Clase Auxiliar N°1: Cálculo Estocástico

Profesor: Joaquín Fontbona
Auxiliares: Clara Fittipaldi - Gonzalo Mena

16 de agosto de 2010

P1. Algunos resultados previos

Definición 1: Consideramos el conjunto Ω y F familia de funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Se define la tribu generada por F como

$$\sigma(F) = \sigma(\{f^{-1}(C) \ : f \in F, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$$

Es fácil ver que

$$\sigma(F) = \sigma(\{\cap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(C_i) \ : f_i \in F, C_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\})$$

y que si $D \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es tal que $\sigma(D) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ entonces

$$\sigma(F) = \sigma(\{\cap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(C_i) \ : f_i \in F, C_i \in D, k \in \mathbb{N}\})$$

Definición 2: Consieramos $\mathbb{B}(\Omega)$ el e.v. de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ acotadas. Sea H s.e.v. de $\mathbb{B}(\Omega)$.

Diremos que H es un **MVS** si verifica:

a) H contiene a las funciones constantes

b) H es cerrado para la convergencia monótona de funciones uniformemente acotadas no negativas, es decir, si $(f_n)_n \subset H$ es una sucesión creciente y no negativa de funciones, con $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\omega\in\Omega} f_n(\omega) < \infty$ entonces $f := \lim f_n \in H$

Definición 3: Una familia Q de subconjuntos de Ω se dice π-sistema si es cerrada para intersecciones finitas, y λ-sistema si es cerrada para uniones numerables disjuntas y para la complementación. Se tiene el siguiente teorema

$\pi - \lambda$ **Teorema (Dynkin)** Si P es un π-sistema y D un λ-sistema con $P \subseteq D$ entonces $\sigma(P) \subseteq D$

P2. Teorema de clase monótona funcional

Sea H un **MVS** y $K \subseteq H$ cerrado para la multiplicación. Entonces H contiene al conjunto

$$\{f \in \mathbb{B}(\Omega) \ : f \text{ es } \sigma(K) - \mathbb{B}(\mathbb{R}) - \text{medible}\}$$

Para la demostración seguiremos el siguiente esquema:

a) Pruebe que si H es un **MVS** entonces es cerrado para la convergencia uniforme

b) Pruebe que si $C \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es un π-sistema tal que $\{\mathbb{1}_A \ : \ A \in C\} \subset H$ entonces H contiene a las funciones acotadas y $\sigma(C) - \mathbb{B}(\mathbb{R})$ medibles

c) Pruebe que para todo polinomio p y toda $f \in K$ se tiene $p(f) \in H$. Deduzca que para toda función continua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se tiene $\phi(f) \in H$ para cualquier $f \in K$

d) Considere $\phi_n(y) = \min(1, \max(y - a, 0))^{\frac{1}{n}}$ con $a \in \mathbb{R}$ arbitrario. Pruebe que $\mathbb{1}_{f>a} \in H$.

e) Demuestre el Teorema de clase monótona funcional (TCMF)

P3. Una aplicación del TCMF Sea $(\omega, \Sigma, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sub sigma algebras de Σ. Consideremos las v.a. X y Z con X-$\mathcal{F}$ medible, Z-$\mathcal{G}$ medible y X independiente de $\mathcal{G}$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ acotada. Pruebe que

$$\mathbb{E}(f(X, Z)|G) = \mathbb{E}(f(X, z))_{|z=Z}$$

P4. Sea $(\Omega, (F_n)_n, \mathbb{P})$ espacio medible con $(F_n)_n$ filtración y T tiempo de parada. Sea $Y - F_\infty$ medible (integrable o positiva).

a) Pruebe que Y es F_T medible ssi $Y\mathbb{1}_{\{T=n\}}$ es F_n medible para todo n

b) Concluya que

$$\mathbb{E}(Y|F_T) = \sum_n \mathbb{1}_{\{T=n\}} \mathbb{E}(Y|F_n)$$