Lista de Proyectos MA5303. Semestre 2010-2

Laboratorio de Análisis Numérico de EDP, Profesor. Axel Osses,
Auxiliares. Constanza Maturana (cmaturana@dim.uchile.cl), Cristóbal Quiñinao (toba@dim.uchile.cl)

Los siguientes son algunos de los proyectos disponibles este semetre. Se les pide a los alumnos que los vean y señalen a los profesores y auxiliares cuál se ajusta más a sus intereses. Los proyectos se pueden realizar en grupos de hasta dos integrantes. El avance de los proyectos se discutirá durante las reuniones de los días miércoles.

Proyecto 1
Resolución de la ecuación Eikonal y aplicación a la propagación de ondas en un medio heterogéneo

(Método de Diferencias Finitas)

Se trata de resolver la ecuación en derivadas parciales de primer orden siguiente:

$$|\nabla T(x,y)|^2 = \frac{1}{c^2(x,y)}$$

conocida en sismología como ecuación Eikonal, donde T es el tiempo de viaje de una onda de presión y $c(x,y)$ es la velocidad (variable) de las ondas en el medio. Se debe resolver el problema en un dominio rectangular, encontrar las isocronas o curvas de tiempo constante y el campo ortogonal que corresponde a la trayectoria de la propagación de las ondas.

Proyecto 2
Ecuación de flujo de la curvatura media y conjuntos de nivel

(Método de Diferencias Finitas)

Hay una importante y especial clase de problemas donde la evolución en tiempo de una interfaz entre dominios depende sólo de su geometría. La ecuación que describe este movomiento de la interfaz es llamada *ecuación de evolución geométrica.* Consideramos una familia $\{\Gamma_t\}_{t\geq 0}$ de curvas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Γ_t es la interfaz entre dos conjuntos abiertos Ω_t^+ y Ω_t^-. Las curvas de interfaz Γ_t pueden ser representadas por el conjunto de nivel 0 de una función auxiliar $u : \Omega \times [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ y su evolución es descrita entonces por la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + v(x,t,\nabla u(x,t),\nabla^2 u(x,t)) \cdot \nabla u(x,t) = 0.$$

Esta ecuación es llama la *ecuación de conjunto de nivel.* Consideramos aquí un caso particular, llamada la *ecuación de flujo de la curvatura media*, donde v es la velocidad normal (en la dirección normal $n(x,t)$) tal que $|v| = \text{div } n$, caracterizada por la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - |\nabla u(x,t)|\text{div}\left(\frac{\nabla u(x,t)}{|\nabla u(x,t)|}\right) = 0.$$

El objetivo de este proyecto es estudiar numéricamente el movimiento por la curvatura media mediante un método de conjunto de nivel, usando diferencias finitas. Incluye una aplicación a procesamiento de imágenes.

Proyecto 3
Estudio de esquemas numéricos para la ecuación de transporte 2D
(Método de Diferencias Finitas y Volúmenes Finitos)

En un dominio rectangular y circular, se trata de resolver la ecuación

$$u_t + v(x, y) \cdot \nabla u = 0$$

para una condición inicial a soporte compacto (un cuadrado, un polígono convexo o no) y condiciones de borde periódicas en el caso de un dominio rectangular y adecuadas en el caso circular, para un campo de velocidades v apropiado. Se deben comparar num'ericamente distintos esquemas de diferencias finitas en mallas estructuradas. Se discutirá también el caso de mallas no estructuradas usando volúmenes finitos.

Proyecto 4
El problema de Stokes
(Método de Elementos Finitos)

El objetivo de este proyecto es encontrar una solución numérica al problema de Stokes estacionario por elementos finitos en dimensión 2 en dos casos de interés en ingeniería: dado Ω un abierto acotado poligonal conexo y convexo de R^2 de normal unitaria exterior n, encontrar $u \in H^1(\Omega)^2$ y $p \in L^2(\Omega)/R$ tales que para $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u^i + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= f^i, \quad \text{en} \quad \Omega \\ \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u^i}{\partial x_i} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ u^i &= g^i \quad \text{sobre} \quad \Gamma_d, \\ \sigma(u, p)n &= 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_n, \\ u^i &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \setminus (\Gamma_n \cup \Gamma_d), \end{aligned}$$

donde $\nu > 0$, $f^i \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ $\int_{\Gamma_d} g \cdot n \, d\sigma = 0$, son los datos y u^i (i-ésima componente de la velocidad) y p (presión) son las incógnitas y

$$\begin{aligned} \sigma(u, p) &= -pI + 2\nu(e(u)) \\ e(u) &= 1/2(\nabla u + \nabla u^t) \end{aligned}$$

Incluye también un breve estudio del problema teórico.

Proyecto 5
Un problema de ondas de superficie libre
(Método de Elementos Finitos)

El objetivo de este proyecto es encontrar una solución numérica al problema de valores propios siguiente: encontrar funciones escalares no constantes ϕ y números λ tales que

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \setminus \Gamma_s, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \lambda\phi \quad \text{sobre } \Gamma_s. \end{aligned}$$

El problema corresponde a encontrar las frecuencias propias de vibración de la superficie libre Γ_s de un líquido irrotacional e incompresible contenido en Ω (de normal n) sometido a la acción de la gravedad g y bajo pequeñas vibraciones.
Incluye también un estudio teórico del problema.

Proyecto 6
Un problema de transmisión
(Método de Elementos Finitos)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado no vacío de frontera lipschitziana. Sea $\Omega_2 = B_r(x_0, y_0)$ la bola abierta de centro (x_0, y_0) y radio $r > 0$ tal que $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega$. Definimos $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_2$, $\Gamma = \partial\Omega$, $\gamma = \partial\Omega_2$. Denotamos por n a la normal unitaria exterior a Ω_1. El objetivo de este proyecto es estudiar y encontrar una solución numérica al siguiente problema de transmisión: Dado $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, $a_i \in L^\infty(\Omega_i)$, $a_i(x,y) \geq \alpha_0 > 0$ c.t.p. $(x,y) \in \Omega_i$, $i = 1, 2$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(a_1(x,y)\nabla u) & = & 0 & \text{en } \Omega_1 \\ u & = & g & \text{sobre } \Gamma \\ -\mathrm{div}(a_2(x,y)\nabla v) & = & 0 & \text{en } \Omega_2 \\ u & = & v & \text{sobre } \gamma \\ a_1 \frac{\partial u}{\partial n} & = & a_2 \frac{\partial v}{\partial n} & \text{sobre } \gamma \end{array} \right.$$

El objetivo final es estimar numéricamente la ubicación del dominio interior mediante mediciones de la derivada normal de la solución en el borde exterior (problema inverso).

Proyecto 7
Ecuación del calor no lineal
(Método de Diferencias Finitas)

Se considera la *ecuación biestable:*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \mathrm{div}(\sigma(x)\nabla u) = a(x)u(1-u)(u - \alpha(x)) \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Omega. \end{array} \right.$$

Este es un modelo muy simple de la propagación de voltaje en el corazón, donde $\sigma(x)$ es la conductividad del medio. Si el tejido del corazón está sano, la conductividad es homogénea. Sin embargo, si hay una zona de tejido muerto (infarto), la conductividad baja en tal zona, provocando que la propagación de voltaje cambie. El objetivo de este proyecto es estudiar numéricamente la solución de esta ecuación para σ variable en un dominio en $\mathbb{R}^2$, simulando un infarto.