FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea - MA57C-1 - Control Optimo, 10-2010

Primavera 2010 Prof. A. Jofré, A. Hantoute

Problem 1: Problema cuadrático lineal (LQ) sin restricción sobre el tiempo de llegada

Considere el sistema de control en $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & \frac{1}{2}x_2 \\ \dot{x}_2(t) = & \frac{1}{2}x_1 + u \end{cases}$$

$$C(u) = \int_0^T 2e^{-t}u(t)^2 + 2e^{-t}v(t)^2 + \frac{1}{2}e^{-t}x_1(t)^2 + \frac{1}{2}e^{-t}x_2(t)^2.$$

- Verifique que existe un control de ciclo cerrado (o control feedback).
- Escriba la ecuación de Riccati asociada al problema y calcule su solución.
- Calcule el control óptimo, la trayectoria optimal asociada, y el valor óptimo del problema.

Problem 2: Problema cuadrático (LQ) con restricción sobre el tiempo de llegada

Considere el problema de control en $\mathbb{R}^2$,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2,$$

I El objetivo en esta caso es obtener un control óptimo con la restrición $x(T) = 0$. Por esta razón modificamos el criterio C de la siguiente forma:

$$C(u) = \lim_{n \to +\infty} n \left\| x(T) \right\|^2 + \int_0^T \left\| x(t) \right\|^2 + \left\| u(t) \right\|^2.$$

- Demuestre que existe un control óptimo, ¿es único?
- Demuestre que existe una trayectoria que minimiza, ¿es unica?
- Pruebe que en el óptimo necesariamente $x(T) = 0$.

Suponga ahora que $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II El objetivo es obtener un control optimo con la restricción $x(0) = \bar{x}$, con $\bar{x}$ dado (tipo caso de filtro de Kalman). El criterio correspondiente es:

$$C(u) = \lim_{n \to +\infty} n \left\| x(0) - \bar{x} \right\|^2 + \int_0^T \left\| x(t) \right\|^2 + \left\| u(t) \right\|^2.$$

- Repita el análisis hecho en la parte **I** y muestre que existe un control optimo.

III Haga los desarrollos análogos a las partes **I** y **II** anteriores considerando el problema de seguimiento de la trayectoria $\xi(t) = (t, t)$.

IV Considere ahora que se asocia una observación al sistema anterior de la forma

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2 \\ &y(t) = tx_1(t); \end{aligned}$$

donde $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

- Estudie el problema de seguimiento asociado esta nueva trayectoria considerando la observación.

Problem 3: Control óptimo lineal cuadrático LQ

Considere la dinámica siguiente:

$$\ddot{x} + x = au, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1,$$

$$C(u) = \int_0^T x(t)^2 + \dot{x}(t)^2 + u(t)^2,$$

donde $T \in \ ]0, +\infty]$.

- Describa el comportamiento del sistema cuando $a = 0$.

Luego, suponga que $a = 1$ y $T < +\infty$.

- Muestre que existe una única trayectoria minimizante $x(t)$.
- Calcule el control óptimo asociado, verifique que se obtiene un control retroalimentado (o de ciclo cerrado).
- Calcule el costo minimo.

Problem 4: Control a horizonte infinito

Suponga que en el problema anterior $a = 1$ y $T = +\infty$.

- Muestre que existe una única trayectoria $x(t)$, y un vector de co-estado $p = (p_1, p_2)$ tal que

$$\dot{p}_1 = x, \ \dot{p}_2 = -p_1 + p_2 + \dot{x}, \quad \lim_{t \to +\infty} p_1(t) = \lim_{t \to +\infty} p_2(t) = 0.$$

- Muestre que el control óptimo esta dado por $u(t) = -p_2$.

- Muestre que p esta dado por $p(t) = x(t)^T E$ donde E es la solución de la ecuación de Riccati estacionaria

$$A^T E + EA + EBE = Id$$

donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Muestre que E es simétrica y que u esta dado por $(0 \ -1)Ex(t)$.
- Muestre que el costo minimo es $-(0 \ \ 1)E \ (0 \ \ 1)^T$.
- Calcule E y deduce los valores de u y el costo minimo asociado.
- Muestre que la trayectoria óptimal es $x(t) = \frac{2}{\beta} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\frac{\beta}{2}t)$ donde $\beta = \sqrt{2\sqrt{2}+1}$.

Problem 5: control de tiempo mínimo

Considere la dinámica siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & u + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2(t) = & u + x_3 \\ \dot{x}_3(t) = & v \end{cases}$$

El objetivo es llevar en tiempo mínimo el sistema con un control (u, v), $|u| \leq 1, |v| \leq 1$, desde un punto (a, b, c) dado hasta la posición $(0, 0, 0)$.

- (i) Demuestre que el sistema es controlable
- (ii) Desarrolle un análisis sintético del control optimal y de su trayectoria asociada (i.e. calcule el control y la trayectoria correspondiente)
- (v) presente gráficamente estos resultados