MA609 Análisis II. Semestre 2010-02
Profesor: Rafael Correa **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Clase auxiliar # 4

8 de septiembre de 2010

1. Sea E un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ dos normas en E tales que $(E, \|\cdot\|_1)$ y $(E, \|\cdot\|_2)$ son Banach. Demuestre que si existe $C > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ para todo $x \in E$, entonces existe $C' > 0$ tal que $\|x\|_2 \leq C'\|x\|_1$.

2. *a)* Pruebe que existe una constante K tal que $|p'(0)| \leq K \int_1^2 |p(t)|dt$ para todo polinomio p de grado menor o igual a 100.

   b) Sean $\ell_n \colon C([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ el funcional $\ell_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x(\frac{k}{n}) - \int_0^1 x(t)dt$. Pruebe que ℓ_n es lineal continuo, $\ell_n(x) \to 0$ para todo $x \in C([0,1];\mathbb{R})$, pero $\|\ell_n\|_*$ no tiende a cero.

   c) Sea $\|\cdot\|$ una norma en $C([0,1];\mathbb{R})$ con la cual es una Banach y supongamos que $\|x_n\| \to 0$ implica $x_n(t) \to 0$ para todo $t \in [0,1]$. Pruebe que $\|\cdot\|$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_\infty$.
   Indicación: grafo cerrado.

3. En $C([0,1],\mathbb{C})$ se define el producto interno y la norma

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

   Para $f \in C([0,1],\mathbb{C})$ definimos también

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

   Sea $X \neq \emptyset$ un subespacio vectorial de $C([0,1],\mathbb{C})$ tal que $(X, \|\ \|_2)$ sea completo.

   a) Pruebe que existe $M > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq M\|f\|_2$ para todo $f \in X$.
   Ind.: utilice el teorema del grafo cerrado.

   b) Sea $\{f_1, \ldots, f_n\}$ un conjunto ortonormal en X. Para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ definimos $f_x(t) = \sum_{i=1}^n x_i f_i(t)$. Verifique

$$|f_x(t)| \leq M(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2} \quad \forall t \in [0,1], \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

   c) Deduzca que $\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^2 \leq M^2\ \forall t \in [0,1]$. Concluya que X tiene dimensión finita.

4. Sea ℓ^p el espacio de sucesiones complejas $\mathbf{x} = (x_k)_{k\geq 1}$ con $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$.
   (a) Sea $X = \{\mathbf{x} : (kx_k)_{k\geq 1} \in \ell^1\}$. Probar que $X \subseteq \ell^1$ y que el operador $T : X \to \ell^1$ dado por $T(\mathbf{x}) = (kx_k)_{k\geq 1}$ es lineal y tiene grafo cerrado. Deducir que $(X, \|\cdot\|_1)$ no es completo.
   (b) Sea $c_k \in \mathbb{C}$ una sucesión tal que el límite $\sum_{k=1}^\infty c_k x_k$ existe para todo $\mathbf{x} \in \ell^p$. Probar que el funcional $l(x) = \sum_{k=1}^\infty c_k x_k$ está en $(\ell^p)^*$.
   (c) Sea $c_{nk} \in \mathbb{C}$ una *matriz* doblemente infinita $(n, k = 1, 2, \ldots)$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \ell^p$ y cada $n \geq 1$, el límite $y_n = \sum_{k=1}^\infty c_{nk} x_k$ existe y se tiene $\mathbf{y} = (y_n)_{n\geq 1} \in \ell^r$. Probar que la aplicación $T : \ell^p \to \ell^r$ definida por $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ es lineal y continua.

5. Consideremos a continuación el sistema numerable de ecuaciones lineales

$$(S) \qquad \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} x_k = b_n; \qquad n = 1, 2, \ldots$$

con $\mathbf{b} = (b_n)_{n\geq 1} \in \ell^p$. Suponemos que los coeficientes $c_{nk} \in \mathbb{C}$ satisfacen **P4)**(c) con $r = p$ y buscamos una solución $\mathbf{x} \in \ell^p$. Supongamos $p \in (1, \infty)$ y sea q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Probar que $\|T\| \leq [\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}|^q)^{\frac{p}{q}}]^{\frac{1}{p}}$.

(b) Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} [|1 - c_{nn}|^q + \sum_{k\neq n}^{\infty} |c_{nk}|^q]^{\frac{p}{q}} < 1$ entonces (S) posee una única solución la cual es una función lineal contínua de $\mathbf{b}$.