MA57H Tópicos en Análisis Convexo I. Semestre 2010-02
Profesor: Rafael Correa **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Auxiliar 6

Miércoles 03 de Noviembre de 2010

P1. *Ejemplos simples*

Calcule la conjugada de Fenchel de las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por $f(x) := \dfrac{1}{x} + I_{(0,+\infty)}(x)$.

b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por $f(x) := -\sum_{i=1}^{n} \log \cos x_i + I_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}(x_i)$.

P2. *Inf-convolución de funciones convexas*

Sean $f, g \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dos funciones convexas y propias. Se define la inf-convolución (o suma epigráfica) de f y g como la función $f \Box g \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida, para todo $x \in X$, por

$$(f \Box g)(x) = \inf_{y \in X} \{f(y) + g(x - y)\} \tag{1}$$

a) Pruebe que $(f \Box g)$ es convexa y que $\operatorname{dom}(f \Box g) = \operatorname{dom} f + \operatorname{dom} g$.

b) Pruebe que $\operatorname{epi}_s(f \Box g) = \operatorname{epi}_s(f) + \operatorname{epi}_s(g)$, donde $\operatorname{epi}_s(\varphi) := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \colon \varphi(x) < \alpha\}$.

c) Pruebe que $(f \Box g)^* = f^* + g^*$.

d) Sea $A \subset X$ un subconjunto convexo no vacío de X. Pruebe que

$$f(x) = d(x, A) = (i_A \Box \| \cdot \|)(x)$$

y calcule f^*.

P3. *Funciones de penalización.*
Sea $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y coercitiva (i.e. $\lim_{\|x\| \to +\infty} F(x) = +\infty$).

a) Muestre que para todo subconjunto K no vacío y cerrado de $\mathbb{R}^n$ existe $x_K \in K$ tal que $F(x_K) = \inf\{F(x) \colon x \in K\}$.

b) Muestre que si F es estrictamente convexa y si K es convexo, entonces x_K es único.

c) Sea C un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de $\mathbb{R}^n$. Sea $\phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ convexa, tal que $\phi(x) = 0$ ssi $x \in C$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos F_n por

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad F_n(x) = F(x) + n\phi(x)$$

suponemos que F es estrictamente convexa.

1) Muestre que existe un único $x_n \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$F_n(x_n) = \inf\{F_n(x) \colon x \in \mathbb{R}^n\}.$$

2) Estudie la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.