MA4002 Cálculo Diferencial y Variaciones. Semestre 2010-02
Profesor: Salomé Martinez **Auxiliares:** Emilio Vilches y Andres Zuñiga

Auxiliar # 1

17 de agosto de 2010

P1. Sean X e Y dos espacios de Banach. Definamos el conjunto $D := \mathrm{Isom}(X;Y) \subset \mathcal{L}(X;Y)$ y consideremos la función $\varphi\colon D \to \mathcal{L}(Y;X)$ definida por $\varphi(u) = u^{-1}$.

a) Pruebe que D es un abierto de $\mathcal{L}(X;Y)$ y que φ es continua.

b) Demuestre que φ es diferenciable y que su derivada en un punto $u \in D$ viene dada por $\varphi'(u)h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$ para $h \in \mathcal{L}(X;Y)$.

c) Finalmente, verifique que la función φ es de clase C^1.

P2. Denotemos por $\mathbb{S}^n$ el espacio de Hilbert de todas las matrices simétricas de $n \times n$ a coeficientes reales, dotado del producto interno

$$\langle\!\langle A, B\rangle\!\rangle := \mathrm{tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}.$$

La norma inducida por $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ se conoce como la *norma de Frobenius*. Sea $\mathbb{S}^n_{++} \subset \mathbb{S}^n$ el conjunto de las matrices simétricas definidas positivas.

a) Pruebe que $\mathbb{S}^n_{++}$ es abierto en $\mathbb{S}^n$ y que para cada $C \in \mathbb{S}^n_{++}$, la función $T_C\colon \mathbb{S}^n_{++} \to \mathbb{R}$ definida por $T_C(X) = \mathrm{tr}(CX^{-1})$ es de clase C^1 en $\mathbb{S}^n_{++}$. Calcule $\nabla T_C(X)$.

b) Sea $\Phi\colon \mathbb{S}^n_{++} \to \mathbb{R}$ la función por $\Phi(X) = -\ln(\det(X))$. Demuestre que $\nabla\Phi(I) = -I$. Deduzca que $\nabla\Phi(X) = -X^{-1}$. Pruebe que Φ es de clase C^1.

P3. *a*) Sea $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Muestre que $\Phi\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ definida por $\Phi(x)_i := \varphi(x_i)$ es de clase C^1.

b) Dado $\alpha > 0$. Muestre que $x \mapsto \sum_i e^{-i\alpha}\varphi(x_i)$ es de clase C^1 sobre ℓ^∞ y calcule su derivada.