

FIG. 3.4 –

*Remarque 3.2.4.* Puisque tout contrôle temps-minimal est extrémal, le théorème précédent, qui est le principe du maximum dans le cas linéaire, donne une *condition nécessaire* d'optimalité.

*Remarque 3.2.5.* Si  $u$  est un contrôle temps-minimal joignant en temps  $T$  une cible  $M_1$ , où  $M_1 \subset \mathbb{R}^n$  est convexe, alors on peut de plus choisir le vecteur adjoint pour que le vecteur  $p(T)$  soit unitaire et normal à un hyperplan séparant (au sens large)  $\text{Acc}(x_0, T)$  et  $M_1$ . C'est une condition dite de *transversalité*, obtenue facilement dans la preuve précédente.

Comme exemple théorique d'application, montrons le résultat suivant.

**Proposition 3.2.2.** *Considérons dans  $\mathbb{R}^n$  le système linéaire autonome  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , avec  $B \in \mathbb{R}^n$  et  $|u(t)| \leq 1$ , et où la paire  $(A, B)$  vérifie la condition de Kalman.*

1. *Si toute valeur propre de  $A$  est réelle, alors tout contrôle extrémal a au plus  $n - 1$  commutations sur  $\mathbb{R}^+$ .*
2. *Si toute valeur propre de  $A$  a une partie imaginaire non nulle, alors tout contrôle extrémal a un nombre infini de commutations sur  $\mathbb{R}^+$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème 2.2.7, le système peut s'écrire sous forme de Brunovski, et il est alors équivalent à une équation différentielle scalaire d'ordre  $n$  de la forme

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = u, \quad |u| \leq 1.$$

De plus, tout contrôle extrémal est de la forme  $u(t) = \text{signe } \lambda(t)$ , où  $\lambda(t)$  est la dernière coordonnée du vecteur adjoint, qui vérifie l'équation différentielle

$$\lambda^{(n)} - a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + (-1)^n a_n \lambda = 0.$$

En effet le vecteur adjoint vérifie  $p'(t) = -p(t)A(t)$ .

1. Si toute valeur propre de  $A$  est réelle, alors  $\lambda(t)$  s'écrit sous la forme

$$\lambda(t) = \sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\lambda_j t},$$

où  $P_j$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n_j - 1$ , et où  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , sont les  $r$  valeurs propres distinctes de  $-A$ , de multiplicités respectives  $n_1, \dots, n_r$ . Notons que  $n = n_1 + \dots + n_r$ . On montre alors facilement, par récurrence, que  $\lambda(t)$  admet au plus  $n - 1$  zéros.

2. Si toute valeur propre de  $A$  a une partie imaginaire non nulle, alors, comme précédemment, on peut écrire

$$\lambda(t) = \sum_{j=1}^r (P_j(t) \cos \beta_j t + Q_j(t) \sin \beta_j t) e^{\alpha_j t},$$

où  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ , et  $P_j, Q_j$  sont des polynômes réels non nuls. En mettant en facteur un terme  $t^k e^{\alpha_j t}$  de plus haut degré (*i. e.* dominant), on voit facilement que  $\lambda(t)$  a un nombre infini de zéros.

□

### 3.3 Exemples

#### 3.3.1 Synthèse optimale pour le problème de l'oscillateur harmonique linéaire

Appliquons la théorie précédente à l'exemple de l'oscillateur harmonique présenté en introduction, pour  $k_2 = 0$ , et répondons aux deux questions suivantes :

1. Pour toute condition initiale  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0$ , existe-t-il une force extérieure horizontale (un contrôle), vérifiant la contrainte, qui permette d'amener la masse ponctuelle à sa position d'équilibre  $x(T) = 0, \dot{x}(T) = 0$  en un temps fini  $T$  ?
2. Si la première condition est remplie, peut-on de plus déterminer cette force de manière à minimiser le temps ?

Enfin, ces deux problèmes résolus, nous représenterons dans le plan de phase la trajectoire optimale obtenue.

#### Contrôlabilité du système

Le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{X} &= AX + Bu \\ X(0) &= X_0 \end{cases} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a facilement  $\text{rg}(B, AB) = 2$  ; par ailleurs les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle nulle. Donc, d'après le théorème 2.2.4, le système est contrôlable à 0, *i. e.* il existe des contrôles  $u$  vérifiant la contrainte  $|u| \leq 1$  tels que les trajectoires associées relient  $X_0$  à 0, ce qui répond à la première question.

**Interprétation physique**

- Si l'on n'applique aucune force extérieure, *i. e.*  $u = 0$ , alors l'équation du mouvement est  $\ddot{x} + x = 0$ . La masse ponctuelle oscille, et ne s'arrête jamais, donc ne parvient pas à sa position d'équilibre en un temps fini.
- Si l'on applique certaines forces extérieures, on a tendance à amortir les oscillations. La théorie prévoit qu'on parvient à stopper l'objet en un temps fini.

**Calcul du contrôle optimal**

D'après le paragraphe précédent, il existe des contrôles permettant de relier  $X_0$  à 0. On cherche maintenant à le faire en temps minimal. Pour cela, on applique le théorème 3.2.1, selon lequel

$$u(t) = \text{signe}(p(t)B),$$

où  $p(t) \in \mathbb{R}^2$  est solution de  $\dot{p} = -pA$ . Posons  $p = (p_1, p_2)$ . Alors  $u(t) = \text{signe}(p_2(t))$ , et  $\dot{p}_1 = p_2, \dot{p}_2 = -p_1$ , d'où  $\ddot{p}_2 + p_2 = 0$ . Donc  $p_2(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ . En particulier, la durée entre deux zéros consécutifs de  $p_2(t)$  est exactement  $\pi$ . Par conséquent le contrôle optimal est constant par morceaux sur des intervalles de longueur  $\pi$ , et prend alternativement les valeurs  $\pm 1$ .

- Si  $u = -1$ , on obtient le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - 1. \end{cases} \quad (3.5)$$

- Si  $u = +1$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

La trajectoire optimale finale, reliant  $X_0$  à 0, sera constituée d'arcs successifs, solutions de (3.5) et (3.6).

**Solutions de (3.5).** On obtient facilement  $(x+1)^2 + y^2 = \text{cste} = R^2$ , donc les courbes solutions de (3.5) sont des cercles centrés en  $(-1, 0)$ , et de période  $2\pi$  (en fait,  $x(t) = -1 + R \cos t, y(t) = R \sin t$ ).

**Solutions de (3.6).** On obtient  $x(t) = 1 + R \cos t$  et  $y(t) = R \sin t$ . Les solutions sont des cercles centrés en  $(1, 0)$ , de période  $2\pi$ .

La trajectoire optimale de  $X_0$  à 0 doit donc suivre alternativement un arc de cercle centré en  $(-1, 0)$ , et un arc de cercle centré en  $(1, 0)$ .

Quitte à changer  $t$  en  $-t$ , nous allons raisonner en temps inverse, et construire la trajectoire optimale menant de 0 à  $X_0$ . Pour cela, nous allons considérer toutes les trajectoires optimales partant de 0, et nous sélectionnerons celle qui passe par  $X_0$ .

En faisant varier  $p(0)$ , on fait varier la trajectoire optimale. En effet, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz,  $p(0)$  détermine  $p(t)$  pour tout  $t$ , ce qui définit un contrôle optimal  $u(t)$ , et donc une trajectoire optimale.

Prenons des exemples pour commencer à représenter l'allure des trajectoires optimales possibles.

- Si  $p_1(0) = 1, p_2(0) = 0$ , alors  $p_2(t) = -\sin t$ , donc sur  $]0, \pi[$  on a  $u(t) = \text{signe}(p_2(t)) = -1$ . La trajectoire optimale correspondante, partant de 0, suit donc pendant un temps  $\pi$  l'arc de cercle  $\Gamma_-$  solution de (3.5), passant par 0 (voir figure 3.5).

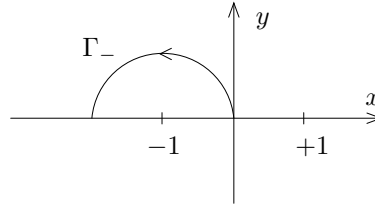


FIG. 3.5 –

- Si  $p_1(0) = -1, p_2(0) = 0$ , alors  $p_2(t) = \sin t$ , donc sur  $]0, \pi[$  on a  $u(t) = \text{signe}(p_2(t)) = +1$ . La trajectoire optimale correspondante, partant de 0, suit donc pendant un temps  $\pi$  l'arc de cercle  $\Gamma_+$  solution de (3.6), passant par 0 (voir figure 3.6).

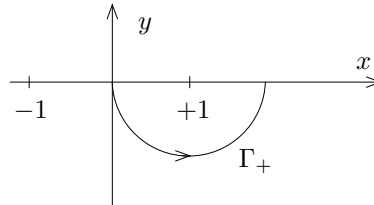


FIG. 3.6 –

- Pour tout autre choix de  $p(0)$  tel que  $p_2(0) > 0$ , la trajectoire optimale correspondante part de l'origine en suivant  $\Gamma_+$  jusqu'à ce que  $p_2(t) = 0$ . Au-delà de ce point,  $p_2(t)$  change de signe, donc le contrôle *commute* et prend la valeur  $-1$ , pendant une durée  $\pi$  (i. e. jusqu'à ce que  $p_2(t)$  change à nouveau de signe). La trajectoire optimale doit alors être solution de (3.5), en partant de ce point de commutation  $M$ , et doit donc suivre un arc de cercle centré en  $(-1, 0)$ , pendant un temps  $\pi$ . C'est donc un demi-cercle, vu la paramétrisation des courbes de (3.5) (voir figure 3.7).

La trajectoire optimale rencontre un deuxième point de commutation  $N$  lorsque à nouveau  $p_2(t)$  change de signe. On remarque que  $M$  et  $N$  sont symétriques par rapport au point  $(-1, 0)$  (en effet ce sont les extrémités d'un

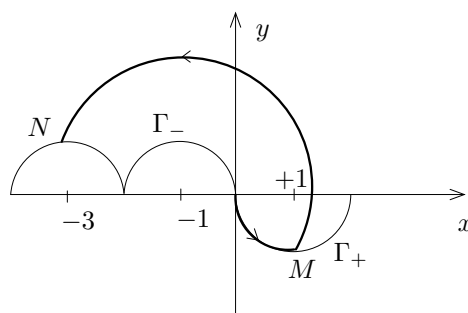
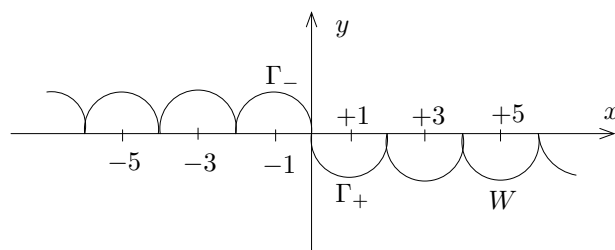


FIG. 3.7 –

demi-cercle centré en ce point). Le point  $M$  appartenant au demi-cercle  $\Gamma_+$ , le point  $N$  appartient au demi-cercle image de  $\Gamma_+$  par la symétrie par rapport au point  $(-1, 0)$  qui est aussi, comme on le voit facilement, le translaté à gauche de  $\Gamma_-$  par la translation de vecteur  $(-2, 0)$ .

Poursuivons alors notre raisonnement. On se rend compte que les points de commutation de cette trajectoire optimale partant de 0 sont situés sur la courbe  $W$  construite de la manière suivante :  $W$  est l'union de tous les translatés à gauche de  $\Gamma_-$  par la translation précédente, et aussi de tous les translatés à droite de  $\Gamma_+$  (voir figure 3.8).

FIG. 3.8 – Ensemble  $W$ 

Les trajectoires optimales sont alors construites de la manière suivante : on part de 0 et l'on suit un morceau de  $\Gamma_+$  ou  $\Gamma_-$ , jusqu'à un premier point de commutation. Si par exemple on était sur  $\Gamma_+$ , alors partant de ce point on suit un arc de cercle centré en  $(-1, 0)$ , au-dessus de  $W$ , jusqu'à ce qu'on rencontre  $W$ . De ce deuxième point de commutation, on suit un arc de cercle centré en  $(1, 0)$  jusqu'à rencontrer  $W$  en un troisième point de commutation, etc (voir figure 3.9).

On est maintenant en mesure de répondre à la deuxième question, du moins graphiquement. Le but est de relier 0 et  $X_0$  par une trajectoire optimale. La théorie prévoit qu'on peut effectivement le faire. Une trajectoire partant de 0

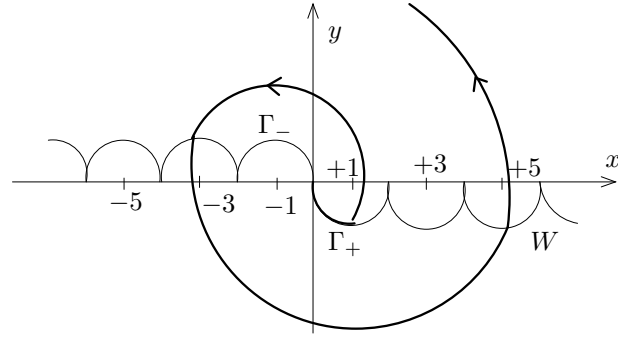


FIG. 3.9 –

est, comme on vient de le voir ci-dessus, déterminée par deux choix :

1. partant de 0, on peut suivre un morceau de  $\Gamma_+$  ou de  $\Gamma_-$ .
2. il faut choisir le premier point de commutation.

Si maintenant on se donne un point  $X_0 = (x_0, y_0)$  du plan de phase, on peut déterminer graphiquement ces deux choix, et obtenir un tracé de la trajectoire optimale (voir figure 3.10). Dans la pratique il suffit d'inverser le temps, *i. e.* de partir du point final et d'atteindre le point initial.

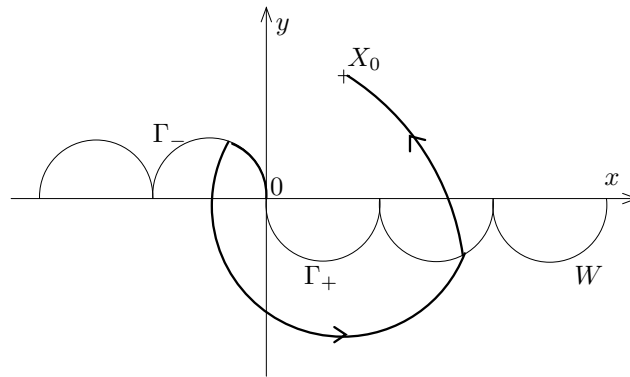


FIG. 3.10 – Synthèse optimale

*Remarque 3.3.1.* L'implémentation numérique de cet exemple est très facile à faire. Nous la ferons plutôt dans le cas non linéaire où elle est plus intéressante.