

AUXILIAR 13: TEORÍA DE LA MEDIDA

PROFESOR: JAIME SAN MARTÍN

AUXILIARES: MAURO ESCOBAR - FELIPE SUBIABRE

15 DE NOVIEMBRE DE 2010

P1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y sea $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia creciente de sub- σ -álgebras de $\mathcal{F}$ (que llamamos “filtración”). Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias (que llamamos proceso estocástico) tales que $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ para todo n . Decimos que este proceso es una **martingala** si para todo n

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n \quad \text{c.s.}$$

- (a) Sea $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Muestre que el proceso $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ es una martingala.
 - (b) Muestre que un proceso integrable $(X_n)_{n \geq 0}$ es una martingala si y solo si $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = 0$ para todo n .
 - (c) Sea $(Y_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas de ley Normal $(0, \sigma^2)$, con $\sigma > 0$. Llamemos $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ y definamos $X_n := Y_1 + \dots + Y_n$. Recordemos además que $\mathbb{E}(e^{uY_1}) = e^{\frac{u^2\sigma^2}{2}}$.
 - Muestre que X_n es martingala.
 - Sea $Z_n^u = \exp\left\{uX_n - \frac{nu^2\sigma^2}{2}\right\}$. Muestre que para todo $u \in \mathbb{R}$ el proceso Z_n^u es una martingala.
 - Muestre que, para cada u , el proceso Z_n^u converge casi seguramente a una variable aleatoria finita (y encuentre su límite en función de u).
- Indicación:** Recuerde la Ley de los Grandes Números.

P2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y sea $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia creciente de sub- σ -álgebras de $\mathcal{F}$, tales que $\sigma(\cup_n \mathcal{F}_n) = \mathcal{F}$.

- (a) Probar que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $n \geq 1$, se tiene:

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{P}(E_n) \leq \int_{\Omega} |f| \, d\mathbb{P},$$

donde $E_n = \left\{ \omega \in \Omega : \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{E}(f | \mathcal{F}_k) > \lambda \right\}$. Para ello, suponga que $f \geq 0$ y defina para $1 \leq k \leq n$:

$$E_k^n := \{ \omega \in \Omega : [\forall j \in \{1, \dots, k-1\}, \mathbb{E}(f | \mathcal{F}_j)(\omega) \leq \lambda] \wedge [\mathbb{E}(f | \mathcal{F}_k)(\omega) > \lambda] \}.$$

Probar que E_k^n es $\mathcal{F}_k$ -medible y que $E_n = \bigcup_{k=1}^n E_k^n$. Luego, pruebe que $\int_{E_n} f \, d\mathbb{P} \geq \lambda \mathbb{P}(E_n)$, y luego, concluya el resultado para f general.

- (b) Probar que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\lambda > 0$

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega : \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}(f | \mathcal{F}_n)(\omega) > \lambda \right\} \right) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} |f| \, d\mathbb{P}.$$

- (c) Probar que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se tiene que

$$\mathbb{E}(f | \mathcal{F}_n) \longrightarrow f \quad \text{en } L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

Para ello puede ocupar (sin probar) que, dada $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\varepsilon > 0$, se puede encontrar una función $g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$, para algún $n \geq 1$, tal que $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$.

(d) Probar que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $g \in \bigcup_{n \geq 1} L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$, se tiene que

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) - f| > \lambda \right\} \right) \leq \frac{4}{\lambda} \int_{\Omega} |f - g| \, d\mathbb{P}.$$

Concluya que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) \longrightarrow f \quad \text{puntualmente } \mathbb{P}\text{-c.s.}$$