

MA609 Análisis II. Semestre 2010-02

Profesor: Rafael Correa Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Lectura: “Integración por partes y cambio de variables”

22 de octubre de 2010

Proposición. Sean f, g dos funciones integrables sobre un intervalo $[a, b]$. Si F es una primitiva de f y G una primitiva de g , entonces fG, Fg son integrables, y

$$\int_a^b fGdx + \int_a^b Fgdx = F(b)G(b) - G(a)F(a) =: [FG]_a^b.$$

Demostración. F y G son dos funciones continuas sobre el intervalo compacto $[a, b]$, luego son acotadas por una constante M y por lo tanto fG y Fg son integrables. Además FG es absolutamente continua y a variación acotada. En efecto:

$$\begin{aligned} |F(\beta)G(\beta) - F(\alpha)G(\alpha)| &= |(F(\beta) - F(\alpha))G(\beta) - F(\alpha)(G(\beta) - G(\alpha))| \\ &\leq M|F(\beta) - F(\alpha)| + M|G(\beta) - G(\alpha)| \end{aligned}$$

válido sobre todo sub intervalo de $[a, b]$. Por otro lado

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \quad \text{c.t.p.}$$

y usando la fórmula generalizada de Newton-Leibniz,

$$\int_a^b fGdx + \int_a^b Fgdx = \int_a^b fG + Fgdx = [FG]_a^b$$

□

Proposición. Sea $x: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y absolutamente continua, con $a = x(\alpha)$ y $b = x(\beta)$. Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces la función $f \circ x x'$ es integrable sobre $[\alpha, \beta]$, y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt. \quad (1)$$

Demostración. (i) La proposición se verifica directamente si f es una función en escalera.

(ii) Probemos el siguiente resultado técnico: si E es un subconjunto despreciable de $[a, b]$, entonces

$$D := \{t \in [\alpha, \beta] : x(t) \in E \text{ y } x'(t) > 0\}$$

es un subconjunto despreciable de $[\alpha, \beta]$. En efecto, existe una sucesión de intervalos abiertos I_k , de largo total finito tal que cada $x \in E$ pertenece a una cantidad infinita de I_k . Luego las funciones

$$\sum_{k=1}^n \chi_{I_k}(x(t))x'(t) \quad (2)$$

forma una sucesión creciente c.t.p., y las integrales definen una sucesión acotada. En efecto, utilizando la parte (i)

$$0 \leq \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^n \chi_{I_k}(x(t))x'(t)dt = \sum_{k=1}^n \int_a^b \chi_{I_k}(x)dx \leq \sum_{k=1}^\infty |I_k| < \infty.$$

y aplicando TCM, se concluye que la sucesión (2) converge c.t.p.. Pero (2) tiende a ∞ sobre todo punto $t \in D$, por lo tanto D es despreciable.

- (iii) Supongamos que $f \in C_1$, y tomemos una sucesión $\varphi_n \subset C_0$ tal que $\varphi_n \nearrow f$ c.t.p.. Sea E el conjunto despreciable de puntos $x \in [a, b]$ donde $\varphi_n \not\rightarrow f(x)$, y consideremos el despreciable D anterior. Como $x'(t) \geq 0$ c.t.p., la sucesión de funciones medibles

$$\varphi_n(x(t))x'(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

es creciente c.t.p.. Además

$$\varphi_n(x(t))x'(t) \rightarrow f(x(t))x'(t) \quad \text{c.t.p. en } [\alpha, \beta].$$

En efecto, los puntos excepcionales pertenecen a D o al conjunto de puntos donde x no es derivable, y los dos conjuntos son despreciables. Finalmente, las integrales convergen pues, utilizando (i),

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n(x(t))x'(t)dt = \int_a^b \varphi_n(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx.$$

Aplicando TCM, se concluye que $(f \circ x)x'$ es integrable y la igualdad (1) es cierta.

□