa **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Clase auxiliar # 9

15 de noviembre de 2010

1. *Borel-Cantelli.* Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una familia de conjuntos medibles y tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty.$$

   a) Muestre que $E := \limsup_{k\to\infty}(E_k)$ es medible.

   b) Pruebe que $\mu(E) = 0$.
   Indicación: Recuerde que $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} E_k$.

2. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles sobre $[0,1]$ con $|f_n(x)| < \infty$ c.t.p.. Muestre que existe una sucesión c_n de números real positivos tales que

$$\frac{f_n(x)}{c_n} \to 0 \quad c.t.p.$$

   Indicación: Considere c_n tal que $\mu(\{x : \ |f_n(x)/c_n| < 1/n\}) < 2^{-n}$, y aplique el lema de Borel-Cantelli.

3. *Desigualdad de Tchebychev.* Sea $f \geq 0$ e integrable. Si $\alpha > 0$ y $E_\alpha = \{x \colon f(x) > \alpha\}$. Pruebe que

$$\mu(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int f.$$

4. Sean $f > 0$, $E_{2^k} = \{x \colon f(x) > 2^k\}$ y $F_k = \{x \colon 2^k < f(x) \leq 2^{k+1}\}$. Si f es finita c.t.p., entonces

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} F_k = \{f(x) > 0\},$$

   y los F_k son disjuntos.
   Pruebe que f es integrable si y sólo si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(F_k) < \infty, \quad \text{si sólo si} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(E_{2^k}) < \infty.$$

   Use este resultado para verificar las siguientes afirmaciones.
   Sean

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-a} & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sino,} \end{cases}$$

   y

$$g(x) = \begin{cases} |x|^{-b} & \text{si } |x| > 1, \\ 0 & \text{sino,} \end{cases}$$

   Entonces f es integrable sobre $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $a < n$ y g es integrable sobre $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $b > n$.