Clase Auxiliar N°9: Cálculo Estocástico

Profesor: Joaquín Fontbona
Auxiliares: Clara Fittipaldi - Gonzalo Mena

25 de octubre de 2010

El objetivo de esta auxiliar es estudiar algunas propiedades trayectoriales del movimiento browniano. Se demostrará en particular la célebre ley del logaritmo iterado y que c.s. el movimiento browniano no es diferenciable en ningún punto.

P1. Algunos resultados auxiliares y definiciones

1 Para cualquier $x > 0$ se verifica la desigualdad

$$\frac{x}{1+x^2}e^{\frac{-x^2}{2}} \leq \int_x^\infty e^{\frac{-u^2}{2}}du \leq \frac{1}{x}e^{\frac{-x^2}{2}}$$

2 Dada $(X_s)_{s\geq 0}$ martingala positiva y $\lambda > 0$ se tiene para t fijo

$$\mathbb{P}(\max_{0\leq s\leq t} X_s \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_0)$$

3 Para el m.b. $(B_t)_{t\geq 0}$ se tiene que el proceso $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ definido por $\tilde{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}$ si $t > 0$ y $\tilde{B}_0 = 0$ es también un m.b.

Definición: Derivadas de Dini. Se definen para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$D^{\pm}f(t) = \limsup_{h\to 0^{\pm}} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$
$$D_{\pm}f(t) = \liminf_{h\to 0^{\pm}} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

La función f es diferenciable en t si las cuatro derivadas existen y son finitas.

P2. Ley del logaritmo iterado (Khintchine)

Para casi todo $\omega \in \Omega$ se tiene

$$i)\ \limsup_{t\to 0^+} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t\log\log 1/t}} = 1 \qquad ii)\ \liminf_{t\to 0^+} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t\log\log 1/t}} = -1$$
$$iii)\ \limsup_{t\to \infty} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1 \qquad iv)\ \liminf_{t\to \infty} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1$$

P3. De la no diferenciabilidad del m.b., versión débil

Muestre que para cualquier $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega\ :\ D^+B_t(\omega) = \infty\ \wedge\ D_+B_t(\omega) = -\infty\}) = 1$$

P4. De la no diferenciabilidad del m.b., versión fuerte (Paley,Wiener y Zygmund)

Muestre que para el conjunto

$$A = \{\omega \in \Omega\ :\ \forall t \geq 0\ D^+B_t(\omega) = \infty\ \vee D_+B_t(\omega) = -\infty\}$$

existe un conjunto F que es medible, $\mathbb{P}(F) = 1$ y $F \subseteq A$