MA4002 Cálculo Diferencial y Variaciones. Semestre 2010-02

Profesor: Salomé Martínez Auxiliares: Emilio Vilches y Andres Zuñiga

Auxiliar # 7

5 de octubre de 2010

P1. Soluciones aproximadas

Sea E un espacio de Banach, $U \subset \mathbb{R} \times E$ y $f: U \rightarrow E$ una función k -Lipschitziana con respecto a la segunda variable. Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1)$$

Sean $\varepsilon > 0$, I un intervalo y $\varphi: I \rightarrow E$ una función de clase C^1 a trozos. Se dice que φ es una solución ε -aproximada de la ecuación (1) si:

- (i) $(t, \varphi(t)) \in U$ para todo $t \in I$.
- (ii) $\|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \varepsilon$ para todo $t \in I$.

Nota: En los puntos donde φ no sea diferenciable, entenderemos que la desigualdad en (ii) vale para la derivada por la izquierda o por la derecha según corresponda.

Teorema: Sean I un intervalo compacto, $t_0 \in I$, $x_0 \in E$, y $r > 0$. Supongamos que $f: I \times \overline{B}(x_0, r) \rightarrow E$ es una función continua que satisface

$$\|f(t, x)\| \leq M < +\infty \quad \text{para todo } (t, x) \in I \times \overline{B}(x_0, r).$$

Consideremos el segmento

$$J = I \cap \left[t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M} \right].$$

Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ la ecuación (1) posee una solución ε -aproximada $\varphi: J \rightarrow \overline{B}(x_0, r)$ que es lineal afín a trozos y satisface $\varphi(t_0) = x_0$.

Lema: Sea $u: [0, T] \rightarrow [0, +\infty)$ una función continua. Si se tiene

$$u(t) \leq at + b \int_0^t u(\tau) d\tau \quad \text{para todo } t \in [0, T]$$

con $a, b > 0$, entonces también se cumple

$$u(t) \leq \frac{a}{b} [e^{bt} - 1] \quad \text{para todo } y \in [0, T].$$

Proposición: Sean $\varphi_1: T \rightarrow E$ una solución ε_1 -aproximada y $\varphi_2: I \rightarrow E$ una solución ε_2 -aproximada de la ecuación (1), respectivamente. Dado $t_0 \in I$ definimos $x_1 = \varphi_1(t_0)$ y $x_2 = \varphi_2(t_0)$. Entonces, para todo $t \in I$ se tiene

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{k|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left[\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k} \right].$$

Teorema: Supongamos que U es cerrado, I es compacto, $t_0 \in I$ y $(t_0, x_0) \in U$. Supongamos también que para todo $\varepsilon > 0$ la ecuación (1) admite una solución ε -aproximada φ de clase C^1 a trozos, definida en I y que satisface $\varphi(t_0) = x_0$. Entonces existe en I una única solución exacta ψ de la ecuación (1) que satisface $\psi(t_0) = x_0$.