

Control 1 MA54G

2 de Octubre de 2010

3:30hrs

Prof.: J.Fontbona

Aux.: C.Fittipaldi, G.Mena.

Problema I: CADENAS DE MARKOV Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Sea E un conjunto numerable y $\mu = (\mu(x))_{x \in E}, \pi = (\pi(x))_{x \in E}$ vectores de probabilidad. Si $\mu \ll \pi$, se define la *entropía relativa de μ con respecto a π* como

$$H(\mu|\pi) := \sum_{x \in E} \frac{\mu}{\pi}(x) \ln \left(\frac{\mu}{\pi}(x) \right) \pi(x) = \sum_{x \in E} \mu(x) \ln \left(\frac{\mu}{\pi}(x) \right)$$

con la convención $0 \cdot \ln 0 = 0$ y cuando la suma tenga sentido (se verá más adelante que siempre es el caso.)

Denotamos por $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov homogénea a valores en E con matriz de transición $P = (P(x, y))_{x, y \in E}$, y definida en un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\mu)$, donde $\mathbb{P}_\mu$ es una medida de probabilidad t.q.

$$\mathbb{P}_\mu(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mu(x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_j \in E, j = 0, \dots, n$.

Suponga que P tiene una distribución invariante μ_∞ , y denotemos $\mu_n = \mu_0 P^{(n)}$ la ley de X_n bajo $\mathbb{P}_{\mu_0}$, $\mu_n(x) = \mathbb{P}_{\mu_0}(X_n = x)$. El principal objetivo de esta pregunta es probar, usando teoría de martingalas, que si $\mu_0 \ll \mu_\infty$ y además $H(\mu_0|\mu_\infty) < \infty$, entonces $H(\mu_n|\mu_\infty)$ es decreciente.¹

Denotaremos por $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la filtración natural asociada, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$, y además

$$\mathcal{F}_n^N := \sigma(X_n, \dots, X_N), \quad \mathcal{F}_n^\infty = \sigma(X_n, X_{n+1} \dots).$$

Supondremos además en todo lo que sigue que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0^\infty$.

Recuerde que como consecuencia de la propiedad de Markov (no se pide probarlo), se tiene

$$\forall A \in \mathcal{F}_n^N, \quad n \leq N, \quad \mathbb{E}(\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A | \sigma(X_n)),$$

en particular $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n) = f_A^n(X_n)$ para cierta función $f_A^n : E \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Sean μ_0, μ'_0 dos vectores de probabilidad en E tales que $\mu_0 \ll \mu'_0$.

i) [0.5 pto] Muestre que entonces $\mathbb{P}_{\mu_0} \ll \mathbb{P}_{\mu'_0}$, con $\frac{d\mathbb{P}_{\mu_0}}{d\mathbb{P}_{\mu'_0}}(\omega) = \frac{\mu_0}{\mu'_0}(X_0(\omega)), \mathbb{P}_{\mu'_0}$ c.s.

Para ello, puede probar primero que

$$\mathbb{E}_{\mu_0}(\mathbf{1}_{\{X_0=x_0, \dots, X_n=x_n\}}) = \mathbb{E}_{\mu'_0} \left(\frac{\mu_0}{\mu'_0}(X_0) \mathbf{1}_{\{X_0=x_0, \dots, X_n=x_n\}} \right)$$

y después extender esto a indicatrices de conjuntos más generales.

¹La entropía física de Boltzmann corresponde a $-H(\mu|\pi) + Cte$

ii) Deduzca de lo anterior que $\mathbb{P}_{\mu_0}|_{\mathcal{F}_n^\infty} \ll \mathbb{P}_{\mu'_0}|_{\mathcal{F}_n^\infty}$ con densidad de Radon-Nikodyn

$$\frac{d\mathbb{P}_{\mu_0}|_{\mathcal{F}_n^\infty}}{d\mathbb{P}_{\mu'_0}|_{\mathcal{F}_n^\infty}}(\omega) = \mathbb{E} \left(\frac{\mu_0}{\mu'_0}(X_0) \middle| \mathcal{F}_n^\infty \right) (\omega),$$

y que, si μ_n y μ'_n denotan las leyes de X_n bajo $\mathbb{P}_{\mu_0}$ y $\mathbb{P}_{\mu'_0}$ respectivamente, entonces $\mathbb{P}_{\mu_0}|_{\sigma(X_n)} \ll \mathbb{P}_{\mu'_0}|_{\sigma(X_n)}$ con densidad de Radon-Nikodyn

$$\frac{d\mathbb{P}_{\mu_0}|_{\sigma(X_n)}}{d\mathbb{P}_{\mu'_0}|_{\sigma(X_n)}}(\omega) = \mathbb{E} \left(\frac{\mu_0}{\mu'_0}(X_0) \middle| \sigma(X_n) \right) (\omega) = \frac{\mu_n}{\mu'_n}(X_n((\omega))).$$

iii) Pruebe que para toda función $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\sum_{x \in E} |g(x)|\mu'_0(x) < \infty$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_{\mu'_0}(g(X_0)|\mathcal{F}_n^\infty) = \mathbb{E}_{\mu'_0}(g(X_0)|\sigma(X_n)).$$

Ind.: Calcule primero $\mathbb{E}_{\mu'_0}(g(X_0)\mathbf{1}_A)$ para un $A \in \mathcal{F}_n^\infty$ utilizando la propiedad de Markov.

iv) [0.5 pto] Defina para cada $n \in -\mathbb{N}$ la tribu $\mathcal{G}_n := \mathcal{F}_{-n}^\infty$, y el proceso $M_n := \frac{\mu_{-n}}{\mu'_{-n}}(X_{-n})$.

Concluya de todo lo anterior que bajo $\mathbb{P}_{\mu'_0}$, $(M_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ es una martingala con respecto a $(\mathcal{G}_n)_{n \in -\mathbb{N}}$.

b) En lo que sigue, $\Psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ denota la función continua $\Psi(x) = x \ln x$ ($0 \cdot \ln 0 = 0$).

v) Muestre que Ψ es convexa y acotada inferiormente. Deduzca que si μ, π son vectores de probabilidad con $\mu \ll \pi$, entonces $H(\mu|\pi)$ está definida siempre en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, y más aun, $H(\mu|\pi) \geq 0 = H(\pi|\pi)$.

Suponga ahora que $\mu'_0 = \mu_\infty$. Muestre también que bajo $\mathbb{P}_{\mu_\infty}$, para todo $n < 0$, $\mathbb{E}(\Psi(M_{n+1})|\mathcal{G}_n)$ está definida y

$$\mathbb{E}(\Psi(M_{n+1})|\mathcal{G}_n) \geq \Psi(M_n).$$

Deduzca que si $H(\mu_0|\mu_\infty) < \infty$ entonces $\mathbb{E}_{\mu_\infty}(\Psi(M_n))$ crece cuando $n \in -\mathbb{N}$ crece, y concluya el resultado buscado para $H(\mu_m|\mu_\infty)$, $m \in \mathbb{N}$.

vii) Suponga que bajo $\mathbb{P}_{\mu_\infty}$ la tribu asintótica asociada a (X_n) es trivial. Pruebe que $H(\mu_m|\mu_\infty) \searrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$. (Ind.: Estudie $\lim_{n \rightarrow -\infty} M_n$).

Problema II: PROBLEMA DE PARADA ÓPTIMA

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $N \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ una filtración en él. Sean $(Z_n)_{n=0}^N$ v.a. reales con Z_n integrable y $\mathcal{F}_n$ -medible para cada n .

Def. Un tiempo de parada T se dice *óptimo para $(Z_n)_{n=0}^N$* , o *solución del problema de parada óptima asociado a $(Z_n)_{n=0}^N$* , si

$$\mathbb{E}(Z_T) = \sup_{S \in \mathcal{T}} \mathbb{E}(Z_S),$$

donde $\mathcal{T} := \{S : \Omega \rightarrow \{0, \dots, N\} \text{ tiempo de parada con respecto a } (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N\}$.

El objetivo de este problema caracterizar los t.d.p. que resuelven este problema y construir un t.d.p. T que sea solución.

- i) [1.0 pto] Se definen por recurrencia inversa las v.a.

$$\begin{cases} U_N &= Z_N \\ U_n &= \max(Z_n, \mathbb{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)) \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}. \end{cases}$$

$(U_n)_{n=0}^N$ se denomina *envolvente de Snell de $(Z_n)_{n=0}^N$* .

Pruebe que $(U_n)_{n=0}^N$ es una sobremartingala c/r a $(\mathcal{F}_n)$ y que es la menor sobremartingala que mayora a (Z_n) . Es decir, se tiene

$$U_n \geq Z_n \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}$$

y, si $(V_n)_{n=0}^N$ es cualquier sobremartingala tal que $V_n \geq Z_n \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}$, entonces también se tiene $V_n \geq U_n \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}$.

- ii) [2.0 pto] Sean $T_0 := \inf\{n \geq 0 : U_n = Z_n\}$ y para cada n , $U_n^{T_0} := U_{n \wedge T_0}$. Pruebe que $T_0 \in \mathcal{T}$. Verifique también que para cada $n \in \{0, \dots, N-1\}$, se tiene $U_n = \mathbb{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ en el evento $\{U_n > Z_n\}$, y que

$$U_{n+1}^{T_0} - U_n^{T_0} = \mathbf{1}_{\{n+1 \leq T_0\}}(U_{n+1} - U_n).$$

Deduzca que el proceso $(U_n^{T_0})_{n=0}^N$ es una martingala.

- iii) [1.0 pto] Usando resultados precedentes, pruebe que $\mathbb{E}(U_0) \geq \mathbb{E}(Z_S)$ para todo $S \in \mathcal{T}$, y que $\mathbb{E}(U_0) = \mathbb{E}(Z_{T_0})$. Deduzca que T_0 es solución y dé el valor óptimo.

- iv) [2.0] Pruebe que un tiempo de parada $T \in \mathcal{T}$ es óptimo para $(Z_n)_{n=0}^N$ ssi

$$\begin{cases} U_T = Z_T \\ (U_{n \wedge T})_{n=0}^N \text{ es martingala c/r } (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N \end{cases}$$

Indicación: Pruebe primero que T es óptimo ssi $\mathbb{E}(U_T) = \mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}(U_0)$.

Concluya que T_0 es el menor tiempo de parada que resuelve el problema de parada óptima asociado a $(Z_n)_{n=0}^N$ (es decir, si T es cualquier solución, entonces $T_0 \leq T$ c.s.).

Nota: Si Z_n se interpreta como la ganancia acumulada de un jugador después de n jugadas (o la riqueza de un inversionista después de n días), entonces una solución T es una *regla o criterio* para decidir cuándo parar de jugar (o rescatar el dinero del fondo mutuo...) que *en promedio* reporta mayor beneficio. En el caso que $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \dots, Z_n)$ para cada n , $\mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)(\omega)$ es igual a $h_n(Z_0(\omega), \dots, Z_n(\omega))$, con h_n la función dada por $h_n(z_0, \dots, z_n) = \mathbb{E}(U_{n+1}|Z_0 = z_0, \dots, Z_n = z_n)$, y que en teoría es posible calcular si se conoce la ley conjunta de $(Z_0, \dots, Z_N, U_0, \dots, U_N)$. En la práctica, h_n se puede calcular numéricamente, y entonces la regla se T_0 reduce a esperar “la primera vez que $Z_n = h_n(Z_0, \dots, Z_n)$ ”. Cabe notar que la regla de parada no requiere “saber lo que va a pasar en el futuro” (es un t.d.p.), pero sí requiere saber (o hacer alguna hipótesis sobre) “la ley de lo que va a pasar en el futuro, dado el pasado y presente” (además de conocer el presente y pasado).