

MA57H Tópicos en Análisis Convexo I. Semestre 2010-02

Profesor: Rafael Correa Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Auxiliar 4

Miércoles 20 de Octubre de 2010

P1. *Continuidad de funciones convexas.*

- a) Sean K un subconjunto convexo no vacío de un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ y f una función convexa de K en $\mathbb{R}$. Denotamos por $\text{int } K$ el interior de K . Supongamos que existe un punto $x_0 \in \text{int } K$ tal que f es acotada en una vecindad de x_0 , mas precisamente, existe $r > 0$ y $M \in \mathbb{R}$ tales que la bola cerrada $\overline{B}(x_0, r)$ de centro x_0 y radio r esta contenida en K y $f(x) \leq M$ para todo $x \in \overline{B}(x_0, r)$.

- 1) Mostrar que para todo $x \in K$

$$f(x_0) \leq f(x) + \frac{M - f(x_0)}{r} \|x - x_0\|.$$

- 2) Mostrar que para todo $x \in B(x_0, r)$

$$f(x) \leq f(x_0) + \frac{M - f(x_0)}{r} \|x - x_0\|.$$

- 3) Deducir que f es continua en x_0 .

- 4) Mostrar que f es acotada en una vecindad de todo punto de $\text{int } K$ y deduzca que f es continua sobre $\text{int } K$.

- 5) Muestre que f es localmente lipschitziana sobre $\text{int } K$, es decir, para todo $x \in \text{int } K$ existe $r > 0$ y $L > 0$ tal que la bola $B(x, r)$ esta contenida en K y

$$\forall x_1, x_2 \in B(x, r), \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L \|x_1 - x_2\|.$$

- b) Sea K un abierto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ y f una función convexa de K en $\mathbb{R}$. Muestre que f es continua sobre K y localmente lipschitziana sobre K .

P2. *Ejemplos de funciones convexas.* Sean X, Y dos e.v.n. y $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert.

- a) La función indicatriz de un conjunto $\emptyset \neq C \subset X$, es la función definida por

$$I_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C, \end{cases}$$

Pruebe que I_C es convexa si y sólo si C es convexo.

- b) Sean $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y $c \in [a, b]$. Pruebe que la función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_c^x g(t) dt$$

es convexa.

- c) Sea $F: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa. Pruebe que la función marginal $p: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$p(y) = \inf_{x \in X} F(x, y)$$

es convexa.

- d) Sea $C \subset X \times \mathbb{R}$ un convexo. Pruebe que la función $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$f(x) := \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid (x, \lambda) \in C \}$$

es convexa.

- e) Sean $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa y $A: X \rightarrow Y$ una aplicación lineal. Pruebe que la función $g: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$g(y) = \inf\{f(x) \mid Ax = y\}$$

es convexa.

- f) Sean $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funciones convexas. Pruebe que la ínf-convolución de f con g definida por

$$f \square g := \inf\{f(y) + g(x - y), y \in X\}$$

es convexa.

- g) Sea $a: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica sobre X y $A: X \rightarrow X$ una aplicación lineal tal que $a(x, Ax) \geq 0$ para todo $x \in X$. Pruebe que la función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := a(x, Ax)$$

es convexa.

- h) Sea $\{f_i: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, i \in I\}$ un conjunto arbitrario de funciones convexas. Pruebe que $\sup_{i \in I} f_i: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida por

$$\left(\sup_{i \in I} f_i\right)(x) := \sup_{i \in I} f_i(x)$$

es convexa.

- i) Si $f: H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexa. Pruebe que la *conjugada de Legendre-Fenchel* $f^*: H^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$f^*(x^*) := \sup\{\langle x^*, y \rangle - f(y) \mid y \in H\}$$

es convexa.

- j) Sea $\emptyset \neq C \subset H$. Pruebe que la función de *Asplund* definida por

$$f(x) := \|x\|^2 - d^2(x, C).$$

es convexa.

- k) Sea $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Pruebe que la función perspectiva de una función convexa f , definida por $g: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ con

$$g(x, t) := tf(x/t)$$

es convexa.