

MA609 Análisis II. Semestre 2010-02

Profesor: Rafael Correa Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

**Auxiliar # 3**

3 de septiembre de 2010

Sea  $Y$  un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado  $X$ . Para cada  $x \in X$ , definimos la clase de  $x$  relativa a  $Y$  como

$$[x] = \{z \in X; (x - z) \in Y\} = \{x + y; y \in Y\}.$$

Definimos el espacio cociente  $X/Y = \{[x]; x \in X\}$  dotado con la suma y multiplicación por escalar definidas por  $[x] + [y] = [x + y]$  y  $\lambda[x] = [\lambda x]$

1. Pruebe que  $X/Y$  es un espacio vectorial y que  $\|[x]\| = \inf\{\|y\|; y \in [x]\}$  convierte a  $X/Y$  es un espacio vectorial normado.
2. Pruebe que si  $Y$  es un subespacio cerrado de un espacio de Banach  $X$ , entonces  $X/Y$  es un espacio de Banach.
3. Pruebe que la distancia  $d(x)$  de un punto  $x = (x_i) \in \ell^\infty$  a  $c_0$  es igual a  $\limsup_{i \rightarrow \infty} |x_i|$ . Así, la norma en  $\ell^\infty/c_0$  es  $\|[x]\| = \limsup_{i \rightarrow \infty} |x_i|$ .  
*Hint:* Existe una cantidad finita de  $i$ 's tales que  $|x_i| > \limsup_{i \rightarrow \infty} |x_i| + \varepsilon$ .

4. Sea  $Y$  un subespacio cerrado de un espacio de Banach  $X$ . Muestre que si  $X$  es separable, entonces  $Y$  y  $X/Y$  son separables. Muestre que si  $Y$  y  $X/Y$  son separables, entonces  $X$  es separable.  
*Hint:* Si  $\{[x_n]\}$  es denso en  $X/Y$  y  $\{x_n\}$  es denso en  $Y$ , escogiendo  $y_n \in [x_n]$  y considerando  $\{y_n + x_k; n, k \in \mathbb{N}\}$ , obtenemos un denso en  $X$ .

Para  $Y \subset X$ , definimos el aniquilador de  $Y$  como  $Y^\perp = \{f \in X^*; f(y) = 0 \text{ para todo } y \in Y\}$ . Similarmente, para  $Y \subset X^*$  definimos  $Y_\perp = \{x \in X; f(x) = 0 \text{ para } f \in Y\}$ .

5. Sea  $Y$  un subespacio cerrado de un espacio de Banach  $X$ . Demuestre que  $(X/Y)^*$  es isométrico a  $Y^\perp$  y que  $Y^*$  es isométrico a  $X^*/Y^\perp$ .  
*Hint:* Considere las aplicaciones  $\delta: Y^\perp \rightarrow (X/Y)^*$  definida por  $\delta(x^*): [x] \mapsto x^*(x)$  y  $\sigma: Y^* \rightarrow X^*/Y^\perp$  definida por  $\sigma(y^*) = \{ \text{todas las extensiones de } y^* \text{ sobre } X \}$ .
6. Muestre que si  $Y$  es un subespacio de un espacio de Banach  $X$  y  $X^*$  es separable, entonces  $Y^*$  también lo es.  
*Hint:* Recuerde que  $Y^*$  es isomorfo al espacio separable  $X^*/Y^\perp$ .
7. Sean  $X, Y$  espacios vectoriales normados,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Muestre que  $\hat{T}: X/\text{Ker}(T) \rightarrow Y$  definido por  $\hat{T}([x]) = T(x)$  es un operador lineal continuo.
8. Sea  $Y$  un subespacio cerrado de un espacio de Banach reflexivo  $X$ . Muestre que  $X/Y$  es reflexivo.  
*Hint:*  $(X/Y)^* = Y^\perp \subset X^*$  y  $X^*$  es reflexivo.
9. Sea  $Y$  un subespacio cerrado de un espacio de Banach  $X$ . Muestre que si  $Y$  y  $X/Y$  son reflexivos, entonces  $X$  es reflexivo.  
*Hint:* Si  $Y$  es reflexivo, entonces  $Y$  es \*-débil cerrado en  $X^{**}$ . Así  $Y = (Y^\perp)^\perp$ . Entonces  $X^{**}/Y^{\perp\perp} = (Y^\perp)^*$  y  $Y^* = (X/Y)^*$ , luego  $(Y^\perp)^* = (X/Y)^{**} = X/Y$ . Consecuentemente  $X = X^{**}$ .
10. Sea  $X$  un espacio de Banach reflexivo,  $Y$  un espacio de Banach y sea  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  sobreyectivo. Muestre que  $Y$  es reflexivo.  
*Hint:*  $Y$  es isométrico a  $X/\text{Ker}(T)$ .