Auxiliar 7: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Mauro Escobar - Felipe Subiabre
4 de octubre de 2010

P1. (i) Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ esp. de medida, $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ y ν medida con signo definida por $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$. Pruebe que para todo $A \in \mathcal{F}$ se cumple

$$|\nu|(A) = \int_A |f| \, d\mu.$$

(ii) Sea ν una medida con signo $\sigma-$finita en el espacio medible $(X, \mathcal{F})$. Pruebe que $\frac{\partial \nu}{\partial |\nu|}$, la derivada de Radon-Nikodým de ν con respecto a $|\nu|$, satisface

$$\left| \frac{\partial \nu}{\partial |\nu|} \right| = 1 \qquad |\nu| - \text{ctp en } X.$$

P2. Sea $(X, \mathcal{F})$ espacio medible. Sea $T : X \to X$ función $\mathcal{F} - \mathcal{F}-$medible y μ medida de probabilidad. Se dice que μ es $T-$invariante si $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Se dice que μ es ergódica si es $T-$invariante y

$$\forall A \in \mathcal{F} \qquad \mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 0 \vee \mu(A) = 1.$$

Consideremos el conjunto de las medidas de probabilidad $T-$invariantes

$$\mathcal{M}_T(X) = \{\mu : \mathcal{F} \to [0,1] \mid \mu(X) = 1,\ \mu \text{ es } T - \text{invariante}\}.$$

(i) Pruebe que $\mathcal{M}_T(X)$ es un conjunto convexo.

(ii) Pruebe que μ es ergódica ssi μ es un punto extremo de $\mathcal{M}_T(X)$.

(iii) Si μ y ν son ergódicas y $\mu \neq \nu$, entonces $\mu \, \text{II} \, \nu$.

P3. Consideremos ν una medida con signo finita sobre $([0,1], \mathcal{B}[0,1])$, tal que

$$\nu(\{0\}) = \nu([0,1]) = 0.$$

Si definimos $F(x) = \nu([0,x])$, entonces F es de variación acotada y continua por la derecha. Pruebe que si f es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces

$$\int_{[0,1]} f \, d\nu \;=\; -\int_{[0,1]} f'(x) F(x) \, dx.$$