MA57H Tópicos en Análisis Convexo I. Semestre 2010-02
Profesor: Rafael Correa **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Auxiliar 5

Miércoles 27 de Octubre de 2010

P1. *Envoltura s.c.i. de una función*

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Dada una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, se llama envoltura s.c.i de f a la función $\operatorname{cl} f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por:

$$\operatorname{cl} f(x) := \liminf_{y \to x} f(y) = \sup_{\delta > 0} \inf_{y \in B_\delta(x)} f(y) \qquad \forall x \in X. \tag{1}$$

Es claro que $\operatorname{cl} f \leq f$ y que $\operatorname{cl} f$ es s.c.i.

a) Muestre que para todo $x \in X$ se tiene que $\operatorname{cl} f(x) = \varphi(x)$, donde:

$$\varphi(x) := \min\{\liminf_{n} f(x_n) \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es una sucesión tal que } x_n \to x\}. \tag{2}$$

b) Sean $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) $g = \operatorname{cl} f$.
2) $\operatorname{epi} g = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} f)$.
3) $g = \sup\{h \mid h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ es s.c.i. y } h \leq f\} =: l(x)$.

c) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, muestre que las siguiente afirmaciones son equivalentes:

1) f es s.c.i.
2) $\operatorname{epi} f$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}$.
3) Los conjuntos de subnivel $[f \leq \lambda] := \{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, son cerrados.

d) Pruebe que $\inf_X f = \inf_X \operatorname{cl} f$. Concluya que $\arg\min f \subseteq \arg\min \operatorname{cl} f$.