

MA609 Análisis II. Semestre 2010-02

Profesor: Rafael Correa    Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

## Trabajo Dirigido # 3

30 de agosto de 2010

### P1. Banach-Steinhaus

Sea  $X$  un espacio de Banach.

- a) Diremos que un conjunto  $M \subset X$  es débilmente acotado si  $\sup\{|f(x)|; x \in M\} < \infty$  para cada  $f \in X^*$ . Demuestre que si  $M \subset X$  es débilmente acotado entonces  $M$  es acotado.
- b) Diremos que un conjunto  $M \subset X^*$  es \*-débilmente acotado si  $\sup\{|f(x)|; f \in M\} < \infty$  para cada  $x \in X$ . Demuestre que si  $M \subset X^*$  es \*-débilmente acotado entonces  $M$  es acotado.

*Hint:* Recuerde el teorema de Banach-Steinhaus: Sean  $X, Y$  espacios de Banach y  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(X; Y)$ . Si  $\mathcal{F}$  es puntualmente acotado, entonces  $\mathcal{F}$  es acotado en  $\mathcal{L}(X, Y)$ ,

**P2.** Mostrar que cada conjunto débilmente compacto  $C$  en un espacio de Banach es un conjunto acotado.

**P3.** Sea  $\{f_n\} \subset X^*$ . Muestre que si existe  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  tal que para cada  $x \in X$  existe  $K_x > 0$  con  $|f_n(x)| \leq K_x \varepsilon_n$ , entonces  $\|f_n\| \rightarrow 0$ .

*Hint:* Baire.

**P4.** Sea  $X$  un espacio de Banach. Supongamos que  $x_n \rightarrow x$  y  $f_n \in X^*$  es tal que  $f_n$  converge \*-débil a  $f$ . Muestre que  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ .

**P5.** Sea  $T \in \mathcal{L}(X, \ell^1)$ . Muestre que si  $X$  es reflexivo, entonces  $T$  es compacto.

*Hint:* Schur.

Sea  $T \in \mathcal{L}(c_0, X)$ . Muestre que si  $X$  es reflexivo, entonces  $T$  es un compacto.

*Hint:* Considere  $T^*$ .