Control 2 MA53L Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile. Semestre 2009-2

Profs. P. Frey, A. Osses

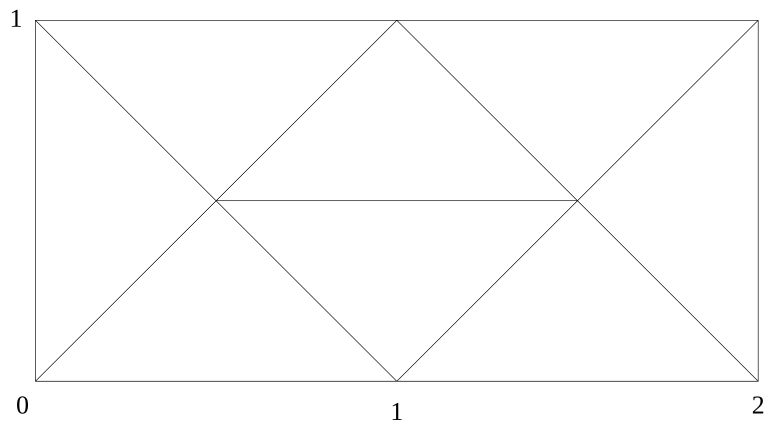
P1.- Sea $\Omega = (0,2) \times (0,1)$. Considere el siguiente problema elíptico de segundo orden: encontrar $u : \Omega \to I\!R$ tal que:

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left((1 + x_1 + x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 1 \quad \text{en } \Omega$$

con condiciones de borde de tipo Dirichlet homogéneas.

(i) Encuentre la formulación variacional del problema y pruebe que tiene solución única.

(ii) Encuentre la matriz y lado derecho del sistema lineal que se obtiene al discretizar el problema variacional con elementos finitos de tipo 1, si Ω se subdivide en 2-simplex iguales (salvo rotación) como se muestra en la figura.



P2.- Sea $Q_k = \{x^\alpha \mid \alpha \in I\!N^d,\ \alpha_i \leq k,\ \forall i\}$ el espacio de polinomios en $I\!R^d$ de grado menor o igual que k en cada variable.

(i) Considere el elemento finito (R, Q, Σ) dado por

$$R = [0,1]^d, \quad Q = Q_k(R), \quad \Sigma = \{f \to f(a),\ a \in N_k\}$$

donde

$$N_k = \left\{x = \left(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}, \ldots, \frac{i_n}{k}\right) \mid i_j \in \{0, \ldots, k\},\ 1 \leq j \leq d\right\}.$$

Pruebe que es unisolvente y encuentre la base canónica de polinomios y el operador de interpolación canónico asociados.

(ii) Dibuje el elemento finito anterior y sus grados de libertad en el caso $d = 2$, $k = 2$ designando los vértices de R por $\mathbf{a}^1 = (0,0)$, $\mathbf{a}^2 = (1,0)$, $\mathbf{a}^3 = (1,1)$, $\mathbf{a}^4 = (0,1)$, por $\mathbf{a}^{i,i+1}$ al punto medio del lado de vértices $\mathbf{a}^i$ y $\mathbf{a}^{i+1}$ (módulo 4) y por $\mathbf{a}^{1234}$ al centro de gravedad de R.

Considere ahora la siguiente variante. El elemento finito (R, P_R, Σ_R) se define por

$$P_R = \left\{p \in Q_2(R);\ p(\mathbf{a}^{1234}) = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} p(\mathbf{a}^i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} p(\mathbf{a}^{i,i+1})\right\}$$

y

$$\Sigma_R = \{f \mapsto f(\mathbf{a}^i);\ 1 \le i \le 4\} \cup \{f \mapsto f(\mathbf{a}^{i,i+1});\ 1 \le i \le 4\},$$

pruebe que este elemento finito es unisolvente y que $I\!P_2(R) \subset P_R$.

(iii) En el caso de una malla de $I\!R^2$ formada por una familia de paralelógramos afin equivalentes a R y compatibles en las interfaces, con una definición análoga que para triángulos, ¿cuál sería la ventaja de tener $I\!P_2(R) \subset P_R$ en términos del error de aproximación?

P3.- Sea Ω un abierto acotado de frontera de clase $C^{0,1}$ (Lispchitz) en $I\!R^2$. Definimos la siguiente semi-norma en $H^m(\Omega)$ para $m \ge 1$:

$$[v]_{m,\Omega} = \left(\left\| \frac{\partial^m v}{\partial x^m} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial^m v}{\partial y^m} \right\|^2 \right)^{1/2}$$

y aceptamos el siguiente resultado: existe $C > 0$ tal que

$$|v|_{m,\Omega} \le c \left(\|v\|^2_{0,\Omega} + [v]^2_{m,\Omega} \right)^{1/2} \qquad \forall v \in H^m(\Omega).$$

(i) Pruebe que si $k \ge 0$ y $R = [0,1]^d$ entonces

$$\|v\|_{H^{k+1}(R)/\,Q_k(R)} \le C[v]_{k+1,R} \quad \forall v \in H^{k+1}(R).$$

Para ello, use un argumento de unicidad-compacidad y que si $[u]_{k+1,R} = 0$ entonces $u \in Q_k(R)$.

(ii) ¿Por qué cree usted que puede ser importante para el análisis numérico de elementos finitos el resultado anterior? Indicación: piense en términos de un operador de interpolación que deje invariantes los polinomios de Q_k.