MA57H Tópicos en Análisis Convexo I. Semestre 2010-02
Profesor: Rafael Correa **Auxiliares:** Cristopher Hermosilla y Emilio Vilches

Auxiliar 2

Martes 5 de Octubre de 2010

P1. Dado un convexo no vacío $C \subset E$ de un espacio euclidiano, definimos su interior relativo como

$$x \in \operatorname{ir}(C) \quad \Leftrightarrow \quad \exists r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \cap \operatorname{aff}(C) \subset C.$$

a) Muestre que $\operatorname{ir}(C) \neq \emptyset$.

b) Muestre que si $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset$, entonces $\operatorname{ir}(C) = \operatorname{int}(C)$.

c) Muestre que $x_0 \in \operatorname{ir}(C)$ si y sólo si $0 \in \operatorname{ir}(C - x_0)$.

P2. *a*) Sea $C \subset E$ un convexo cerrado no vacío de un espacio euclidiano y sea $x_0 \notin C$. Muestre que existe $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\sup_{x \in C} \langle y, x \rangle < \langle y, x_0 \rangle$.

b) Sea $C \subset E$ un convexo de un espacio euclidiano de dimensión finita tal que $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset$. Muestre que las dos propiedades siguientes son equivalentes:

(i) $0 \notin \operatorname{int}(C)$.

(ii) Existe $y \in E \setminus \{0\}$ tal que $\sup_{z \in C} \langle y, z \rangle \leq 0$, y que existe $x_0 \in C$ tal que $\langle y, x_0 \rangle < 0$.

c) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexo no vacío. Muestre que las dos propiedades siguientes son equivalentes:

(i) $x_0 \notin \operatorname{ir}(C)$.

(ii) Existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sup_{x \in C} \langle y, x \rangle \leq \langle y, x_0 \rangle,$$

y existe $z_0 \in C$ tal que

$$\langle y, z_0 \rangle < \langle y, x_0 \rangle.$$

P3. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un cono, es decir, un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\lambda C \subset C$ para todo $\lambda > 0$. Definimos el cono polar de C como

$$C^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \langle y, x \rangle \leq 0 \text{ para todo } x \in C\}.$$

Muestre que C° es un cono convexo cerrado, y que si C es un cono convexo, entonces $C^{\circ\circ} = \overline{C}$.