

MA609 Análisis II. Semestre 2010-02

Profesor: Rafael Correa Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Trabajo Dirigido # 1

23 de agosto de 2010

P1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Pruebe que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $x \in X$ si y sólo si $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$ uniformemente sobre $x^* \in \partial B_{X^*}(0, 1)$.

P2. *Series de Neumann y aproximaciones sucesivas*

Sea E un espacio de Banach, $A : E \rightarrow E$ un operador lineal continuo tal que $\|A\| < 1$ y sea I el operador identidad en E .

a) Pruebe que $I - A$ posee una inversa continua sobre E dada por la serie de Neumann:

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

y satisface:

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

b) Pruebe **usando** el teorema de punto fijo de Banach que la ecuación

$$\varphi - A\varphi = f$$

posee una única solución para todo $f \in E$.

c) Dé un esquema iterativo para encontrar la solución de la ecuación.

d) Describa la ecuación y el método iterativo de resolución para el operador

$J : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ definido por:

$$(J(f))(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy$$

con $K : [0, 1] \times [0, 1]$ continua y tal que: $\sup_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |K(x, y)|dy < 1$.

P3. Definimos E el espacio de funciones continuas $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_E = \sup_{t \in (0, 1]} \frac{|f(t)|}{t} < \infty$$

$(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$.

Definimos $Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

a) Pruebe que $T : E \rightarrow E$ y que $\|T\| \leq 1/2$.

Para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ definimos

$$\varphi_\lambda(t) = t^\lambda, \quad t \in (0, 1].$$

b) Probar que si $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 1$ entonces $\varphi_\lambda \in E$ y que

$$T\varphi_\lambda = \frac{1}{\lambda + 1} \varphi_\lambda.$$

c) Probar que si $\operatorname{Re}(\lambda) < 1$ entonces $T - \frac{1}{1+\lambda}I$ es inyectiva.

Hint: resolver la ecuación

$$\lambda u - tu' = 0 \quad \text{in } (0, 1]$$

utilizando el factor integrante $t^{-\lambda-1}$.

d) Probar que si $\operatorname{Re}(\lambda) < 1$ entonces $T - \frac{1}{1+\lambda}I$ es sobreyectiva.

e) Encuentre $\sigma(T)$, indicando los valores propios de T . ¿Es T compacto?. Pruebe que

$$\|T\| = 1/2$$

P4. a) Sea X evn de dimensión infinita, pruebe que si X^* es separable entonces X también, para ello :

(i) Sea $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ denso en X^* . Demuestre la existencia de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ unitarios tales que $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \|f_n\|$.

(ii) Demuestre que $\langle \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle$ es denso en X .

Hint: Proceda por contradicción y utilice un corolario de Hahn-Banach.

(iii) Concluya.

b) Probaremos ahora que el recíproco no es cierto. Para esto consideramos el espacio ℓ^1 y probaremos que su dual se identifica con ℓ^∞ , proponiendo la isometría:

$$\begin{aligned} \Phi : \ell^\infty &\longrightarrow (\ell^1)^* \\ a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} &\longrightarrow \varphi_a \end{aligned}$$

con $\varphi_a(x_i)_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x_i$. Pruebe que:

(i) $\varphi_a \in (\ell^1)^*$ y que Φ es una isometría.

(ii) Pruebe que Φ es sobreyectiva. Para esto se recomienda construir una preimagen de un elemento $x' \in (\ell^1)^*$ a través de sus evaluaciones sobre la base canónica $a_i := x'(e_i)$, probar que esto entrega una sucesión a acotada y argumentando sobre un denso apropiado concluir que $\Phi(a) = x'$.

(iii) Demuestre que ℓ^∞ no es separable.

Hint: Considere $D = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y note que para todo par de puntos $a, b \in D$, $a \neq b$ se tiene que $\|a - b\|_\infty = 1$.

(iv) Con esto observe que Φ es la identificación entre ambos espacios, y usando que ℓ^∞ no es separable concluya.