MA4002 Cálculo Diferencial y Variaciones. Semestre 2010-02
Profesor: Salomé Martinez **Auxiliares:** Emilio Vilches y Andres Zuñiga

Auxiliar # 3

27 de agosto de 2010

P1. Considere $C([0,1];\mathbb{R})$ dotado de la norma $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ y $X = C^2([0,1];\mathbb{R})$ dotado de la norma $\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x''\|_\infty$. Para $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ definimos $F\colon \mathbb{R}\times X \to C([0,1];\mathbb{R})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ como

$$F(\varepsilon, x) = (x'' + x^2 - \varepsilon f, x(0), x(1))$$

Pruebe que existe un intervalo $I \ni 0$ tal que para todo $\varepsilon \in I$ existe una solución de la EDO:

$$\begin{cases} x''(t) + (x(t))^2 = \varepsilon f(t) & \forall t \in [0,1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

P2. Considere la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} u'' + \lambda p(x) e^u &= 0 \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

con $p \in C([0,1];\mathbb{R})$. Demuestre que existe $\bar{\lambda} > 0$ tal que para todo $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ este problema admite solución. Para ello, muestre primero que para todo $h \in C([0,1];\mathbb{R})$ el problema

$$\begin{aligned} u'' &= h(x) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

tiene solución única v. Además que para cierto $C > 0$ independiente de h,

$$\|v\|_\infty \leq C\|h\|_\infty.$$

P3. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ y $g\colon \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dos aplicaciones de clase C^1. Considere la aplicación $F\colon \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(x,y) = g(x)(f(y)) + f(x).$$

Suponga que $0 \in \Omega$ y que $f(0) = 0$. Dé una condición sobre f y g para que existan dos vecindades abiertas U y V de 0 sobre $\mathbb{R}^n$ y una aplicación $\psi\colon U \to V$ de clase C^1 tal que

$$(x,y) \in U \times V \quad \text{y} \quad F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \psi(x).$$