Examen MA54G.
1ra Parte (60%)

29 de Noviembre de 2010

Prof.: Joaquín Fontbona
Aux.: M.Clara Fittipaldi, Gonzalo Mena.

P.I (50%) **Caracterización de Lévy del moviemento Browniano**

Def.: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad filtrado satisfaciendo las condiciones habituales. Decimos que un proceso $B = (B_t, t \geq 0)$ a valores en $\mathbb{R}$ es un $\mathcal{F}_t-$*movimiento Browniano* si

i) B es adaptado y continuo, con $B_0 = 0$,

ii) B tiene incrementos estacionarios, con $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, y

iii) Para todo $t, s \geq 0$

$$B_{t+s} - B_t \text{ es independiente de } \mathcal{F}_t.$$

Un proceso $B = (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})_{t \geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t-$*movimiento Browniano* $d-$*dimensional* si para cada i, $B^{(i)}$ es un $\mathcal{F}_t-$movimiento Browniano, y $(B^{(1)}, \ldots, B^{(d)})$ son procesos independientes.

a) (0.5) Muestre que un $\mathcal{F}_t-$movimiento Browniano unidimensional W_t es un movimiento Browniano (en el sentido habitual). Muestre también que si W_t es un movimiento Browniano unidimensional standar y $\mathcal{F}_t^W$ su filtración natural, entonces W_t es un $\mathcal{F}_t^W-$movimiento Browniano.

El objetivo de este problema es probar el siguiente resultado, que se vió en clase auxiliar para el caso $d = 1$:

Teorema (Lévy). *Sean* $B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)}$, d *martingalas locales continuas c/r a la filtración* $\mathcal{F}_t$, *todas ellas nulas en* 0. *Entonces* $B = (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})_{t \geq 0}$ *es un* $\mathcal{F}_t-$*movimiento Browniano* $d-$*dimensional ssi*

$$(*) \quad \langle B^{(i)}, B^{(j)} \rangle_t = \delta_{i,j} t$$

para todo $i, j = 1, \ldots d$.

b) (0.5) Verifique que la condición (*) es necesaria.

c) (2.0) Sea $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$. Denotando por $u \cdot v$ el producto punto en $\mathbb{R}^d$ y por $\|v\|$ la norma euclideana, muestre que $M_t := \exp\{i\lambda \cdot B_t + \frac{\|\lambda\|^2}{2} t\}$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala local (es decir, $Re(M)$ y $Im(M)$ son martingalas), y que es acotada (por constantes deterministas) en intervalos finitos. Deduzca que para todos $t, s \geq 0$,

$$\mathbb{E}(\exp\{i\lambda \cdot (B_{t+s} - B_t)\} | \mathcal{F}_t) = \exp\{-\frac{\|\lambda\|^2}{2} s\}.$$

Ind.: Escriba $M_t = f_1(t, B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)}) + i f_2(t, B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})$ para f_1, f_2 apropiadas. Explique por qué $Re(M)$ y $Im(M)$ son semimartingalas y explicite sus descomposiciones. Si lo desea puede trabajar también con la función $f := f_1 + i f_2$ (sin separar las componentes real e imaginaria).

d) (2.0) Sean $t \geq 0$, $A \in \mathcal{F}_t$ un conjunto de medida $\mathbb{P}$ no nula, y $\tilde{\mathbb{P}}_A$ la medida de probabilidad absolutamente continua c/r a $\mathbb{P}$ definida por $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}_A}{d\mathbb{P}} = \frac{\mathbf{1}_A}{\mathbb{P}(A)}$.

Sea $\mu_{A,t,s}$ la ley en $\mathbb{R}^d$ del vector aleatorio $(B_{t+s} - B_t)$ bajo $\tilde{\mathbb{P}}_A$ (es decir, para todo Boreliano C de $\mathbb{R}^d$, $\mu_{A,t,s}(C) := \tilde{\mathbb{P}}_A(B_{t+s} - B_t \in C)$). Encuentre la función característica de $\mu_{A,t,s}$, explicite dicha ley y verifique que ella es la misma para cualquier $t \geq 0$ y $A \in \mathcal{F}_t$.

Deduzca que para cualesquiera Borelianos $C_j, j = 1 \dots d$ en $\mathbb{R}$, se tiene

$$\mathbb{P}\left(\{(B^{(1)}_{t+s} - B^{(1)}_t) \in C_1, \dots, (B^{(d)}_{t+s} - B^{(d)}_t) \in C_d\} \cap A\right) = \mu_{\Omega,0,s}(C_1 \times \cdots \times C_d)\mathbb{P}(A)$$

y tomando en la igualdad anterior conjuntos e instantes de tiempo adecuados, muestre que la expresión es también igual a

$$\mathbb{P}\left(B^{(1)}_s \in C_1\right) \cdots \mathbb{P}\left(B^{(d)}_s \in C_d\right)\mathbb{P}(A).$$

Con todo esto concluya la demostración del teorema mostrando que se tienen las relaciones de independencia y e igualdades en ley requeridas.

e) (1.0) Sean X, Y dos movimientos Brownianos reales independientes definidos en cierto espacio de probabilidad (completo), y θ_s un proceso progresivo c/r a la filtración completada generada por (X, Y).

Pruebe que

$$W_t := \int_0^t \cos(\theta_s) dX_s + \int_0^t \sin(\theta_s) dY_s \quad \text{y}$$
$$W'_t := \int_0^t \sin(\theta_s) dX_s - \int_0^t \cos(\theta_s) dY_s$$

son dos movimientos Brownianos unidemensionales independientes.

P.II (25%) **Sobre el conjunto de 0's del movimiento Browniano**

Sea (W_t) M.B. unidimensional standard definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Para $t \geq 0$ se define $\beta_t(\omega) := \inf\{s > t \ : \ W_s(\omega) = 0\}$.

a) Muestre que para cada $t \geq 0$ se tiene para $\mathbb{P}$- casi todo ω que

$$\inf\{s > \beta_t(\omega) \ : \ W_s(\omega) = 0\} = \beta_t(\omega) + \inf\{s > 0 \ : \ W_{s+\beta_t(\omega)}(\omega) - W_{\beta_t(\omega)}(\omega) = 0\}.$$

Muestre también que $\beta_0(\omega) = 0$ para $\mathbb{P}$- casi todo ω y deduzca que

$$\beta_{\beta_t(\omega)}(\omega) = \beta_t(\omega), \ \mathbb{P} \ c.s.$$

b) Usando la anterior, muestre que para $0 \leq a < b < \infty$ dados, el conjunto

$$\{\omega \in \Omega : \text{existe uno y sólo un } s \in (a, b) \text{ t.q. } W_s(\omega) = 0\}$$

es despreciable. Describa el evento $\Gamma := \{\omega \in \Omega \ : \ \{t \geq 0 : W_t(\omega) = 0\}$ tiene puntos aislados $\}$ en base a conjuntos como el anterior, para $a, b's$ en un conjunto apropiado de números reales, y concluya que $\mathbb{P}(\Gamma) = 0$.

P.III (25%) **Representación probabilista de la solución del problema de Dirichlet**
Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ abierto. El objetivo de esta pregunta es mostrar, bajo ciertas condiciones, que la solución clásica u del problema de Dirichlet (PD):

$$\begin{aligned} \triangle u(x) &= 0 \; x \in D \; ; \\ u(x) &= f(x) \; x \in \partial D \; ; \end{aligned}$$

donde $f : \partial D \to \mathbb{R}$ es una función continua acotada dada, se puede escribir como la esperanza de un funcional del movimiento Browniano en $\mathbb{R}^d$.
Sea $W = (W_t^{(1)}, \ldots, W_t^{(d)})_{t \geq 0}$ M.B. standard en $\mathbb{R}^d$ (es decir, cada $B^{(j)}$ es M.B. standard en $\mathbb{R}$ y $(W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})$ son independientes) definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dado $a \in \mathbb{R}^d$, se denotan respectivamente por $\mathbb{P}_a$ y $\mathbb{E}_a$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ y la esperanza asociada al "M.B. W partiendo de a". Es decir, para cada $F : C([0,\infty), \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ medible acotada, $\mathbb{E}_a(F(W_t, t \geq 0)) = \mathbb{E}(F(W_t + a, t \geq 0))$. En particular, se tiene $\mathbb{P}_a(W_0 = a) = \mathbb{P}(W_0 + a = a) = 1$.
Finalmente, para cada Boreliano $F \subset \mathbb{R}^d$, denotamos

$$\tau_F := \inf\{s > 0 \; : \; W_s \in F^c\}.$$

Se probará el siguiente

Teorema *Supongamos que para todo $a \in D$ se tiene*

$$\mathbb{P}_a(\tau_D < \infty) = 1$$

y que $u \in \mathcal{C}(\overline{D}) \cap \mathcal{C}^2(D)$ es una solución acotada de (PD). Entonces,

$$u(x) = \mathbb{E}_x(f(W_{\tau_D})) \;\; \forall x \in \overline{D}.$$

a) Sea $D_n := \{x \in D : \inf_{y \in \partial D} \|x - y\| > 1/n\}$. Muestre que

$$u(W_{t \wedge \tau_{D_n} \wedge \tau_{B(0,n)}}) = u(W_0) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^{t \wedge \tau_{D_n} \wedge \tau_{B(0,n)}} \frac{\partial u}{\partial x_j}(W_s) \; dW_s^{(j)}, \; t \in [0, \infty).$$

Ind.: Notar que en general $u \notin \mathcal{C}^2(\overline{D})$, pero se puede construir $\tilde{u} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $\tilde{u} = u$ en D_n (no se pide hacer esto último explícitamente).

b) Pruebe que para cada $a \in \mathbb{R}^d$ y $j = 1, \ldots, d$, el proceso $\int_0^{t \wedge \tau_{D_n} \wedge \tau_{B(0,n)}} \frac{\partial u}{\partial x_j}(W_s) \; dW_s^{(j)}$ es una $\mathbb{P}_a$-martingala con respecto a la filtración natural de $(W_t)_{t \geq 0}$, con valor inicial 0.

c) Deduzca que para todo $t \geq 0$ y $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ se tiene $u(x) = \mathbb{E}_x(u(W_{t \wedge \tau_{D_n} \wedge \tau_{B(0,n)}})$ y concluya el resultado deseado.

d) Proponga una representación análoga para una solución $u \in \mathcal{C}(\overline{D}) \cap \mathcal{C}^2(D)$ acotada del problema no homogéneo

$$\begin{aligned} \triangle u(x) &= g(x) \; x \in D \; ; \\ u(x) &= f(x) \; x \in \partial D \; ; \end{aligned}$$

donde $g : D \to \mathbb{R}$ es una función continua acotada. Justifique por qué espera que dicha representación sea válida (no se pide dar la demostración completa).

Nota: sea conciso. No necesita reescribir completamente demostraciones ya hechas en clases si entiende aquellos argumentos que pueden ser usados y es capaz de resumirlos en palabras.

3:30 hrs.