Control #2 MA53L Análisis Numérico de EDP

Depto. de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile.

Semestre 2008-2, P. Frey, A. Osses

P1.- Sea T un rectángulo de $\mathbb{R}^2$ de lados paralelos a los ejes cartesianos (x, y) de vértices a_i, $1 \leq i \leq 4$. Para ser consistentes, elija a_1 como el vértice inferior izquierdo y numere en el sentido directo (contrario a las manecillas del reloj).

i) Sea P el espacio de polinomios de la forma:

$$p(x, y) = q(y) + xr(y),$$

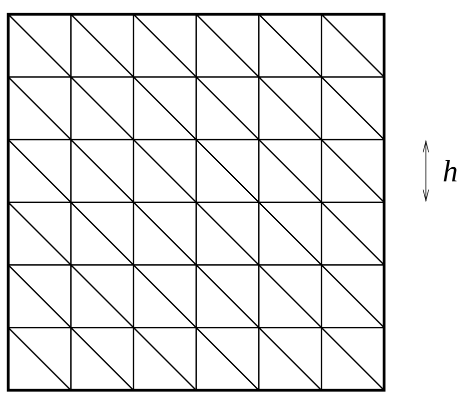
donde q y r son polinomios cualesquiera de grado ≤ 3 en la variable y ¿Cuál es la dimensión de P? Pruebe que el conjunto:

$$\Sigma_T = \{p(a_i) \ , \ \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \ 1 \leq i \leq 4\}$$

es P_T-unisolvente, donde P_T son las restricciones a T de los polinomios de P.

ii) Calcule las funciones de la base natural y el operador de interpolación Π_T asociados al elemento finito (T, P_T, Σ_T). Hágalo para el elemento de referencia $\widehat{T} = [0, 1]^2$ e indique la transformación afin.

P2.- Considere $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ mallado como en la figura, donde $h = \frac{1}{n+1}$ y $n \geq 2$ dado. Se quiere resolver $-\Delta u = f$ en Ω con condiciones de borde Dirichlet homogéneas. Calcule explícitamente la forma tridiagonal por bloques que tiene la matriz del sistema lineal correspondiente al aplicar el método de los elementos finitos con la base natural para elementos 2-simplex de tipo 1, si los vértices se numeran de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba.



P3.- Considere un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ poligonal ($d = 2$) o poliédrico ($d = 3$) y el problema variacional:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = \ell(v), \ \forall v \in V$$

donde $V \subset H^1(\Omega)$ (con la norma de Sobolev usual $\| \cdot \|_{1,\Omega}$), a es simétrica, coerciva en V y continua en $V \times V$ y $\ell \in V'$. Suponga que se utilizan $d-simplex$ de tipo k y que se aproxima la solución en $V_h =< \varphi_i >_{i=1}^N$, donde φ_i son las funciones de la base natural asociadas a cada nodo a_i de la malla τ_h. Suponemos que la malla es regular, esto es, satisface:

$$\exists C > 0 \qquad h_T \leq C\rho_T, \qquad \forall T \in \tau_h$$

y que el número de elementos que comparten un mismo nodo está uniformemente acotado con respecto a h. Notamos

$$h = \max_{T\in\tau_h} h_T, \qquad h_0 = \min_{T\in\tau_h} h_T.$$

Definimos la noma L^2 discreta de funciones de V_h como sigue:

$$\|v\|_{0,h} = \left(\sum_{T\in\tau_h} h_T^d \sum_{x_i\in T} |v(a_i)|^2 \right)^{1/2}.$$

i) Pruebe que la anterior es una norma en V_h y que es equivalente a la norma usual $\|\cdot\|_{0,\Omega}$.

ii) Pruebe que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{h_0}\|v\|_{0,\Omega}, \qquad \forall v \in V_h.$$

Indicación: en ambas partes utilice que todas las normas son equivalentes en dimensión finita en el elemento de referencia $\widehat{T}$ y pase por transformación afín a T. Use la regularidad y note que el volumen de T se puede acotar entre ρ_T^d y h_T^d.

Interesa estudiar el condicionamiento de las matrices de elementos finitos.

$$A = [a(\varphi_j, \varphi_i)], \qquad C = (\varphi_j, \varphi_i), \qquad i, j = 1, \dots, N.$$

Recordemos que el condicionamiento κ se define como la razón entre el máximo (λ_N) y mínimo (λ_1) de los valores propios de la matriz.

iii) Pruebe que

$$\kappa(C) \leq C\left(\frac{h}{h_0}\right)^d$$

¿Qué propiedad debiera tener la malla para que este condicionamiento no diverja? Indicación: recuerde que

$$\lambda_1(C) \leq \frac{x^tCx}{|x|^2} \leq \lambda_N(C), \qquad \forall x \in I\!R^N$$

alcanzándose las igualdades. Escriba

$$\frac{x^tCx}{|x|^2} = \frac{x^tCx}{\|v\|_{0,h}^2}\,\frac{\|v\|_{0,h}^2}{|x|^2}$$

donde $v = \sum_{i=1}^N x_i\varphi_i$. Calcule x^tCx en función de v y acote por arriba y por abajo adecuadamente ambos factores.

iv) Pruebe que

$$\kappa(C^{-1}A) \le \frac{C}{h_0^2}.$$

Indicación: la misma idea de antes, esta vez con la factorización

$$\frac{x^t A x}{|x|^2} = \frac{x^t A x}{x^t C x}\,\frac{x^t C x}{|x|^2}$$

haciendo el cambio de variables $y = C^{1/2}x$ y luego calcule el primer factor en función de v acotándolo por $\|v\|_{0,\tau}$ usando la parte i). ¿Por qué es importante el condicionamiento de $C^{-1}A$?