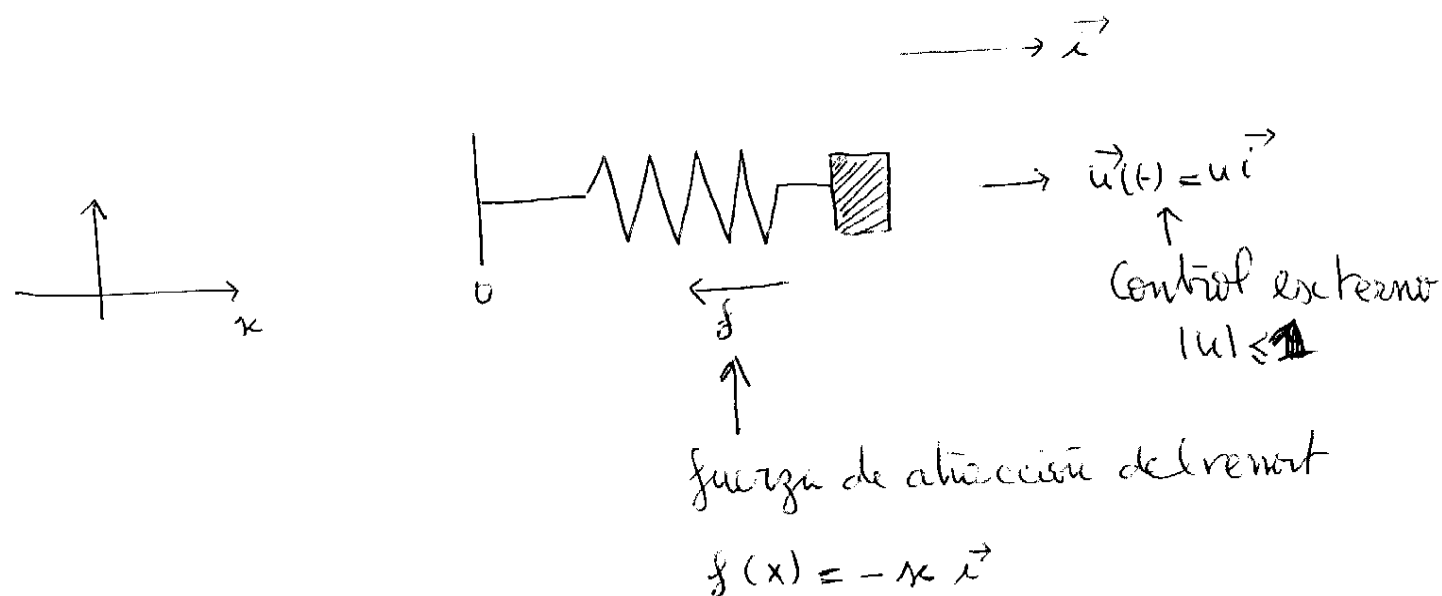


# Ejemplo (Tratado Página 40)

Consideramos el problema del control de un resorte:



La ecuación del sistema está dada por la ley de Newton,

$$\ddot{x} = f + u \Rightarrow \ddot{x} + \kappa x = u$$

O, equivalentemente, si  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\kappa x_1 + u \end{cases} \sim \dot{x} = Ax + Bu$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como  $\text{rang } C_1 = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ , por el criterio de Kalman  $0 \in \text{int} \left( \bigcup_{t \geq 0} \{x_0 \in \mathbb{R}^n, \exists x, x(t), x_0, u\} \right)$ .

Además, como  $\text{Re}(\text{Spect}(A)) \leq 0$ , deducemos que  
"Valores propios de A"

el sistema (1) es controlable

(1)

es decir si  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\exists \alpha \in L$  tq  $x(0, t, \alpha) = (x_0, y_0)$

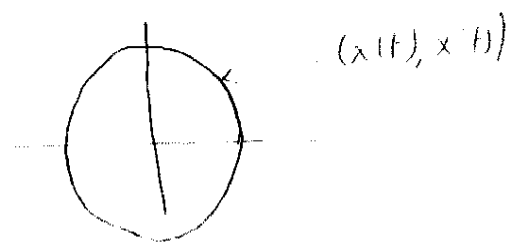
Además, como  $A = [-1, 1]$  es compacto, el sistema (1) admite un control óptimo

### Interpretación física:

Si  $u \equiv 0$ , la masa oscila y no para, la ecuación es de la forma  $\ddot{x} + x = 0$ . Verifiquemos que  $x^2 + (\dot{x})^2 = \text{cte.}$

Derivando,  $2x\dot{x} + 2\dot{x}\ddot{x} = 0$ ,

Entonces,  $x(t)$  es periódica y nunca se estaciona en 0. Este control " $u=0$ " no es un control óptimo.



### Cálculo del control óptimo

Sabemos que  $\exists u(\cdot) \in L$  tq  $x(t, 0, u) = x_0 \in \mathbb{R}^2$

Gracias al principio de maximum, damos unas propiedades de este control.

Entonces,  $\exists p(\cdot) = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  tq

$$\dot{p} = -p'A \quad \text{y} \quad p(t)B u(t) = \max_{u \in L} p(t)B u(t)$$

Como  $\chi(t) \in [-1, 1]$ ,

$$P(t)B u(t) = \max_{\theta \in [-1, 1]} P(t)B\theta = |P(t)B|$$

$$\Rightarrow u(t) = \text{sign}(P(t)B) = \text{sign}\left((P_1(t), P_2(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{sign}(P_2(t))$$

De otra parte,  $P(t) = (\dot{P}_1, \dot{P}_2) = - (P_1, P_2)A = - (-P_2, P_1)$   
 $= (P_2, -P_1)$

es decir,  $\dot{P}_1 = P_2, \dot{P}_2 = -P_1 = -P_2 \Rightarrow \ddot{P}_2 + P_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_2(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t \\ P_1(t) = \lambda \sin t - \mu \cos t \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Observamos que los zeros de  $P_2(t)$  son a distancia  $\pi$ :

$$\text{Si } \varphi(t) = 0 \Rightarrow \underline{P(t) = 0} \Rightarrow t = k\pi + t_0, k \in \mathbb{Z}^*$$

Consecuentemente,  $u(\cdot)$  es constante por tramos de ancho  $\pi$ , y toma alternativamente los valores  $\pm 1$ .

\* Si  $u = -1$ , el sistema se escribe

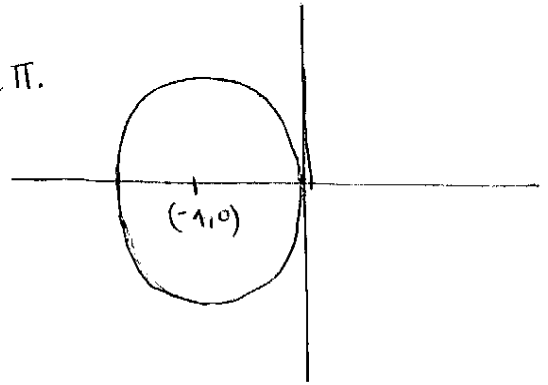
$$(2) \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = -x_1 - 1 \end{cases}$$

\* Si  $u = +1$ , el sistema se escribe

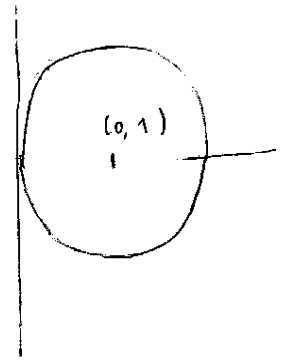
$$(3) \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = -x_1 + 1 \end{cases}$$

la solución de (2) es  $x_1(t) = -1 + r \cos t$ ,  $x_2(t) = r \sin t$ ,  
entonces,  $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = r^2 = \text{constante}$

$\Rightarrow (x_1, x_2)$  es periódica de periodo  $2\pi$ .



Equivalente, la solución de (3) es  $x_1 = +1 + r \cos t$ ,  $x_2 = r \sin t$   
es también de periodo  $2\pi$ .

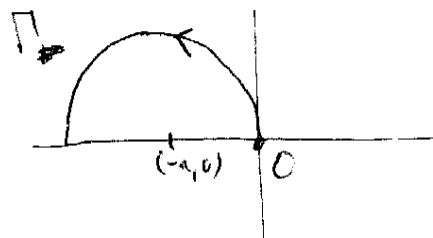


Como  $P$  es descendente, vamos a elegir algunas  
valores:

□ Si  $P_1(0) = 1$ ,  $P_2(0) = 0$ ,  $P_2(t) = -\sin t$ . Entonces, en  $]0, \pi[$ ,

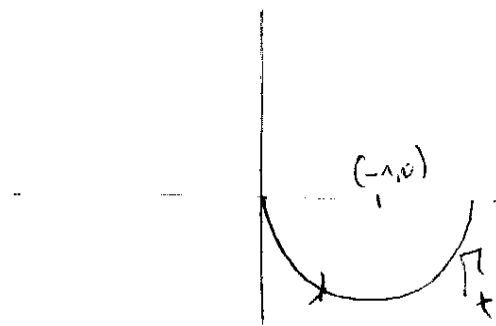
el control está dado por  $u(t) = \text{sign}(P_2(t)) = -1$ .

Entonces, la trayectoria óptima sigue la curva  $\Gamma$



0) Si  $P_1(t) = -1$ ,  $P_2(t) = 0$ ,  $P_2(t) = \cos t$

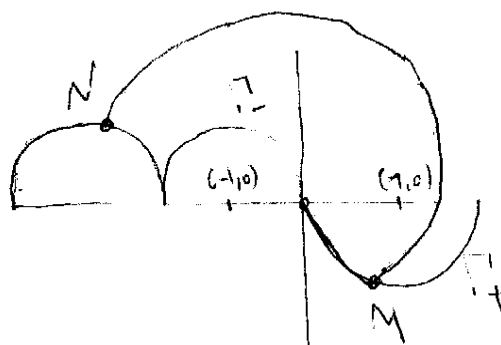
$\Rightarrow$  si  $t \in ]0, \pi[$ ,  $u(t) = \text{sign}(P_2(t)) = +1$ ,  
y la trayectoria sigue  $\Gamma_+$



1) Si  $P_1(t) \in \mathbb{R}$ ,  $P_2(t) > 0$ ,

la trayectoria como  $\Gamma_+$  desde "0" hasta que  $P_2(\bar{t}) = 0$ .

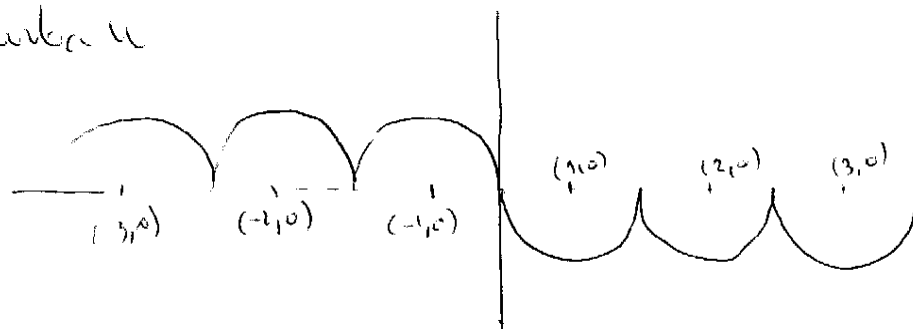
Como  $P_2$  cambia de signo en  $\bar{t}$ , la trayectoria como  $\Gamma_-$   
durante un tiempo  $\pi$ , y en el punto  $M$  cambia en  $\Gamma_+$   
hasta un punto  $N$



Se obtiene que  $M$  y  $N$  son simétricos w.r.t.  $(-1,0)$ , además

$N$  está en el círculo que es el trasladado de  $\Gamma_-$  con  $(-2,0)$ .

Consecuentemente, los puntos switch "u cambia de valor  $\pm 1 \rightarrow \mp 1$ "  
están en la curva u



Consecuentemente, las trayectorias óptimas están hechas en la forma siguiente,  
 desde "c", toma  $\Gamma_-$  hasta el primer punto de "switch".  
 Después toma  $\Gamma_+$  durante  $\pi$  (o hasta que encuentre la curva  $w$ ).  
 A partir de este punto, toma un arco del círculo unitario en  $(1,0)$  hasta encontrar de nuevo la curva  $w$ .

Conclusión: para ir de "c" a " $(x_c, y_c)$ " el control óptimo se hace de la manera siguiente:

en práctica, hacemos el camino inverso, empezando desde  $(x_c, y_c)$  y llevando a "c"

